Faculty of Mathematics
Kyushu University

Faculté de Mathématiques
Université de Kyushu

数 学 特 論 講 義 ノ ー ト

2000 年度前期：京都大学
2008 年度後期：九州大学

単 位 円 板 の 幾 何 と 解 析

野 村 隆 昭

目　　　　次

§1. Hyperbolic Motions in the Unit Disk.

行列 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，一次分数変換

$$w = f_g(z) = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

を考える．簡単な計算で，

$$\begin{cases} f_{g_1 g_2} = f_{g_1} \circ f_{g_2} & (g_1, g_2 \in SL(2,\mathbb{C})), \\ f_I = \text{恒等写像} & (I \text{ は単位行列}) \end{cases}$$

がわかる．従って，逆変換は

$$f^{-1}(w) = f_{g^{-1}}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

変換 $z \mapsto w$ は Riemann 球面 $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の bijection で，

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad f\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty$$

である．

$f(z)$ を次のように分解しよう：

(1) $c \neq 0$ のとき，

$$w = \frac{a}{c} + \frac{1}{cz+d}\Big(b - \frac{ad}{c}\Big) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{z + (d/c)}.$$

(2) $c = 0$ のとき，$a \neq 0$, $d \neq 0$ に注意して

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}.$$

従って，f は次の 3 種の変換の合成になっている：

（ア）平行移動： $z \mapsto z + \beta \quad (\beta \in \mathbb{C})$,

（イ）伸縮と回転： $z \mapsto \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$,

（ウ）反転： $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

そして変換 $z \mapsto w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ は

(i) 等角（共形），すなわち oriented angles を保存する，

(ii) 円または直線を円または直線に写す（円円対応），

(iii) 複比 (cross ratio) $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$ を保つ．

以下，単位円の内部で考え，$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ とおく．

命題 1.1. $f(z) = f_g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ とする．このとき

$$f(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \iff g \in SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

証明． $[\Longleftarrow]$ $f(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ $(|\alpha|^2-|\beta|^2=1)$ とする．$|z|=1$ のとき，

$$|f(z)|=\frac{1}{|\overline{z}|}\left|\frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}\right|=\left|\frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}+\overline{\alpha}\,\overline{z}}\right|=1.$$

ゆえに $f(\partial\mathcal{D})=\partial\mathcal{D}$．さらに $f(0)=\beta/\overline{\alpha}$ で，$|\alpha|>|\beta|$ より $f(0)\in\mathcal{D}$．以上より $f(\mathcal{D})=\mathcal{D}$ である．

$[\Longrightarrow]$ 仮定より $f(\partial\mathcal{D})=\partial\mathcal{D}$ である．

(1) $f(0)=0$ すなわち $b=0$ のとき：$f(z)=\dfrac{az}{cz+d}$ $(ad=1)$ である．$|f(1)|=|f(-1)|=|f(i)|=1$ より，$\dfrac{|a|}{|c+d|}=\dfrac{|a|}{|c-d|}=\dfrac{|a|}{|ci+d|}=1$．これより $|c+d|=|c-d|=|c-di|=|a|=\dfrac{1}{|d|}$．よって c は２点 $d,-d$ から等距離にあり，また d,id からも等距離にある．ゆえに $c=0$（初等幾何学的考察による）．従って $|d|=1$ であり，$a=1/d=\overline{d}$．以上から，$a=\overline{d}=e^{i\theta/2}$ とおくと $f(z)=e^{i\theta}z$ となり，これは原点のまわりの回転である．

(2) $f(0)\neq 0$ のとき． $f(0)=re^{i\varphi}$ とおく $(0<r<1)$．$r=\tanh(t/2)$ $(t>0)$ として，次の一次分数変換 $h(z)$ を考える：

$$h(z)=e^{i\varphi}\frac{(\cosh(t/2))z+\sinh(t/2)}{(\sinh(t/2))z+\cosh(t/2)}.$$

h は行列

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}\cosh(t/2) & e^{i\varphi/2}\sinh(t/2) \\ e^{-i\varphi/2}\sinh(t/2) & e^{-i\varphi/2}\cosh(t/2)\end{pmatrix}\in SU(1,1)$$

に対応しているから，証明の前半部分より $h(\mathcal{D})=\mathcal{D}$. そして $h(0)=e^{i\varphi}\tanh(t/2)=f(0)$．ゆえに $h^{-1}\circ f$ は原点を固定しているので，(1) より，適当な $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$h^{-1}\circ f(z)=e^{i\theta}z$ となる．すなわち

$$f(z)=h(e^{i\theta}z)=e^{i\varphi}\frac{(\cosh(t/2))e^{i\theta}z+\sinh(t/2)}{(\sinh(t/2))e^{i\theta}z+\cosh(t/2)}.$$

従って f は次の行列 $(\in SU(1,1))$ に対応するから証明終わり：

$$\begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\theta)/2}\cosh(t/2) & e^{i(\varphi-\theta)/2}\sinh(t/2) \\ e^{-i(\varphi-\theta)/2}\sinh(t/2) & e^{-i(\varphi+\theta)/2}\cosh(t/2)\end{pmatrix}. \quad \square$$

以下

$$G:=\{f_g\ ;\ g\in SU(1,1)\}$$

とおく．すなわち，G は $\mathcal{D}$ を保つ一次分数変換全体で，写像の合成に関して群をなしている．$SU(1,1)\ni g\mapsto f_g\in G$ は群準同型で，核は $\{\pm I\}$ であるから，$G\cong SU(1,1)/\{\pm I\}$ である．$K:=\{f\in G\ ;\ f(0)=0\}$ とおく．$k_\theta(z):=e^{i\theta}z$ とすると，先の証明から

$$K=\{k_\theta\ ;\ \theta\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{T}.$$

また，$t \in \mathbb{R}$ に対して，次の一次分数変換 a_t を考える：

$$a_t(z) := \frac{(\cosh(t/2))z + \sinh(t/2)}{(\sinh(t/2))z + \cosh(t/2)}.$$

容易に $a_t \circ a_{t'} = a_{t+t'}$ (exercise).

以後，$A := \{a_t \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ とおく．群として $A \cong \mathbb{R}$ である．

定理 1.2 (Cartan 分解). $A_+ := \{a_t \,;\, t \geqq 0\}$ とおく．各 $f \in G$ は $f = k_\varphi a_t k_\theta$ と表される ($k_\varphi, k_\theta \in K$, $a_t \in A_+$)．$f \notin K$ ならばこの表示は一意的であり，φ, t は $f(0) = e^{i\varphi}\tanh(t/2)$ で与えられる．

演習： 初めから一次分数変換と仮定しなくても，

$$G = \{F \,;\, \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \text{bijection s.t. } F, F^{-1} \text{ 共に正則}\}$$

となることを示せ．

$\supset$ のみ問題．まず $F(0) = 0$ のとき，F と F^{-1} に Schwarz の補題を適用して，$F(z) = e^{i\theta}z$ を導く．以下命題 1.1 の証明に同じ．

定義：C^1 曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathcal{D}$ に対して

$$L(\gamma) := 2\int_0^1 \frac{|\gamma'(u)|}{1 - |\gamma(u)|^2}\,du$$

を γ の **hyperbolic length** という．

以下，$g \in G$ のとき，$g \circ \gamma$ で曲線 $u \mapsto g(\gamma(u))$ を表す．

命題 1.3. 任意の $g \in G$ に対して，$L(g \circ \gamma) = L(\gamma)$.

証明. $g(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}}$ $(|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$ のとき，

$$g'(z) = \frac{1}{(\overline{\beta}z + \overline{\alpha})^2}\left[\alpha(\overline{\beta}z + \overline{\alpha}) - \overline{\beta}(\alpha z + \beta)\right] = \frac{1}{(\overline{\beta}z + \overline{\alpha})^2}.$$

一方，

$$\begin{aligned} 1 - |g(z)|^2 &= \frac{1}{|\overline{\beta}z + \overline{\alpha}|^2}\left[|\overline{\beta}z + \overline{\alpha}|^2 - |\alpha z + \beta|^2\right] \\ &= |g'(z)|(1 - |z|^2). \end{aligned}$$

以上の計算から

$$\frac{|(g \circ \gamma)'(u)|}{1 - |g \circ \gamma(u)|^2} = \frac{|g'(\gamma(u))||\gamma'(u)|}{1 - |g \circ \gamma(u)|^2} = \frac{|\gamma'(u)|}{1 - |\gamma(u)|^2}$$

となって，$L(g \circ \gamma) = L(\gamma)$ を得る． □

定義：$z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ とする．z_1 と z_2 を結ぶ測地線とは，(存在するとして) z_1 から z_2 への $\mathcal{D}$ 内の曲線 γ_0 で，z_1 から z_2 への任意の曲線 γ に対して，$L(\gamma_0) \leqq L(\gamma)$ となるものである．そのような γ_0 があるとき，$d(z_1, z_2) := L(\gamma_0)$ とおいて，これを z_1 から z_2 への双曲距離と呼ぶ．

補題 1.4. $0 < x_0 < 1$ とし，実軸上の線分 $[0, x_0]$ を γ_0 とする．このとき， 0 から x_0 への任意の曲線 $\gamma \neq \gamma_0$ に対して，$L(\gamma_0) < L(\gamma)$ となる．従って，0 から x_0 への測地線は一意に存在して，それは γ_0 である．さらに次式が成り立つ：

$$d(0, x_0) = \log \frac{1 + x_0}{1 - x_0} = 2 \operatorname{Arctanh} x_0.$$

証明． $\gamma(u) = x(u) + iy(u)$ $(u \in [0,1],\ x(0) = y(0) = 0,\ x(1) = x_0,\ y(1) = 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}}{1 - (x(u)^2 + y(u)^2)}\, du \geqq 2 \int_0^1 \frac{x'(u)}{1 - x(u)^2}\, du \\ &= 2 \int_0^{x_0} \frac{dt}{1 - t^2} = \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \log \frac{1 + x_0}{1 - x_0} = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

ここで等号は，すべての $u \in [0,1]$ に対して，$x'(u) \geqq 0,\ y'(u) = y(u) = 0$ のときにのみ起こる．すなわち，$\gamma = \gamma_0$ のときにのみ起こる． □

補題 1.5. $z_1, z_2 \in \mathcal{D},\ z_1 \neq z_2$ とする．このとき，$g \in G$ が存在して，$g(z_1) = 0$ かつ $g(z_2) > 0$ となる．

証明． $h(z) := \dfrac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}$ を考える．h には次の行列が対応しているので，$h \in G$ である（h の見つけ方には鏡像の原理を用いている）：

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |z_1|^2}} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ -\overline{z}_1 & 1 \end{pmatrix} \in SU(1,1).$$

$h(z_1) = 0$ であるので，$e^{i\theta} h(z_2) > 0$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ をとって $g = k_\theta \circ h \in G$ とおけば，この g が求めるものである． □

定理 1.6. $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ $(z_1 \neq z_2)$ とする．
(1) z_1 から z_2 への測地線 δ が一意に存在する．この δ は z_1, z_2 を通って $\partial\mathcal{D}$ に直交する円の部分弧である．(z_1, z_2, O が同一直線上にあるときは $\mathcal{D}$ の直径の一部分になる．)
(2) $d(z_1, z_2) = 2 \operatorname{Arctanh} \left| \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} \right|.$
(3) 任意の $g \in G$ に対して，$d(g(z_1), g(z_2)) = d(z_1, z_2)$.

証明． 補題 1.5 の $g \in G$ をとって，$x_0 := g(z_2) = \left| \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} \right| > 0$ とおく．補題 1.4 より，実軸上の線分 $[0, x_0]$（γ_0 とする）は 0 から x_0 への一意な測地線である．$\delta := g^{-1}(\gamma_0)$ が求めるもの．最後に，写像 g^{-1} の等角性より，δ が主張中に述べた円の部分弧となることは明らかであろう． □

定理 1.7 (2 点等質性)**.** $z_1, z_2, z_1', z_2' \in \mathcal{D},\ \ z_1 \neq z_2,\ \ d(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ とする．このとき，一意的に $g \in G$ が存在して，$g(z_j) = z_j'$ $(j = 1, 2)$ となる．

証明. 補題 1.5 より，$g_0 \in G$ が存在して，$g_0(z_1) = 0$ かつ $x_0 := g_0(z_2) > 0$ となる．同様に，$g_0' \in G$ が存在して，$g_0'(z_1') = 0$ かつ $x_0' := g_0'(z_2') > 0$ となる．ここで，仮定 $d(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ より

$$x_0 = \tanh \frac{d(z_1, z_2)}{2} = \tanh \frac{d(z_1', z_2')}{2} = x_0'.$$

ゆえに，$g := (g_0')^{-1} \circ g_0 \in G$ が求めるもの．

もう一つ $h \in G$ があって，$h(z_j) = z_j'$ $(j = 1, 2)$ とすると，$g_0 \circ h^{-1} \circ g \circ g_0^{-1} = g_0 \circ h^{-1} \circ (g_0')^{-1}$ は原点 O と $x_0 > 0$ を止める．従って，$g_0 \circ h^{-1} \circ g \circ g_0^{-1}$ は x_0 を止める原点のまわりの回転だから，恒等写像．ゆえに $h^{-1} \circ g$ も恒等写像．$\therefore$ $h = g$. $\square$

§2. 単位円板の双曲幾何

$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$, $\quad G := \left\{ g\ ;\ g(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$.

G は $\mathcal{D}$ に推移的に作用している：§1 で見たように，$z_1 \neq 0$ のとき

$$h(z) := \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}$$

とおくと，$h \in G$ であり，$h(z_1) = 0$ をみたしている．

$$K := G_0 := \{g \in G\ ;\ g(0) = 0\} \quad (\text{原点における } G \text{ の固定部分群})$$

とすると，$K = \{k_\theta\ ;\ k_\theta(z) = e^{i\theta} z\}$ となる．

$\mathcal{D}$ の双曲距離 $d(z_1, z_2)$ は実際距離の公理をみたし，$(\mathcal{D}, d)$ は距離空間になっている．

定義：$z_0 \in \mathcal{D}$, $R > 0$ とする．中心が z_0 で半径が R の **Lobachevsky circle** とは，双曲距離で考えた円 $C(z_0, R) := \{z \in \mathcal{D}\ ;\ d(z, z_0) = R\}$ のこと．

補題 2.1. $z_0 \in \mathcal{D}$，$R > 0$ とする．
(1) $C(z_0, R)$ は通常の円である．
(2) $C(z_0, R)$ の hyperbolic length について，$L(C(z_0, R)) = 2\pi \sinh R$ である．
(3) z_0 における G の固定部分群を G_{z_0} とする：

$$G_{z_0} := \{g \in G\ ;\ g(z_0) = z_0\}.$$

このとき，G_{z_0} は K に共役になる．そして各 $C(z_0, R)$ は G_{z_0} 軌道である．
(4) $C(z_0, R)$ は z_0 を通る各測地線と直交する．

証明. (1) §1 より，$d(z, z_0) = 2 \operatorname{Arctanh} \left| \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right|$ であるから，

$$d(z, z_0) = R \iff \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right| = \tanh \frac{R}{2}.$$

ゆえに，$z_0 = 0$ のときは，$C(0, R) = \{z \in \mathcal{D}\ ;\ |z| = \tanh \frac{R}{2}\}$ である．$z_0 \neq 0$ のときは

$$d(z, z_0) = R \iff \left| \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\overline{z}_0}} \right| = |z_0| \tanh \frac{R}{2}$$

となるので，$C(z_0, R)$ は z_0 と $\frac{1}{\bar{z}_0}$ からの距離の比が一定である Apollonius の円である．
(2) $g \in G$ をとって $g(z_0) = 0$ とすると，

$$g(C(z_0, R)) = C(0, R) = \{\big(\tanh \tfrac{R}{2}\big)e^{i\theta}\ ;\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

となっている．ゆえに

$$L(C(z_0, R)) = L(C(0, R)) = 2\int_0^{2\pi} \frac{\tanh \frac{R}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{R}{2}}\, d\theta$$

$$= 4\pi \cdot \frac{\tanh \frac{R}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{R}{2}} = 4\pi \cosh \frac{R}{2} \sinh \frac{R}{2} = 2\pi \sinh R.$$

(3) $K = G_0$ であるから，(2) の g を取れば，$G_{z_0} = g^{-1}Kg$ となる．ゆえに，

$$C(z_0, R) = g^{-1}(C(0, R)) = g^{-1}\Big(K \cdot \tanh \frac{R}{2}\Big) = G_{z_0} \cdot g^{-1}\Big(\tanh \frac{R}{2}\Big).$$

(4) (2) の g で写して考えると：
　z_0 を通る測地線 $\longleftrightarrow$ 単位円板の直径,
　$C(z_0, R) \longleftrightarrow$ 原点を中心とする通常の円. $\square$

定義：(1) $\partial\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ の点を $\mathcal{D}$ の無限遠点という．実際,

$$d(0, z) = 2\,\mathrm{Arctanh}\,|z| \to \infty \quad (|z| \to 1).$$

(2) 2 個の測地線が無限遠点で出会うとき（すなわち無限遠点で接するとき），この 2 個の測地線は平行であるという.

♠ $\delta \subset \mathcal{D}$ を測地線とし，$P \in \mathcal{D}$ は δ 上にないとする．適当な $g \in G$ で $g(P) = O$（原点）となるもので状況を移しかえて考えれば明らかなように，P を通って δ に平行な測地線は丁度 2 個ある（直径で測地線と $\partial\mathcal{D}$ で接するものは 2 個ある）.
$\Longrightarrow$ 非ユークリッド幾何.

Hyperbolic Area Measure:

発見的考察：　実軸上の点 $\mathrm{A}(r)$, $\mathrm{A}'(r + dr)$ とそれらを $d\theta$ だけ回転させた点 B, B' を考える．微小図形 $\mathrm{AA'B'B}$ の双曲的面積 ΔS を計算しよう：
$L(\overline{\mathrm{AA'}}) = 2\,\dfrac{dr}{1 - r^2}$ かつ $L\big((\mathrm{AB})^\frown\big) = \dfrac{2}{1 - r^2} \cdot r\,d\theta$ であるから

$$\Delta S \fallingdotseq L(\overline{\mathrm{AA'}}) \times L\big((\mathrm{AB})^\frown\big) = 4\,\frac{r\,dr d\theta}{(1 - r^2)^2} = 4\,\frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

　従って，以下 $d\sigma(z) := 4\,\dfrac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ $(z = x + iy)$ で定義される $\mathcal{D}$ 上の測度を考える.

定理 **2.2.** 任意の $f \in L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ と $g \in G$ に対して

$$\iint_{\mathcal{D}} f(g(z))\, d\sigma(z) = \int_{\mathcal{D}} f(z)\, d\sigma(z).$$

証明. $w=g(z)$, $z=x+iy$, $w=u+iv$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{D(u,v)}{D(x,y)} &= \det\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y\end{pmatrix} = u_x^2+v_x^2 \quad \text{(Cauchy-Riemann)} \\ &= |w_x|^2 = |g'(z)|^2 = \left(\frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^2 \quad (\S 1 \text{ の計算}).\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\iint_{\mathcal{D}} f(g(z))\,d\sigma(z) &= \iint_{\mathcal{D}} f(w)\frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} f(w)\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|\frac{dxdy}{(1-|w|^2)^2} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} f(w)\frac{dudv}{(1-|w|^2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{D}} f(w)\,d\sigma(w)\end{aligned}$$

となって証明が終わる. □

定義：$\mathcal{D}$ 内の Lebesgue 可測集合 E に対して,

$$\sigma(E) := \iint_E d\sigma(z)$$

とおいて, $\sigma(E)$ を E の双曲測度（双曲面積）という.

♠ 定理 2.2 を E の定義函数 χ_E に適用すると, $\sigma(g(E))=\sigma(E)$ が任意の $g\in G$ に対して成り立つ.

例 **2.3.** $D(z_0,R) := \{z\in\mathcal{D}\,;\, d(z,z_0)\leqq R\}$ とおく. このとき,

$$\sigma(D(z_0,R)) = 2\pi(\cosh(R)-1)$$

である. 実際適当な $g\in G$ で $D(z_0,R)$ が $D(0,R)$ に写され,

$$D(0,R) = \{z\in\mathbb{C}\,;\, |z|\leqq \tanh\tfrac{R}{2}\}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sigma(D(z_0,R)) = \sigma(C(0,R)) &= 8\pi\int_0^{\tanh\frac{R}{2}}\frac{r\,dr}{(1-r^2)^2} \\ &= 4\pi\int_0^{\tanh^2\frac{R}{2}}\frac{du}{(1-u)^2} = 4\pi\Big[\frac{1}{1-u}\Big]_0^{\tanh^2\frac{R}{2}} \\ &= 4\pi\Big[\frac{1}{1-\tanh^2\frac{R}{2}}-1\Big] = 4\pi\sinh^2\tfrac{R}{2} \\ &= 2\pi(\cosh R-1). \quad //\end{aligned}$$

定義：双曲三角形とは，同一測地線上にない相異なる３点 A, B, C と各々の２点を結ぶ測地線からなる図形のこと．

♠ 双曲三角形 ABC の各辺の双曲的長さを a, b, c, 角を α, β, γ とする．記号の付け方はユークリッド幾何のときに準じる．

定理 2.4. $\sigma(\Delta\mathrm{ABC}) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$．特に $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ である．

証明．　(1) $\delta \subset \mathcal{D}$ を測地線とし，$P \in \mathcal{D}$ は δ 上にない点とすると，P から δ へ一意に測地垂線が下ろせる．これは $g \in G$ で P を原点に持ってきて考えれば明らかであろう．
(2) A から辺 BC（の延長）へ測地垂線を下ろすことにより，ΔABC の双曲面積を２つの直角双曲三角形の双曲面積の和または差で求めることができる．従って，定理を直角双曲三角形のときに証明すればよい．このとき，$\alpha = \pi/2$ としてよい．G の元 g を適当にとって，C を原点に，辺 CA を正の実軸上にあるように，双曲面積を変えずに持ってくることができる．

辺 AB 上に点 $p(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$ $(r(\theta) > 0)$ をとると

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta\mathrm{ABC}) &= 4\iint_{\Delta\mathrm{ABC}} \frac{r\,dr d\theta}{(1-r^2)^2} = 4\int_0^{\gamma} d\theta \int_0^{r(\theta)} \frac{r}{(1-r^2)^2}\,dr \\ &= 2\int_0^{\gamma} d\theta \int_0^{r(\theta)^2} \frac{du}{(1-u)^2} = 2\int_0^{\gamma}\Big[\frac{1}{1-r(\theta)^2} - 1\Big]\,du.\end{aligned}$$

$t := d(0, p(\theta))$ とおくと，$r(\theta) = \tanh(t/2)$ であるから

$$\sigma(\Delta\mathrm{ABC}) = \int_0^{\gamma} (\cosh t - 1)\,d\theta = \int_0^{\gamma} \cosh t\,d\theta - \gamma. \tag{2.1}$$

ここで次の双曲三角法における定理が必要．

補題 2.5. 一般に双曲三角形 ΔABC において，次が成り立つ．

(1) 正弦定理： $\dfrac{\sinh a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sinh b}{\sin\beta} = \dfrac{\sinh c}{\sin\gamma}$.
(2) 余弦定理： $\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\,\sinh c\cos\alpha$
　　及び a, b, c と α, β, γ を cyclic に置き換えた式が成り立つ．

証明は，例えば，谷口・奥村著「双曲幾何学への招待」，または深谷著「双曲幾何」等を参照．

特に $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\sinh a = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}, \qquad \cosh a = \cosh b\cosh c. \tag{2.2}$$

第２の等式には「双曲ピタゴラスの定理」という名が付いている．
先の定理の証明中の双曲三角形 A$p(\theta)$C に適用すると

$$\sinh t = \frac{\sinh c(\theta)}{\sin\theta}, \qquad \cosh t = \cosh b\cosh c(\theta). \tag{2.3}$$

ただし $c(\theta) := d(\mathrm{A}, p(\theta))$.

演習：(2.3) から $c(\theta)$ を消去すると

$$\cosh t = \frac{\cosh b \cos\theta}{\sqrt{1-\cosh^2 b\,\sin^2\theta}}, \qquad \sinh t = \frac{\sinh b}{\sqrt{1-\cosh^2 b\,\sin^2\theta}}.$$

また $\theta=\gamma$ のときの第２式 $\sinh a = \dfrac{\sinh b}{\sqrt{1-\cosh^2 b\,\sin^2\gamma}}$ と上の (2.2) の第１の等式から

$$\cos\beta = \cosh b \sin\gamma. \tag{2.4}$$

実はこの最後の公式は第２余弦定理を使うと容易に出る．//

定理 2.4 の証明を続けよう．式 (2.1) と演習により

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta\mathrm{ABC}) &= \int_0^{\gamma} \frac{\cosh b\cos\theta}{\sqrt{1-\cosh^2 b\,\sin^2\theta}}\,d\theta - \gamma \\ &= \int_0^{\cosh b \sin\gamma} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \gamma \\ &= \mathrm{Arcsin}\,(\cosh b\sin\gamma) - \gamma \\ &\overset{(*)}{=} \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma = \pi - (\pi/2+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

等号 $\overset{(*)}{=}$ は (2.4) による． □

演習：一辺の双曲的長さが a の正双曲三角形の３個の角は等しくて，それを θ とおくとき

$$\cos\theta = \frac{\cosh a}{\cosh a + 1}.$$

§3. Horocycles and Iwasawa Decomposition

$\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\}$. 一次分数変換 $g(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ $(|\alpha|^2-|\beta|^2=1)$ を考える．このとき，$g(z)=z \iff z$ が次の方程式を満たすこと：

$$\overline{\beta}z^2 + (\overline{\alpha}-\alpha)z - \beta = 0. \tag{3.1}$$

- $\beta=0$ ならば，g は原点まわりの回転．特に 0 は固定点．
- $\beta\neq 0$ ならば，g の固定点は２次方程式 (3.1) の２根（相異 or 重）．ここで，２根の積 $=-\beta/\overline{\beta}$ で，この値は絶対値が１であることに注意．従って，２根とも単位円の内部（外部）ということはないし，１根が単位円周上にあればもう１根も単位円周上にある．ゆえに，次の３つの場合に分かれる：

Case 1：$\mathcal{D}$ に固定点が１つだけ．
Case 2：$\partial\mathcal{D}$ の相異なる２点 ω_1, ω_2 を固定点とするとき．
Case 3： $\omega\in\partial\mathcal{D}$ が２次方程式 (3.1) の重根になっているとき．

<u>Case 1：</u> $z_0\in\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ における g の唯一の固定点とする．このとき $g\in G_{z_0}$ であり，補題 2.1 (3) より G_{z_0} は K に共役な G の部分群で，g は z_0 を中心とする「非ユー

クリッドの回転」である．$\mathcal{D}$ における G_{z_0}-orbits は，z_0 を中心とする Lobachevsky circles（非ユークリッド円）である．

Case 2： 無限遠点 ω_1, ω_2 を結ぶ $\mathcal{D}$ の測地線を δ とする．$g(\delta) = \delta$ である．

$$T_\delta := \{g \in G\ ;\ g(\omega_j) = \omega_j \quad (j = 1, 2)\}$$

とおく．$A := \{a_t\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ を思い出して，次の演習問題に注意する．

演習： $g \in G$ のとき，

$$g \in A \iff g(1) = 1 \text{ and } g(-1) = -1 \iff g \text{ は実係数}$$

（$g(1) = 1 \iff \alpha + \beta \in \mathbb{R}$ に注意.）

さて，δ_0 で単位円の直径 $[-1, 1]$ を表すものとする．演習により，$a \in A$ ならば $a(\delta_0) = \delta_0$ であり，$T_{\delta_0} = A$ である．一次分数変換 $g_0 \in G$ をとって，$g_0(\delta) = \delta_0$ とすると，$T_\delta = g_0^{-1} A g_0$ となっている．

• $\mathcal{D}$ における A-orbits を調べよう．$z_0 \in \mathcal{D}$ をとる．

$$a_t(z_0) = \frac{z_0 + \tanh\frac{t}{2}}{(\tanh\frac{t}{2})z_0 + 1}$$

であるから，$\lim_{t\to\infty} a_t(z_0) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} a_t(z_0) = -1$ である．ゆえに適当な $t_0 \in \mathbb{R}$ をとれば $a_{t_0}(z_0) \in i\mathbb{R}$ となるから，これを iy_0 $(-1 < y_0 < 1)$ とすると，$A \cdot z_0 = A \cdot (iy_0)$ である．

演習： 軌道 $A \cdot (iy_0)$ は 3 点 $-1, iy_0, 1$ を通る円の $\mathcal{D}$ 内の弧である．

一方，d を双曲距離とすると

$$d(a_t(iy_0), a_t(0)) = d(iy_0, 0) = 2\,\mathrm{Arctanh}\,|y_0|.$$

これは，$a_t(iy_0)$ から δ_0 に下ろした測地垂線の足が $a_t(0) = \tanh(t/2)$ であることを示していて，$a_t(iy_0)$ と δ_0 の双曲距離が t に依らず一定であることも示している．つまり，$A \cdot z_0 = A \cdot (iy_0)$ は，δ_0 からの定双曲距離曲線である．

従って，$\mathcal{D}$ 内の T_δ 軌道はすべて δ からの定双曲距離曲線である．この意味で，T_δ に属する元のことを，δ を軸とする **hyperbolic translation** と呼ぶ.

注意：一つの測地線からの定双曲距離曲線は（一般に）測地線ではない.

Case 3： まず $\omega = 1$ のときを調べてみよう．1 が 2 次方程式 (3.1) の重根ということから

$$\begin{cases} \overline{\beta} + (\overline{\alpha} - \alpha) - \beta = 0, \\ 2\overline{\beta} + (\overline{\alpha} - \alpha) = 0. \end{cases}$$

下の式から上の式を引いて，$\overline{\beta} + \beta = 0$．従って $\beta \in i\mathbb{R}$ ゆえ，$b = -\frac{i}{2}\xi$ $(\xi \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，$\alpha - \overline{\alpha} = 2\overline{\beta} = i\xi$ となって，$\mathrm{Im}\, a = \frac{1}{2}\xi$．ここで $\alpha = a + \frac{i}{2}\xi$ とすると，$1 = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = a^2$ となるので $a = \pm 1$ である．

定義： n_ξ $(\xi \in \mathbb{R})$ を次の一次分数変換とする：$n_\xi(z) := \dfrac{\left(1 + \dfrac{i\xi}{2}\right)z - \dfrac{i\xi}{2}}{\dfrac{i\xi}{2}\,z + \left(1 - \dfrac{i\xi}{2}\right)}.$

容易に $n_{\xi+\xi'} = n_\xi \circ n_{\xi'}$ がわかるから，$N = \{n_\xi \,;\, \xi \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}$ に同型な G の可換部分群である．

命題 3.1. 任意の $t, \xi \in R$ に対して，$a_t \circ n_\xi \circ a_{-t} = n_{e^t \xi}$ が成り立つ．すなわち，A は N を正規化し $NA = AN$ は G の部分群となる．

証明．　行列の計算を実行せよ：

$$\begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2} \\ \sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\xi}{2} & -\frac{i\xi}{2} \\ \frac{i\xi}{2} & 1 - \frac{i\xi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & -\sinh\frac{t}{2} \\ -\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix}. \quad \square$$

さて，$n_\xi(1) = 1$ $(\forall \xi \in \mathbb{R})$ ゆえ，N は 1 を無限遠点とする平行な測地線の族（点 1 で単位円に内接する円の族）を安定にする．従ってまた，これらに直交する円の族も N で安定である．

定義： $\omega \in \partial\mathcal{D}$ とする．ω から出る **horocycle** とは，$\mathcal{D}$ 内の円で，$\partial\mathcal{D}$ に ω で内接するものをいう．

♠ 今定義した言葉を使えば，N は 1 から出る horocycles の族を安定にする．

命題 3.2. $\mathcal{D}$ における N*-orbits* は 1 から出る *horocycles* であり，逆も言える．

証明．　(1) まず原点を通る軌道 $N \cdot 0$ を調べよう．$n_{2\xi}(0) = -\dfrac{i\xi}{1 - i\xi}$ であり，$n_{2\xi}(0) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1 + i\xi}{1 - i\xi}$ となるから，

$$\left| n_{2\xi}(0) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

よって，$N \cdot 0$ は 1 から出る horocycle で原点を通るもの（Ω_0 とする）である．$\operatorname{Im} n_{2\xi}(0) = -\dfrac{\xi}{1 + \xi^2}$ ゆえ，$\xi = -\infty$ より出発するとき，$n_{2\xi}(0)$ は 1 から出て，反時計回りに回る．

(2) $-1 < x < 1$ とし，$N \cdot x$ を調べよう．$x = \tanh\frac{t}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと $x = a_t(0)$ である．

$$n_\xi \cdot x = n_\xi \cdot a_t(0) = a_t n_{e^{-t}\xi}(0)$$

であるから，$N \cdot x = a_t(\Omega_0)$ である．ここで一次分数変換 a_t の等角性により，右辺の $a_t(\Omega_0)$ は実軸上の区間 $[x, 1]$ を直径とする円であるから，それは 1 から出る horocycle で x を通るものである．

(3) 1 から出る任意の horocycle Ω は必ず実軸を切り，その切片を $x = \tanh\frac{t}{2}$ とすると，(2) より，$\Omega = a_t(\Omega_0) = N \cdot x$ である．ゆえに Ω は一つの N 軌道である．

(4) 逆に $z \in \mathcal{D}$ の N 軌道 $N \cdot z$ を考える．このとき，$\xi_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$x_0 := n_{\xi_0}(z) \in \mathbb{R}$ となる．実際 $z = x + iy$ とすると $\xi_0 = \dfrac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$ である．このとき (2) より，$N \cdot z = N \cdot x_0$ は 1 から出る horocycle になっている．　$\square$

系 3.3. *$e^{i\theta}\in\partial\mathcal{D}$ から出る horocycles は，$N_\theta=k_\theta N k_\theta^{-1}$ とおくとき，N_θ-orbits と一致する．*

定理 3.4 (岩澤分解)**.** *$G=KAN=NAK$ である．すなわち，任意の $g\in G$ は $g=ka_tn_\xi$ $(k\in K,\, t\in\mathbb{R},\, \xi\in\mathbb{R})$ と一意的に表される．*

証明. $g\in G$ が与えられたとする．$g(1)=e^{i\theta}$ とし，$h:=k_\theta^{-1}g$ とおく．このとき，$h(1)=1$ である．$h^{-1}(-1)=e^{i\varphi}$ とする．$e^{i\varphi}\neq 1$ に注意．ここで $\xi\in\mathbb{R}$ のとき，

$$n_\xi^{-1}(-1)=n_{-\xi}(-1)=-\frac{1+i\xi}{1-i\xi}\neq 1$$

であるから，$n_\xi^{-1}(-1)=e^{i\varphi}$ となる $\xi\in\mathbb{R}$ が存在する．そうすると，$hn_\xi^{-1}(-1)=h(e^{i\varphi})=-1$ である．$hn_\xi^{-1}(1)=1$ でもあるから，先の演習より，$hn_\xi^{-1}\in A$．すなわち，$t\in\mathbb{R}$ をとって，$hn_\xi^{-1}=a_t$ とできる．よって $h=a_tn_\xi$ であり，$g=k_\theta a_tn_\xi$ となっている．

一意性について： $k_1a_1n_1=k_2a_2n_2$ とすると，$k_2^{-1}k_1=a_2n_2n_1^{-1}a_1^{-1}$．ここで，左辺は原点の回りの回転であり，右辺は 1 を固定する．ゆえに両辺とも恒等写像．よって，$k_1=k_2$ かつ $a_1n_1=a_2n_2$．後者より，$a_2^{-1}a_1=n_2n_1^{-1}$. 左辺は -1 も固定するから，$n_2n_1^{-1}$ は恒等写像．ゆえに $n_1=n_2$ となり，$a_1=a_2$ も出る． □

定義：微分作用素 $\mathcal{L}:=(1-|z|^2)^2\dfrac{\partial^2}{\partial\overline{z}\,\partial z}$ を $\mathcal{D}$ の **Laplace-Beltrami** 作用素という．

♠ $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)$, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)$ より

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4}\,(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\,(1-r^2)^2\,\Delta.$$

ただし，$r^2=x^2+y^2$ で，Δ は $\mathbb{R}^2$ の通常の Laplacian を表す．

定理 3.5. *$\mathcal{L}$ は G 不変である．すなわち，任意の $f\in C^2(\mathcal{D})$ に対して，$\mathcal{L}(f_g)=(\mathcal{L}f)_g$ $(\forall g\in G)$ が成り立つ．ただし，$f_g(z):=f(g^{-1}(z))$.*

証明. Cartan 分解 $G=KA_+K$ を思い出そう．K の元は原点の回りの回転であり，Δ が回転と可換なこと，$1-r^2$ が回転で不変なことより，定理を $g\in A$ のときに示せば十分．従って，

$$g^{-1}(z)=\frac{az+b}{bz+a}\quad (a,b\in\mathbb{R},\ a^2-b^2=1)$$

とする． $\mathcal{D}$ 上の C^2 級函数 $f(x,y)$ に対して，$F(z,\overline{z}):=f\Big(\dfrac{z+\overline{z}}{2},\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\Big)$ とおくと

$$F_g(z,\overline{z})=F(g^{-1}(z),g^{-1}(\overline{z}))=F\Big(\frac{az+b}{bz+a},\frac{a\overline{z}+b}{b\overline{z}+a}\Big).$$

$(g^{-1})'(z)=\dfrac{1}{(bz+a)^2}$ であるから

$$\frac{\partial F_g}{\partial z}(z,\overline{z})=\frac{1}{(bz+a)^2}\,\frac{\partial F}{\partial z}\Big(\frac{az+b}{bz+a},\frac{a\overline{z}+b}{b\overline{z}+a}\Big).$$

従ってまた,

$$\frac{\partial^2 F_g}{\partial\overline{z}\,\partial z}(z,\overline{z}) = |(g^{-1})'(z)|^2 \frac{\partial^2 F}{\partial\overline{z}\,\partial z}\Big(\frac{az+b}{bz+a}, \frac{a\overline{z}+b}{b\overline{z}+a}\Big)$$
$$= \left(\frac{1-|g^{-1}(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial\overline{z}\,\partial z}\Big(\frac{az+b}{bz+a}, \frac{a\overline{z}+b}{b\overline{z}+a}\Big).$$

ゆえに $\mathcal{L}(F_g)(z,\overline{z}) = (\mathcal{L}F)_g(z,\overline{z})$ である. □

命題 3.6. $\mathcal{L}$ の Cartan 座標表示:
$z = e^{i\varphi}\tanh(t/2)$ $(0 < \varphi \leqq 2\pi,\ t \in \mathbb{R})$ という座標系において

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \coth t\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sinh^2 t}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

証明. $z = x + iy$ として, いくつかの式を書き下すにとどめる(詳細は演習).
$t = 2\,\mathrm{Arctanh}\sqrt{x^2+y^2}$ より,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2x}{(1-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{2y^2(1-x^2-y^2)+4x^2(x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2\,(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

これの x, y を入れ替えたものが $\partial t/\partial y$ 及び $\partial^2 t/\partial y^2$ である. 一方 $\varphi = \arctan(y/x)$ の x, y に関する偏微分は微積分での演習の通りで

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \quad \square$$

命題 3.7. $\mathcal{L}$ の horocycle 座標表示:
$z = n_\xi a_\tau \cdot 0$ $(\xi \in \mathbb{R},\ \tau \in \mathbb{R})$ という座標系で

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\tau} + e^{2\tau}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}.$$

証明. $z = \dfrac{e^\tau - 1 - i\xi}{e^\tau + 1 - i\xi}$ であるから

$$\frac{\partial z}{\partial\tau} = \frac{2e^\tau}{(e^\tau+1-i\xi)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\xi} = -\frac{2i}{(e^\tau+1-i\xi)^2}.$$

これの複素共役をとると $\partial\overline{z}/\partial\tau$ および $\partial\overline{z}/\partial\xi$ を得る. ゆえに

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau} \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2e^\tau}{(e^\tau+1-i\xi)^2} & \dfrac{2e^\tau}{(e^\tau+1+i\xi)^2} \\ -\dfrac{2i}{(e^\tau+1-i\xi)^2} & \dfrac{2e^\tau}{(e^\tau+1-i\xi)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial\overline{z}} \end{pmatrix}.$$

これを逆に解くことにより

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{4}\, e^{-\tau}(e^{\tau}+1-i\xi)^2\, \dfrac{\partial}{\partial \tau} + \dfrac{i}{4}\,(e^{\tau}+1-i\xi)^2\, \dfrac{\partial}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{4}\, e^{-\tau}(e^{\tau}+1+i\xi)^2\, \dfrac{\partial}{\partial \tau} - \dfrac{i}{4}\,(e^{\tau}+1+i\xi)^2\, \dfrac{\partial}{\partial \xi}. \end{cases}$$

従って（計算を続けることにより）

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\,\partial z} = \frac{1}{16}\, e^{-2\tau}|e^{\tau}+1+i\xi|^4 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} + e^{2\tau}\, \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right].$$

ここで，$g = n_{\xi} a_{\tau}$ とおくとき

$$\frac{1}{16}\, e^{-2\tau}|e^{\tau}+1+i\xi|^4 = \left|\cosh\frac{\tau}{2} + \frac{i}{2}\,\xi e^{-\tau/2}\right|^4 = \frac{1}{|g'(0)|^2} = \left(\frac{1}{1-|g(0)|^2}\right)^2.$$

$g(0) = z$ であるから証明が終わる． □

§4. Poisson 核の群論的考察

$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$，$G := \left\{g\,;\ g(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}},\ |\alpha|^2-|\beta|^2 = 1\right\}$.

以下では，$g(z)$ を $g\cdot z$ と書くこともある．

$\mathcal{L} := (1-|z|^2)^2\, \dfrac{\partial^2}{\partial \overline{z}\,\partial z} = \dfrac{1}{4}\,(1-x^2-y^2)^2\Delta$： $\mathcal{D}$ の Laplace-Beltrami 作用素．

♠ $f \in C^2(\mathcal{D})$ が調和 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Delta f = 0 \iff \mathcal{L}f = 0$（偶然にも）．

定義：（$\mathcal{D}$ の **Poisson** 核）

$$P_{\mathcal{D}}(z,\zeta) := \frac{1-|z|^2}{\bigl|\zeta - z\bigr|^2} \qquad (z \in \mathcal{D},\ \zeta \in \partial\mathcal{D}).$$

簡単な計算で次の式を得る：

$$P_{\mathcal{D}}(re^{i\varphi}, e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} \qquad (0 \leqq r < 1,\ \varphi,\theta \in \mathbb{R}).$$

♠ $P_{\mathcal{D}}(z,\zeta) = \mathrm{Re}\,\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}$ であり，$\zeta \in \partial\mathcal{D}$ を固定して z の函数と見るとき，$\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}$ は $\mathcal{D}$ で正則であるから，Poisson 核は $\mathcal{D}$ で調和である．従って，$f \in L^1(\partial\mathcal{D})$ に対して

$$u(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta \qquad (z \in \mathcal{D})$$

は $\mathcal{D}$ で調和である（積分記号下の微分：詳細は演習）．

さて G は $\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ にも作用している：$g\cdot e^{i\psi} = \dfrac{\alpha e^{i\psi}+\beta}{\overline{\beta}e^{i\psi}+\overline{\alpha}} =: e^{i\theta}$.

このとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g\cdot e^{i\psi})\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left|\frac{d\psi}{d\theta}\right| d\theta.$$

ここで $e^{i\psi} = g^{-1}\cdot e^{i\theta} = \dfrac{\overline{\alpha}e^{i\theta}-\beta}{-\overline{\beta}e^{i\theta}+\alpha}$ より，

$$ie^{i\psi}\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{d(g^{-1}\cdot e^{i\theta})}{d\theta} = i\,\frac{e^{i\theta}}{(-\overline{\beta}e^{i\theta}+\alpha)^2}. \tag{4.1}$$

ゆえに

$$\left|\frac{d\psi}{d\theta}\right| = \frac{1}{|-\overline{\beta}e^{i\theta}+\alpha|^2}$$

となる．さらに $g\cdot 0 = \dfrac{\beta}{\alpha}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{|-\overline{\beta}e^{i\theta}+\alpha|^2} &= \frac{1}{|\alpha|^2}\left|\frac{\overline{\beta}}{\alpha}e^{i\theta}-1\right|^{-2} = \Big(1-\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\Big)\left|\frac{\overline{\beta}}{\alpha}-e^{-i\theta}\right|^{-2}\\ &= \frac{1-|g\cdot 0|^2}{|e^{i\theta}-g\cdot 0|^2} = P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0, e^{i\theta}).\end{aligned}$$

以上より，次の命題を得る：

命題 4.1. 任意の $g\in G$ に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g\cdot e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0, e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

以下，$P(g,e^{i\theta}) := P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\, e^{i\theta})$ によって $P_{\mathcal{D}}$ を $G\times\partial\mathcal{D}$ に拡張する．

$$K = \{k_\theta\ ;\ k_\theta(z) = e^{i\theta}z,\ \theta\in\mathbb{R}\}$$

は G における 0 の固定部分群であるから，$P(gk,e^{i\theta}) = P(g,e^{i\theta})$ $(\forall k\in K)$ となる．式 (4.1) より $P(g,e^{i\theta}) = \left|\dfrac{d(g^{-1}\cdot e^{i\theta})}{d\theta}\right|$ であるから

$$P(g_1g_2,e^{i\theta}) = \left|\frac{d(g_2^{-1}g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})}{d(g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})}\right|\cdot\left|\frac{d(g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})}{d\theta}\right| = P(g_2,\, g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})P(g_1,e^{i\theta}).$$

任意の $\mu\in\mathbb{C}$ に対して，$P^\mu(g,e^{i\theta}) := P(g,e^{i\theta})^\mu$ とおくとき

$$P^\mu(g_1g_2,\gamma) = P^\mu(g_2,\, g_1^{-1}\cdot\gamma)P^\mu(g_1,\gamma)\qquad (g_1,g_2\in G,\ \gamma\in\partial\mathcal{D}).$$

ここで，$P^\mu(k,\gamma) = P_{\mathcal{D}}(0,\gamma) = 1$ $(\forall k\in K)$ に注意．

定理 4.2. $G\times\partial\mathcal{D}$ 上の連続函数 s が次の (1), (2) をみたすとする：
(1) $s(k,\gamma) = 1 \quad (k\in K, \gamma\in\partial\mathcal{D})$，
(2) $s(g_1g_2,\gamma) = s(g_2,\, g_1^{-1}\cdot\gamma)s(g_1,\gamma) \quad (g_1,g_2\in G,\ \gamma\in\partial\mathcal{D})$．
このとき，$\mu\in\mathbb{C}$ が存在して，$s = P^\mu$ となる．

証明を始める前に次の事実を注意しておこう：

♠ $P(a_t,1) = e^t$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ かつ $P(n_\xi,1) = 1$ $(\forall\xi\in\mathbb{R})$．
実際，$g(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ のとき，$P(g,1) = \dfrac{1-|g(0)|^2}{|1-g(0)|^2} = \dfrac{1}{|\overline{\alpha}-\beta|^2}$ より従う．

証明. (a) $k\in K$ のとき，$s(gk,\gamma) \overset{(2)}{=} s(k,\, g^{-1}\cdot\gamma)s(g,\gamma) \overset{(1)}{=} s(g,\gamma)$．

(b) 前節で示したように，$B := NA$ は G の部分群で，任意の $b \in B$ に対して $b \cdot 1 = 1$ であるから，

$$s(b_1 b_2, 1) = s(b_2,\, b_1^{-1} \cdot 1) s(b_1, 1) = s(b_1, 1) s(b_2, 1) \qquad (b_1, b_2 \in B).$$

(1) より $s(I, 1) = 1 \neq 0$ であるから，$B \ni b \mapsto s(b, 1) \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は群準同型（1 次元表現）である．特に任意の $\mu \in \mathbb{C}$ に対して，$b \mapsto P^\mu(b, 1)$ も B の 1 次元表現になっている．

(c) $a_t n_\xi a_{-t} = n_{e^t \xi}$ より

$$s(n_{e^t \xi}, 1) = s(a_t, 1) s(n_\xi, 1) s(a_{-t}, 1) = s(n_\xi, 1).$$

ゆえに $\xi \to s(n_\xi, 1)$ は $\xi < 0$ で定数あり，$\xi > 0$ でも定数．そして $\xi = 0$ で 1．連続性から，$s(n_\xi, 1) = 1 = P^\mu(n_\xi, 1)$ $(\forall \mu \in \mathbb{C})$.

(d) $s(a_{t+t'}, 1) = s(a_t, 1) s(a_{t'}, 1)$ と連続性から，$\mu \in \mathbb{C}$ が存在して，$s(a_t, 1) = e^{\mu t} = P^\mu(a_t, 1)$ となる．従って，$a \in A,\ n \in N$ のとき，

$$s(an, 1) = s(a, 1) s(n, 1) = P^\mu(a, 1) P^\mu(n, 1) = P^\mu(an, 1)$$

となるから，$s(b, 1) = P^\mu(b, 1)$ $(\forall b \in B)$ である．

(e) 任意の $g \in G$ を $g = bk$ $(b \in B,\ k \in K)$ と岩沢分解すると，(a), (d) より

$$s(g, 1) = s(bk, 1) = s(b, 1) = P^\mu(b, 1) = P^\mu(bk, 1) = P^\mu(g, 1).$$

(f) 一般に $\gamma \in \partial \mathcal{D}$ に対して，$k_0 \cdot 1 = \gamma$ となるように $k_0 \in K$ を選べば

$$\begin{aligned} s(g, \gamma) &= s(g,\, k_0 \cdot 1) = s(k_0^{-1} g, 1) \qquad \text{(by (1), (2))} \\ &= P^\mu(k_0^{-1} g, 1) = P^\mu(g,\, k_0 \cdot 1) = P^\mu(g, \gamma). \end{aligned}$$

以上で証明が終わる． □

さて，$g \in G$ を岩沢分解して $g = k a_\tau n$ $(k \in K,\ a_\tau \in A,\ n \in N)$ とするとき，$\tau \in \mathbb{R}$ は g によって一意に定まるのでこれを $\tau(g)$ と表す．

命題 4.3. $g \in G,\ \theta \in \mathbb{R}$ のとき，$P(g, e^{i\theta}) = e^{-\tau(g^{-1} k_\theta)}$.

証明． $\tau = \tau(g^{-1} k_\theta)$ とおくと，$g^{-1} k_\theta \in K a_\tau N$ であるから，適当な $n \in N,\ k \in K$ に対して，$k_\theta^{-1} g = n a_{-\tau} k$ となっている．ゆえに

$$\begin{aligned} P(g, e^{i\theta}) &= P(g,\, k_\theta \cdot 1) = P(k_\theta^{-1} g, 1) = P(n a_{-\tau} k, 1) \\ &= P(n a_{-\tau}, 1) = P(a_{-\tau}, 1) = e^{-\tau} \end{aligned}$$

となって，証明終わり． □

<u>演習：</u> $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\tau}{2} & \sinh \frac{\tau}{2} \\ \sinh \frac{\tau}{2} & \cosh \frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2}\xi & -\frac{i}{2}\xi \\ \frac{i}{2}\xi & 1 - \frac{i}{2}\xi \end{pmatrix}$$

より，$\alpha = e^{i\theta/2}\bigl(\cosh \frac{\tau}{2} + \frac{i}{2}\xi e^{\tau/2}\bigr)$, $\beta = e^{i\theta/2}\bigl(\sinh \frac{\tau}{2} - \frac{i}{2}\xi e^{\tau/2}\bigr)$. 従って

$$e^\tau = |\alpha + \beta|^2, \quad \xi = \operatorname{Im} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad e^{i\theta} = \frac{\alpha + \beta}{\overline{\alpha} + \overline{\beta}}.$$

この公式を用いて，実際に $g^{-1}k_\theta$ を岩沢分解して，$e^{\tau(g^{-1}k_\theta)} = |\overline{\beta}e^{i\theta} - \alpha|^2$ を示せ．

<u>演習：</u> $P(n_\xi a_\tau, e^{i\theta}) = \left\{ \dfrac{1-\cos\theta}{2} e^\tau + \left[\dfrac{1+\cos\theta}{2} + \xi \sin\theta + \dfrac{\xi^2}{2} \cdot \dfrac{1-\cos\theta}{2} \right] e^{-\tau} \right\}^{-1}.$

定理 4.4. $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ を固定する．このとき $P_{\mathcal{D}}(z,\zeta)$ は ζ から出る各 horocycle Ω 上で一定値である．実際，$P_{\mathcal{D}}(z,\zeta) = e^{\pm d(0,\Omega)}$ $(z \in \Omega)$ で，複号は 0 が Ω の外のとき $+$，内のとき $-$ をとる．

証明． $P_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta}) = P_{\mathcal{D}}(k_\theta^{-1} z, 1)$ より，$e^{i\theta} = 1$ のときに考察すればよい．1 から出る horocycle を Ω とし，$\mathcal{D}$ 内で $\tanh\frac{t}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$ において実軸を切るとする．このとき

$$\Omega = N \cdot \tanh\frac{t}{2} = N \cdot (a_t \cdot 0).$$

ゆえに $z \in \Omega$ のとき，$z = na_t \cdot 0$ $(n \in N)$ となるから

$$P_{\mathcal{D}}(z,1) = P(na_t, 1) = e^t.$$

ここで，$d(0,\Omega) = |t|$ ゆえ証明終わり． □

以下，$P_{\mathcal{D}}^\mu(z,\gamma) = P_{\mathcal{D}}(z,\gamma)^\mu$ とおく．

定理 4.5. $\mathcal{L}P_{\mathcal{D}}^\mu(\cdot,\gamma) = \mu(\mu-1)P_{\mathcal{D}}^\mu(\cdot,\gamma)$ $(\forall\gamma \in \partial\mathcal{D})$．特に $P_{\mathcal{D}}(\cdot,\gamma)$ は調和函数（既知ではあるが）．

証明． Horocycle 座標 $z = n_\xi a_\tau \cdot 0$ での Laplace-Beltrami 作用素の表示を思い出そう：

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\tau} + e^{2\tau}\frac{\partial^2}{\partial\xi}.$$

$P_{\mathcal{D}}^\mu(n_\xi a_\tau \cdot 0,\, 1) = e^{\mu\tau}$ ゆえ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}P_{\mathcal{D}}^\mu(n_\xi a_\tau \cdot 0,\, 1) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\tau} + e^{2\tau}\frac{\partial^2}{\partial\xi} \right) e^{\mu\tau} = \mu(\mu-1)e^{\mu\tau} \\ &= \mu(\mu-1)P_{\mathcal{D}}^\mu(n_\xi a_\tau \cdot 0,\, 1). \end{aligned}$$

一般の $\gamma \in \partial\mathcal{D}$ のときは，$\gamma = k \cdot 1$ となる $k \in K$ をとると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}P_{\mathcal{D}}^\mu(z,\gamma) &= \mathcal{L}P_{\mathcal{D}}^\mu(z,\, k\cdot 1) = \mathcal{L}((P_{\mathcal{D}}^\mu)_k)(z) = (\mathcal{L}P_{\mathcal{D}}^\mu)_k(z) \\ &= \mu(\mu-1)P_{\mathcal{D}}^\mu(k^{-1}z, 1) = \mu(\mu-1)P_{\mathcal{D}}^\mu(z,\gamma) \end{aligned}$$

となって証明終わり． □

<u>演習：</u> $F \in C^2(\mathcal{D})$ は実数値函数で，$\mathcal{L}(F) = 0$ かつ $\mathcal{L}(F^2) = 2F^2$ をみたすとする．また $F(0) = 1$ であるとする．このとき，$\theta \in \mathbb{R}$ が存在して，$F = P_{\mathcal{D}}(\cdot, e^{i\theta})$ となることを示せ．

<u>Hint:</u> 以下原点の近傍で考える：

(1) $\mathcal{L}(F^\mu) = \mu(\mu-1)F^\mu$ $(\forall\mu \in \mathbb{Z})$.

(2) $H := F^{-1}$ を考えると $\mathcal{L}(H) = 2H$ かつ $\mathcal{L}(H^2) = 6H^2$ であって，

$$\left(\frac{\partial H}{\partial\tau}\right)^2 + e^{2\tau}\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)^2 = H^2.$$

(3) $\dfrac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} = H$ を導け．

(4) $H = A(\xi)e^{\tau} + B(\xi)e^{-\tau}$ の係数を決めよ．

出典：M. Chipot, P. Eymard and T. Tahani, Sur les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dont le carré est fonction propre, Sympos. Math., **29** (1987), 111–129, Academic Press, New York-London.

§5. Poisson 核のべきの Fourier 級数展開

Gauss の超幾何微分方程式：　$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$

$$z(1-z)y'' + \bigl(\gamma - (\alpha+\beta+1)z\bigr)y' - \alpha\beta y = 0 \qquad (\,' = d/dz).$$

$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ のとき，超幾何微分方程式の解 $y = y(z)$ で，単位円板 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ において正則かつ $y(0) = 1$ となるものが一意的に存在する．

概略：　$y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ $(a_0 = 1)$ より出発して次の漸化式を得る：

$$(j+\gamma)(j+1)a_{j+1} = (j+\alpha)(j+\beta)a_j \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

$\gamma \neq 0, -1, \ldots$ より各 a_j が定まって

$$a_j = \frac{(j+\alpha-1)\cdots\alpha\cdot(j+\beta-1)\cdots\beta}{(j+\gamma-1)\cdots\gamma\cdot j!}.$$

特殊函数論ではよく次の記法が使われる（**Pochhammer** の記号）：

$$(\alpha)_j := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1) = \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

従って，$a_j = \dfrac{(\alpha)_j}{(\gamma)_j}\dfrac{(\beta)_j}{j!}$ となる．ここで，$\dfrac{a_{j+1}}{a_j} = \dfrac{(j+\gamma)(j+1)}{(j+\alpha)(j+\beta)} \to 1$ $(j \to \infty)$ となるから，べき級数 $\sum a_j z^j$ の収束半径は 1 である． □

定義：　上にいう一意解を $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ （あるいは ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$）で表す：

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j}{(\gamma)_j}\frac{(\beta)_j}{j!} z^j \quad (|z| < 1) \quad \text{（\textbf{Gauss} の超幾何函数）}.$$

命題 5.1. $\mu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathcal{D}$ を固定する．このとき，$P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta})$ の Fourier 級数展開を

$$P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_\mu(z; n) e^{in\theta}$$

とすると，Fourier 係数 $Z_\mu(z; n) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta$ は次式のようになる：

$$Z_\mu(re^{i\varphi}; n) = \frac{(\mu)_{|n|}}{|n|!}(1-r^2)^{\mu}\, r^{|n|} e^{-in\varphi} F(\mu, \mu+|n|; |n|+1; r^2).$$

証明. 定義から

$$Z_\mu(re^{i\varphi};n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^\mu_{\mathcal{D}}(re^{i\varphi}, e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{(1-r^2)^\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^\mu}\,d\theta.$$

積分変数 θ を $\theta+\varphi$ と変換して，$Z_\mu(re^{i\varphi};n) = e^{-in\varphi}Z_\mu(r;|n|)$ を得る．ゆえに $\varphi=0$, $n \geqq 0$ として計算してよい．ここで

$$(1+r^2-2r\cos\theta)^{-\mu} = (1-re^{i\theta})^{-\mu}(1-re^{-i\theta})^{-\mu}$$
$$= \sum_{p,q=0}^{\infty}\binom{-\mu}{p}\binom{-\mu}{q}(-r)^{p+q}\,e^{i(p-q)\theta}$$

であり，また

$$\binom{-\mu}{p} = \frac{(-\mu)(-\mu-1)\cdots(-\mu-p+1)}{p!} = (-1)^p\,\frac{(\mu)_p}{p!}$$

であるから，$e^{-in\theta}$ をかけて積分することにより

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{[1+r^2-2r\cos\theta]^\mu}\,d\theta = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(\mu)_{q+n}}{(q+n)!}\,\frac{(\mu)_q}{q!}\,r^{n+2q}.$$

明らかに，$(\mu)_{q+n} = (\mu)_n(\mu+n)_q$ かつ $(q+n)! = n!(n+1)_q$ ゆえ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{[1+r^2-2r\cos\theta]^\mu}\,d\theta = \frac{(\mu)_n}{n!}\,r^n\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(\mu)_q}{(n+1)_q}\,\frac{(\mu+n)_q}{q!}\,r^{2k}$$
$$= \frac{(\mu)_n}{n!}\,r^nF(\mu,\mu+n;n+1;r^2)$$

となって証明が終わる． □

命題 5.2. $\mu \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ を固定するとき $f \in C^2(\mathcal{D})$ に関する次の (1), (2) は同値：

(1) $\begin{cases} \text{(a) } f(e^{i\varphi}z) = e^{-in\varphi}f(z) \quad (z \in \mathcal{D}, \varphi \in \mathbb{R}), \\ \text{(b) } f_0 := f|_{\mathbb{R}\cap\mathcal{D}} \text{ は } x=0 \text{ で解析的（} x=0 \text{ でべき級数展開可），} \\ \text{(c) } \mathcal{L}f = \mu(\mu-1)f, \end{cases}$

(2) $f(z) = CZ_\mu(z;n)$．ただし C は定数.

証明. $Z_\mu(z;n)$ が (1) の (a), (b) をみたすことは明らか．また (c) は定義式から従う（積分記号下の微分）：

$$\mathcal{L}Z_\mu(z;n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{L}P^\mu_{\mathcal{D}}(z,e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

逆に (1) を仮定しよう．$f(re^{i\varphi}) = e^{-in\varphi}f_0(r)$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(re^{i\varphi}) = e^{-in\varphi}f_0''(r), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}(re^{i\varphi}) = -n^2e^{-in\varphi}f_0(r).$$

$\mathcal{L} = \dfrac{1}{4}\,(1-r^2)^2\Delta = \dfrac{1}{4}\,(1-r^2)^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ であるから

$$\mathcal{L}f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{4}\,(1-r^2)^2\left[f_0''(r) + \frac{1}{r}\,f_0'(r) - \frac{n^2}{r^2}\,f_0(r)\right]e^{-in\varphi}.$$

従って (c) より，

$$r^2 f_0''(r) + r f_0'(r) - n^2 f_0(r) = \lambda \cdot \frac{r^2}{(1-r^2)^2} f_0(r) \qquad (\lambda := 4\mu(\mu-1)).$$

(b) より $f_0(r) = \sum_j a_j r^j$ とおいて微分方程式に代入する：簡単に

$$\frac{1}{(1-r^2)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)r^{2j}, \quad \frac{r^2}{(1-r^2)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j r^{2j}$$

がわかるから，$\dfrac{r^2}{(1-r^2)^2} f_0(r) = \Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} j r^{2j}\Big)\Big(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i r^i\Big)$ の

r^{2k} $(k \geqq 1)$ の係数は　　$ka_0 + (k-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_{2k-2}$,

r^{2k+1} $(k \geqq 1)$ の係数は　　$ka_1 + (k-1)a_3 + \cdots + 1 \cdot a_{2k-1}$.

一方，$r^2 f_0''(r) + r f_0'(r) - n^2 f_0(r) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (j^2 - n^2) a_j r^j$ ゆえ

$$-n^2 a_0 = 0, \quad (1-n^2)a_1 = 0, \quad (4-n^2)a_2 = \lambda a_0, \quad (9-n^2)a_3 = \lambda a_1,$$
$$\big((2k)^2 - n^2\big)a_{2k} = \lambda \cdot \big(ka_0 + (k-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_{2k-2}\big),$$
$$\big((2k+1)^2 - n^2\big)a_{2k+1} = \lambda \cdot \big(ka_1 + (k-1)a_3 + \cdots + 1 \cdot a_{2k-1}\big).$$

(i) $n = 2m$ のとき，$a_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, \dots)$ かつ $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2(m-1)} = 0$. そして a_{2m} を与えると，a_{2m+2} 以降の偶数項が $\alpha \cdot a_{2m}$ の形で決まる．
(ii) $n = 2m+1$ のとき，$a_{2k} = 0$ $(k = 0, 1, \dots)$ かつ $a_1 = \cdots = a_{2m-1} = 0$. そして a_{2m+1} を与えると，a_{2m+3} 以降の奇数項が $\alpha \cdot a_{2m+1}$ の形で定まる． □

注意：(1) では (b) は不要：解析的係数楕円型微分方程式の解の解析性という一般的な定理を用いる．今後はこの事実は丸呑みしよう．

定義： $\mathcal{D}$ 上の函数 f が **radial** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(e^{i\varphi}z) = f(z)$ $(\varphi \in \mathbb{R},\, z \in \mathcal{D})$.

定義： $\Phi_\mu(z) := Z_\mu(z; 0)$ を index μ の球函数という．

♠ 上で述べたことから

$$\Phi_\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathcal{D}}^{\mu}(z, e^{i\theta})\,d\theta = (1-|z|^2)^\mu F(\mu, \mu; 1; |z|^2).$$

♠ Φ_μ は固有値 $\mu(\mu-1)$ に対応する $\mathcal{L}$ の radial な固有函数で，原点で値 1 をとる一意なものである．

命題 5.3. $\Phi_\mu = \Phi_{1-\mu}$.

証明.　固有値 $\mu(\mu-1)$ は $\mu \mapsto 1-\mu$ で不変． □

注意：命題 5.3 は超幾何函数の公式

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)$$

に対応するものである．

定理 5.4. $\mathcal{D}$ 上の函数 Φ について次は同値：
(1) $\Phi\neq 0$, $\Phi\in C^2(\mathcal{D})$ で

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(g_1k_\psi g_2\cdot 0)\,d\psi=\Phi(g_1\cdot 0)\Phi(g_2\cdot 0)\qquad (g_1,g_2\in G),$$

(2) $\mu\in\mathbb{C}$ が存在して，$\Phi=\Phi_\mu$ となる．

証明. (2) $\Longrightarrow$ (1)：Φ_μ の定義により

$$I:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(g_1k_\psi g_2\cdot 0)\,d\psi=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}P^\mu(g_1k_\psi g_2,e^{i\theta})\,d\theta d\psi.$$

ここで Poisson 核がみたす等式より

$$\begin{aligned}P^\mu(g_1k_\psi g_2,e^{i\theta})&=P^\mu(g_2,\,k_{-\psi}g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})P^\mu(g_1k_\psi,e^{i\theta})\\&=P^\mu(g_2,\,k_{-\psi}g_1^{-1}\cdot e^{i\theta})P^\mu(g_1,e^{i\theta}).\end{aligned}$$

従って，$g_1^{-1}\cdot e^{i\theta}=e^{i\psi_0}$ とおくと

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}P^\mu(g_1,e^{i\theta})\,d\theta\int_0^{2\pi}P^\mu(g_2,e^{-i(\psi-\psi_0)})\,d\psi\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}P^\mu(g_1,e^{i\theta})\,d\theta\int_0^{2\pi}P^\mu(g_2,e^{i\psi})\,d\psi\\&=\Phi_\mu(g_1\cdot 0)\Phi_\mu(g_2\cdot 0).\end{aligned}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2)：$\Phi(g_0\cdot 0)\neq 0$ としよう．
（ア）Φ は radial である．
$\because$ $z\in\mathcal{D}$ に対して，$g\in G$ を選んで $z=g\cdot 0$ とする．また $\varphi\in\mathbb{R}$ とする．(1) の函数等式で $g_1=g_0$, $g_2=k_\varphi g$ とすると $\Phi(g_0\cdot 0)\Phi(k_\varphi z)=\Phi(g_0\cdot 0)\Phi(z)$．ゆえに $\Phi(k_\varphi z)=\Phi(z)$ である．
（イ）$\Phi(0)=1$ である．
$\because$ 函数等式で $g_1=g_0$, $g_2=I$ とおくと，$\Phi(g_0\cdot 0)=\Phi(g_0\cdot 0)\Phi(0)$．よって $\Phi(0)=1$．
（ウ）Φ は $\mathcal{L}$ の固有函数である．
$\because$ 任意の $z\in\mathcal{D}$ と $g\in G$ に対して，(1) の関数等式より（$z=g_2\cdot 0$ とせよ）

$$\Phi(g\cdot 0)\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(gk_\psi\cdot z)\,d\psi.$$

$\mathcal{L}$ を両辺に作用させる．$\mathcal{L}$ は G 作用と可換であるから

$$\Phi(g\cdot 0)\mathcal{L}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathcal{L}\Phi)(gk_\psi\cdot z)\,d\psi.$$

$z=0$ とおき，$\lambda := \mathcal{L}\Phi(0)$ とおくと

$$\lambda\Phi(g\cdot 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathcal{L}\Phi)(gk_\psi\cdot 0)\,d\psi = \mathcal{L}\Phi(g\cdot 0).$$

ゆえに Φ は $\mathcal{D}$ の固有函数である． □

定義： $P_\nu(z) := F\Big(-\nu,\nu+1;1;\dfrac{1-z}{2}\Big)$ を第 1 種の **Legendre** 函数という．

注意： $\nu = n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ のとき，$P_n(z)$ は n 次の Legendre 多項式になる．

命題 5.5. $\Phi_\mu(a_t\cdot 0) = P_{-\mu}(\cosh t)$ $(t\in\mathbb{R})$.

証明． 次の超幾何函数の公式を使う：

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{-\alpha}F\Big(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\Big).$$

そうすると先の結果から

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(a_t\cdot 0) &= \cosh^{-2\mu}\tfrac{t}{2}\,F\big(\mu,\mu;1;\tanh^2\tfrac{t}{2}\big)\\ &= F\big(\mu,-\mu+1;1;-\sinh^2\tfrac{t}{2}\big)\\ &= P_{-\mu}(\cosh t)\end{aligned}$$

となって，証明終わり． □

さて Poisson 核について，$P(a_t,e^{i\theta}) = \dfrac{1}{\cosh t - \sinh t\cos\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(a_t\cdot 0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cosh t - \sinh t\cos\theta)^{-\mu}\,d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cosh t + \sinh t\cos\theta)^{-\mu}\,d\theta.\end{aligned}\tag{5.2}$$

従って第 1 種の Legebdre 函数の次の積分表示を得る：

$$P_\nu(\cosh t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cosh t + \sinh t\cos\theta)^{\nu}\,d\theta.$$

定理 5.4 の函数等式を Legendre 函数に翻訳するために次の補題を用意する．

補題 5.6. Cartan 分解をして，$a_{t_1}k_\psi a_{t_2} \in Ka_tK$ $(t\geqq 0)$ とするとき，

$$\cosh t = \cosh t_1\cosh t_2 + \sinh t_1\sinh t_2\cos\psi.$$

証明． 簡単のため，$r_1 := \tanh\frac{t_1}{2}$, $r_2 := \tanh\frac{t_2}{2}$ とおく．$a_{t_1}k_\psi a_{t_2} = k_1a_tk_2$ $(k_1,k_2\in K)$ より

$$\begin{aligned}\tanh\frac{t}{2} &= |k_1a_tk_2\cdot 0| = |a_{t_1}k_\psi a_{t_2}\cdot 0| = |a_{t_1}\cdot(r_2e^{i\psi})|\\ &= \left|\frac{r_2\cosh(t_1/2)e^{i\psi}+\sinh(t_1/2)}{r_2\sinh(t_1/2)e^{i\psi}+\cosh(t_1/2)}\right| = \left|\frac{r_2e^{i\psi}+r_1}{r_1r_2e^{i\psi}+1}\right|.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\cosh t &= \frac{1+\tanh^2(t/2)}{1-\tanh^2(t/2)} = \frac{|r_1r_2e^{i\psi}+1|^2+|r_2e^{i\psi}+r_1|^2}{|r_1r_2e^{i\psi}+1|^2-|r_2e^{i\psi}+r_1|^2} \\
&= \frac{(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2\cos\psi}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \\
&= \cosh t_1\cosh t_2+\sinh t_1\sinh t_2\cos\psi.
\end{aligned}$$

以上で証明が終わる. □

定理 5.4 の函数等式を翻訳すると

$$\begin{aligned}
P_\nu(\cosh t_1)P_\nu(\cosh t_2) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi_{-\nu}(a_{t_1}k_\psi a_{t_2}\cdot 0)\,d\psi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi_{-\nu}(k_1a_tk_2\cdot 0)\,d\psi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_{-\nu}(a_t\cdot 0)\,d\psi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_\nu(\cosh t)\,d\psi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_\nu(\cosh t_1\cosh t_2+\sinh t_1\sinh t_2\cos\psi)\,d\psi.
\end{aligned}$$

これを第 1 種 Legendre 函数の積公式という.

§6. L^1-Algebra of Radial Functions

一般論： G : 局所コンパクト群 (Hausdorff).

♠ G 上には左不変な **Haar** 測度 μ が正の定数倍を除いて一意的に存在する：G の Borel 集合全体（G の開集合全体から生成される σ algebra）を $\mathcal{B}(G)$ で表すと
(1) $\mu : \mathcal{B}(G) \to [0,\infty]$ は non-zero な **Radon** 測度，すなわち，
（ア） 任意のコンパクト集合 K に対して $\mu(K) < \infty$,
（イ） μ は外正則：$\mu(E) = \inf\{\mu(U)\ ;\ E \subset U : \text{open}\}$,
（ウ） μ は任意の開集合 U 上で内正則：
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K)\ ;\ E \subset K : \text{compact}\}.$$
（σ-compact 空間では単に内正則ということでよい）.
(2) $\mu(gE) = \mu(E)$ for $\forall g \in G$（ただし，$gE := \{gx\ ;\ x \in E\}$）.

定義（たたみ込み）：$f_1, f_2 \in L^1(G) := L^1(G, d\mu)$ に対して

$$f_1 * f_2(x) := \int_G f_1(y)f_2(y^{-1}x)\,d\mu(y) = \int_G f_1(xy)f_2(y^{-1})\,d\mu(y).$$

この積分が a.e.$x \in G$ で存在して，$f_1 * f_2 \in L^1(G)$ となることは標準的な計算. この積は結合的で，加法に関して分配的なので，$L^1(G)$ は algebra になる.

命題 **6.1.** (1) $L^1(G)$ が単位元を持つ $\iff$ G は discrete.
(2) $L^1(G)$ が可換 $\iff$ G は可換.

命題 6.2. K を G のコンパクト部分群とするとき，G/K 上には G-不変な Radon 測度 σ が正の定数倍を除いて一意的に存在する．定数を調整すると次の公式が成立する：

$$\int_G f(x)\,d\mu(x) = \int_{G/K}\left(\int_K f(xk)\,dk\right)d(xK).$$

ただし，dk は K 上の **Haar** 測度で，$\int_K dk = 1$ と正規化しておく．

話を単位円板 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ に戻そう．

$$\begin{aligned} G &= \left\{g\ ;\ g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \quad (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})\right\}, \\ K &= \{k_\theta\ ;\ k_\theta(z) = e^{i\theta} z \quad (\theta \in \mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

G は $\mathcal{D}$ に推移的に作用していて，$0 \in \mathcal{D}$ における固定部分群が K ゆえ，微分同相 $G/K \approx \mathcal{D}$ を得る．従って，$\mathcal{D}$ 上の函数 f に対して $F(g) := f(g \cdot 0)$ とおくと，F は G 上の函数で右 K 不変：$F(gk) = F(g)$ $(\forall k \in K)$．逆に F が G 上の函数で右 K 不変ならば，$f(g \cdot 0) := F(g)$ は $\mathcal{D}$ 上の函数として well-defined である．

命題 6.2 より

$$\int_G f(g \cdot 0)\,dg = \int_{\mathcal{D}} f(z)\,d\sigma(z) \quad (dg \text{ は } G \text{ 上の Haar 測度}). \tag{6.3}$$

$\mathcal{D}$ 上の G-不変測度は，§2 から

$$d\sigma(z) = 4\,\frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{4r\,drd\varphi}{(1 - r^2)^2} \qquad (z = re^{i\varphi} = x + iy).$$

$L^1(\mathcal{D}) := L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ とし

$$L^1_K(\mathcal{D}) := \{f \in L^1(\mathcal{D})\ ;\ f(k \cdot z) = f(z) \text{ for all } k \in K \text{ and a.e.} z \in \mathcal{D}\}$$

とおく（radial な可積分函数の全体）．$f_1, f_2 \in L^1_K(\mathcal{D})$ に対して

$$(f_1 \times f_2)(g) := \int_G f_1(y \cdot 0) f_2(y^{-1} g \cdot 0)\,dy \qquad (g \in G)$$

と定義すると，

$$(f_1 \times f_2)(gk) = (f_1 \times f_2)(g) \qquad (\forall k \in K)$$

をみたす．従って $f_1 * f_2(g \cdot 0) := f_1 \times f_2(g)$ は $\mathcal{D}$ 上の函数として well-defined．このとき，簡単な変数変換で

$$f_1 * f_2(g \cdot 0) = \int_G f_1(gy \cdot 0) f_2(y^{-1} \cdot 0)\,dy \tag{6.4}$$

となる．この式から，$f_1 * f_2(kg \cdot 0) = f_1 * f_2(g \cdot 0)$ $(k \in K)$ が出るので，$f_1 * f_2$ は radial であることがわかる．また可積分性も出るので，$f_1 * f_2 \in L^1_K(\mathcal{D})$ である．以上のようにして，$L^1_K(\mathcal{D})$ は algebra になる．

補題 6.3. $g \in G$ のとき，$|g \cdot 0| = |g^{-1} \cdot 0|$ である．特に，$\mathcal{D}$ 上の函数 f が radial ならば，$f(g \cdot 0) = f(g^{-1} \cdot 0)$ が成り立つ．

証明. $g(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha} z}$ $(|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$ ならば，$g^{-1}(z) = \dfrac{\overline{\alpha} - \beta}{-\overline{\beta} + \alpha}$ であるから，$g \cdot 0 = \beta/\overline{\alpha}$ であり，$g^{-1} \cdot 0 = -\beta/\alpha$ である． □

系 6.4. $f_1, f_2 \in L^1_K(\mathcal{D})$ のとき，

$$f_1 * f_2(g \cdot 0) = \int_{\mathcal{D}} f_1(g \cdot w) f_2(w)\, d\sigma(w).$$

証明. (6.3)，(6.4) と補題 6.3 による． □

系 6.5. Algebra $L^1_K(\mathcal{D})$ は可換である．

証明. 定義によって

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(g \cdot 0) &= \int_{\mathcal{D}} f_1(g \cdot w) f_2(w)\, d\sigma(w) = \int_{\mathcal{D}} f_2(g^{-1} \cdot w) f_1(w)\, d\sigma(w) \\ &= f_2 * f_1(g^{-1} \cdot 0) = f_2 * f_1(g \cdot 0). \end{aligned}$$

以上で証明終わり． □

さて，Φ_μ を index μ の球函数とする (§5)：

$$\Phi_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P^\mu_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta})\, d\theta = (1 - |z|^2)^\mu\, F(\mu, \mu; 1; |z|^2).$$

$\Phi_{1-\mu} = \Phi_\mu$ が成り立っていたことを思い出そう（命題 5.3）．

命題 6.6. $\lambda \in \mathbb{R}$ のとき，$\Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}$ は実数値函数で，$|\Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}(z)| \leqq 1$ が成り立つ．

証明. $\overline{\Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}} = \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda} = \Phi_{1-(\frac{1}{2}+i\lambda)} = \Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}$．そして

$$\begin{aligned} |\Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}(z)| &\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P^{1/2}_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta})\, d\theta \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} P_{\mathcal{D}}(z, e^{i\theta})\, d\theta \right]^{1/2} \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right]^{1/2} = 1 \end{aligned}$$

より証明が終わる．ここで，$F(1,1;1;|z|^2) = (1 - |z|^2)^{-1}$ であることを使った． □

定義：$f \in L^1_K(\mathcal{D})$ に対して

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathcal{D}} f(z) \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\, d\sigma(z) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

とおき，$\widehat{f}$ を f の **spherical Fourier transform** と呼ぶ（命題 6.6 より積分は収束している）．

♠ $\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda} = \Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}$ より，$\widehat{f}(-\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$ である．

命題 6.7. $f_1, f_2 \in L^1(\mathcal{D})$ のとき，$(f_1 * f_2)\widehat{\ }(\lambda) = \widehat{f_1}(\lambda)\widehat{f_2}(\lambda)$．これは $\chi_\lambda(f) := \widehat{f}(\lambda)$ とおくとき，$\chi_\lambda : L^1_K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ は algebra homomorphism であることを言っている．

証明. 面倒なので，$\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ を単に Φ と書く．定義から

$$\widehat{f_1}(\lambda)\widehat{f_2}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} f_1(z)\Phi(z)\,d\sigma(z)\int_{\mathcal{D}} f_2(w)\Phi(w)\,d\sigma(w).$$

定理 5.4 より

$$\Phi(g\cdot 0)\Phi(h\cdot 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(gk_\psi h\cdot 0)\,d\psi$$

この式を上式に代入して $(z = g\cdot 0, w = h\cdot 0)$

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1}(\lambda)\widehat{f_2}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} f_1(z)f_2(w)\int_0^{2\pi}\Phi(gk_\psi\cdot w)\,d\psi d\sigma(w)d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}} f_1(z)\,d\sigma(z)\int_0^{2\pi}d\psi\int_{\mathcal{D}} f_2(w)\Phi(gk_\psi\cdot w)\,d\sigma(w) \\
&= \int_{\mathcal{D}} f_1(z)\,d\sigma(z)\int_{\mathcal{D}} f_2(w)\Phi(g\cdot w)\,d\sigma(w) \\
&= \int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} f_1(z)f_2(g^{-1}\cdot w)\Phi(w)\,d\sigma(z)d\sigma(w).
\end{aligned}$$

ここで補題 6.3 より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f_1(z)f_2(g^{-1}h\cdot 0)\,d\sigma(z) &= \int_{\mathcal{D}} f_1(z)f_2(h^{-1}g\cdot 0)\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\mathcal{D}} f_1(z)f_2(h^{-1}\cdot z)\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\mathcal{D}} f_1(h\cdot z)f_2(z)\,d\sigma(z) \\
&= f_1 * f_2(h\cdot 0) \\
&= f_1 * f_2(w).
\end{aligned}$$

以上より

$$\widehat{f_1}(\lambda)\widehat{f_2}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} f_1 * f_2(w)\Phi(w)\,d\sigma(w) = (f_1 * f_2)\widehat{\ }(\lambda)$$

となって，証明が終わる． □

さらに話を進めるためには $d\sigma(z)$ の公式が必要である．

命題 6.8. $z = e^{i\varphi}\tanh\frac{\tau}{2} = a_t n_\xi\cdot 0$ という座標で

$$d\sigma(z) = \sinh\tau\,d\tau d\varphi = d\xi dt.$$

証明. (1) $r = \tanh\frac{\tau}{2}$ より，$\dfrac{dr}{d\tau} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cosh^2\frac{\tau}{2}} = \dfrac{1}{2}(1-r^2)$.

ゆえに，$\dfrac{4r\,dr}{(1-r^2)^2} = \dfrac{2r}{1-r^2}\,d\tau = \sinh\tau\,d\tau.$ これより最初の公式が出る．

(2) $n_\xi \cdot 0 = \dfrac{\xi}{\xi + 2i}$ より，$e^{i\varphi}\ \tanh\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{e^{t/2}\xi + 2i\sinh\frac{t}{2}}{e^{t/2}\xi + 2i\cosh\frac{t}{2}}$．ゆえに $\tanh^2\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{e^t\xi^2 + 4\sinh^2\frac{t}{2}}{e^t\xi^2 + 4\cosh^2\frac{t}{2}}$ となるから

$$\cosh\tau = \frac{1+\tanh^2\frac{\tau}{2}}{1-\tanh^2\frac{\tau}{2}} = \cosh t + \frac{1}{2}\,e^t\xi^2.$$

よって，$\sinh\tau\, d\tau = (\sinh t + \frac{1}{2}e^t\xi^2)\,dt + e^t\xi\,d\xi$ となる．また，

$$\varphi = \mathrm{Arg}(e^{t/2}\xi + 2i\sinh(t/2)) - \mathrm{Arg}(e^{t/2}\xi + 2i\cosh(t/2))$$

であり，$d(\mathrm{Arg}(x+iy)) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ に注意すると（途中の計算は略）

$$d\varphi = 4\,\frac{(\frac{1}{2}e^t\xi^2 - \sinh t)\,d\xi + (\frac{1}{2}e^t\xi^3 + \xi\cosh t)\,dt}{\big(e^t\xi^2 + 4\cosh^2(t/2)\big)\big(e^t\xi^2 + 4\sinh^2(t/2)\big)}.$$

以上より，$\sinh\tau\cdot\dfrac{D(\tau,\varphi)}{D(\xi,t)} = 1$ が出る． □

定義：$f \in L^1_K(\mathcal{D})$ に対して，

$$\mathcal{H}f(t) := e^{t/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(a_t n_\xi\cdot 0)\,d\xi \qquad (t\in\mathbb{R})$$

とおく．$\mathcal{H}f$ を f の **Harish-Chandra** 変換と呼ぶ．(a_t, n_ξ は \$3 でで定義された 1 次分数変換.）

$a_t n_\xi = n_{e^t\xi} a_t$ であるから，変数変換を施すと

$$\mathcal{H}f(t) = e^{-t/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(n_\xi a_t\cdot 0)\,d\xi.$$

$t\in\mathbb{R}$ を固定するとき，$\xi \mapsto n_\xi a_t\cdot 0$ は，1 から出て，実軸を点 $\tanh\frac{t}{2}$ で切る horocycle であることを思い出しておこう．

定理 6.9. $f \in L^1_K(\mathcal{D})$ のとき，$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(\mathcal{H}f)(\lambda)$．ここで

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

証明．　定義より

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} f(z)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\,d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}} f(z)\int_0^{2\pi} P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z,e^{i\theta})\,d\theta d\sigma(z).$$

ここで，$P_{\mathcal{D}}(z,e^{i\theta}) = P_{\mathcal{D}}(k_\theta^{-1}\cdot z,\,1)$ より

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{D}} f(k_\theta\cdot z)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z,1)\,d\sigma(z)d\theta\\ &= \int_{\mathcal{D}} f(z)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z,1)\,d\sigma(z)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty} f(a_t n_\xi\cdot 0)P^{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t n_\xi,1)\,d\xi.\end{aligned}$$

$P(a_t n_\xi, 1) = e^t$ ゆえ（定理 4.2 の証明参照）$\widehat{f}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \mathcal{H}f(t)\, dt$ となって証明が終わる． $\square$

命題 6.10. (1) $f \in L^1_K(\mathcal{D}) \implies \mathcal{H}f(-t) = \mathcal{H}f(t)$.
(2) $f_1, f_2 \in L^1_K(\mathcal{D}) \implies \mathcal{H}(f_1 * f_2) = \mathcal{H}f_1 *_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f_2$.

証明.　いずれも定理 6.9 と通常の Fourier 変換の一意性から出るが，ここでは直接の証明を与えてみる．
(1)　$a_{-t} n_\xi = n_{e^{-t}\xi} a_{-t} = (a_t n_{-e^{-t}\xi})^{-1}$ より

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(-t) &= e^{-t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_{-t} n_\xi \cdot 0)\, d\xi = e^{-t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_t n_{-e^{-t}\xi} \cdot 0)\, d\xi \\ &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_t n_\xi \cdot 0)\, d\xi = \mathcal{H}f(t).\end{aligned}$$

(2)　$f_1 * f_2(g \cdot 0) = \displaystyle\int_G f_1(y \cdot 0) f_1(y^{-1} g \cdot 0)\, dy$ より

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_1 * f_2)(t) &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 * f_2(a_t n_\xi \cdot 0)\, d\xi \\ &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_G f_1(y \cdot 0) f_2(y^{-1} a_t n_\xi \cdot 0)\, dy \\ &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a_s n_\eta \cdot 0) f_2(n_{-\eta} a_{-s} a_t n_\xi \cdot 0)\, ds d\eta.\end{aligned}$$

ここで $n_{-\eta} a_{-s} a_t = n_{-\eta} a_{t-s} = a_{t-s} n_{-e^{-(t-s)}\eta}$ ゆえ

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_1 * f_2)(t) &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a_s n_\eta \cdot 0) f_2(a_{t-s} n_{\xi - e^{-(t-s)}\eta} \cdot 0) ds d\eta \\ &= e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a_s n_\eta \cdot 0) f_2(a_{t-s} n_\xi \cdot 0)\, d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}f_1(s) \mathcal{H}f_2(t-s)\, ds \\ &= (\mathcal{H}f_1 *_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f_2)(t)\end{aligned}$$

となって，証明終わり． $\square$

§7.　Inversion of Spherical Fourier Transform

Spherical Fourier transform: $f \in L^1_K(\mathcal{D})$

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} f(z) \Phi_{\frac{1}{2} - i\lambda}(z)\, d\sigma(z) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(\mathcal{H}f)(\lambda)$．ここで $\mathcal{H}$ は Harish-Chandra 変換

$$\mathcal{H}f(t) = e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_t n_\xi \cdot 0)\, d\xi.$$

そこでまず Harish-Chandra 変換の反転から考える．定理 6.9 の手前の計算でも見たように

$$\mathcal{H}f(t) = e^{-t/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(n_\xi a_t \cdot 0)\, d\xi. \tag{7.1}$$

ここで，$Na_t \cdot 0 = N \cdot \tanh \frac{t}{2}$ は 1 から出る horocycle で $\mathcal{D}$ 内の実軸を $\tanh \frac{t}{2}$ で切るものであることに注意．$C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ で，台が compact な $\mathcal{D}$ 上の C^∞ 函数で K 不変（回転不変）なもの全体を表すものとし，以下 $f \in C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ とする．

$$\psi_f(u) := f\Bigl(\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\Bigr) \qquad (u \in [1, \infty))$$

とおく．ここで，$u \geqq 1$ ならば，$0 \leqq \dfrac{u-1}{u+1} < 1$ であることに注意．そうすると

$$\psi_f(\cosh t) = f\Bigl(\Bigl|\tanh \frac{t}{2}\Bigr|\Bigr) = f\Bigl(\tanh \frac{t}{2}\Bigr) = f(a_t \cdot 0) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{7.2}$$

補題 7.1. $\mathcal{H}f(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_f\Bigl(\cosh t + \frac{1}{2}\xi^2\Bigr)\, d\xi.$

証明． 命題 6.8 の証明で計算したように，$a_t n_\xi \cdot 0 = e^{i\varphi} \tanh \frac{\tau}{2}$ とするとき

$$\cosh \tau = \cosh t + \frac{1}{2} e^t \xi^2.$$

f が radial であることに注意すると，(7.2) より

$$f(a_t n_\xi \cdot 0) = f\Bigl(\tanh \frac{\tau}{2}\Bigr) = \psi_f(\cosh \tau) = \psi_f\Bigl(\cosh t + \frac{1}{2} e^t \xi^2\Bigr).$$

これを $\mathcal{H}f$ の定義式に代入すると

$$\mathcal{H}f(t) = e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f\Bigl(\cosh t + \frac{1}{2} e^t \xi^2\Bigr)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f\Bigl(\cosh t + \frac{1}{2}\xi^2\Bigr)\, d\xi$$

となって証明が終わる． □

♠ $d(0, z) \geqq T$ のとき，$f(z) \equiv 0$ とする．$d(0, z) = 2 \operatorname{Arc}\tanh |z|$ であるから

$$d(0, z) \geqq T \iff |z| \geqq \tanh \frac{T}{2}$$

となる．Horocycle $N \cdot \tanh \frac{t}{2}$ は，$|t| \geqq T$ のとき，$|z| \geqq \tanh \frac{T}{2}$ の中にあるから，式 (7.1) とその後の考察より，$\mathcal{H}f(t) \equiv 0$ for $|t| \geqq T$ である．従って，$\mathbb{R}$ 上の台がコンパクトは C^∞ 偶函数全体を $C_c^\infty(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ で表すとき，$\mathcal{H}f \in C_c^\infty(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ である．$F \in C_c^\infty(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ に対して

$$\Psi_F(v) := F(\operatorname{arc}\cosh v) = F\bigl(\log\bigl(v \pm \sqrt{v^2 - 1}\,\bigr)\bigr) \qquad (v \in [1, \infty))$$

とおく．$\mathcal{H}f$ は偶函数であったから

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{H}f}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f\Big(v + \frac{1}{2}\xi^2\Big)\, d\xi = 2\int_0^{\infty} \psi_f\Big(v + \frac{1}{2}\xi^2\Big)\, d\xi \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\infty} \psi_f(v+\eta)\eta^{-1/2}\, d\eta = \sqrt{2}\int_v^{\infty} \frac{\psi_f(\eta)}{\sqrt{\eta - v}}\, d\eta.\end{aligned}$$

これは **Abel 型**の積分方程式である．これを解くために次の積分変換を導入する：

定義：$\operatorname{Re}\mu > 0$ のとき

$$\mathcal{W}_\mu g(y) := \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_y^{\infty} g(x)(x-y)^{\mu-1}\, dx \qquad (g \in C_c^{\infty}[a,\infty);\ \ a:\text{fixed}).$$

これを **Weyl 型の fractional integral** という．

部分積分を繰り返すことにより

$$\mathcal{W}_\mu g(y) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\mu+n)}\int_y^{\infty} g^{(n)}(x)(x-y)^{\mu+n-1}\, dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

これにより，$y \geqq a$ を固定するとき，$\mu \mapsto \mathcal{W}_\mu g(y)$ は $\mathbb{C}$ 上の entire function に拡張できる．

演習： $\mathcal{W}_0 = I, \quad \mathcal{W}_\mu \circ \mathcal{W}_\nu = \mathcal{W}_{\mu+\nu}. \quad$ 特に $\mathcal{W}_\mu^{-1} = \mathcal{W}_{-\mu}$.

$\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$ であるから，$\mathcal{W}$ を用いると，$\Psi_{\mathcal{H}f}(v) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{W}_{1/2}\psi_f(v)$ となる．そうすると

$$\begin{aligned}\psi_f(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{W}_{-1/2}\Psi_{\mathcal{H}f}(v) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_v^{\infty} \frac{(\Psi_{\mathcal{H}f})'(\eta)}{\sqrt{\eta - v}}\, d\eta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{\infty} (\Psi_{\mathcal{H}f})'(\eta+v)\eta^{-1/2}\, d\eta = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (\Psi_{\mathcal{H}f})'\Big(v + \frac{1}{2}\xi^2\Big)\, d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_{\mathcal{H}f})'\Big(v + \frac{1}{2}\xi^2\Big)\, d\xi.\end{aligned}$$

以上と (7.2) より次の定理を得る（$f(z) = f(|z|)$ に注意）．

定理 7.2. $f \in C_c^{\infty}(\mathcal{D})^K$ のとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_{\mathcal{H}f})'\Big(\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + \frac{1}{2}\xi^2\Big)\, d\xi \qquad (z \in \mathcal{D}).$$

さて 球 Fourier 変換 $f \mapsto \widehat{f}$ を反転しよう．$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(\mathcal{H}f)(\lambda)$ であり，$\mathcal{H}f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ より $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である．ゆえに

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\cos\lambda t\, d\lambda.$$

積分記号下での微分は可能であるから

$$(\mathcal{H}f)'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\lambda\,\sin\lambda t\, d\lambda. \tag{7.3}$$

一方，定理 7.2 で $z=0$ とおくと

$$f(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Psi_{\mathcal{H}f})'\Big(1+\frac{1}{2}\xi^2\Big)\,d\xi.$$

変数変換 $\xi=2\sinh\frac{t}{2}$ を行うと，$1+\frac{1}{2}\xi^2=\cosh t$ であり $d\xi=\cosh\frac{t}{2}\,dt$ ゆえ

$$f(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Psi_{\mathcal{H}f})'(\cosh t)\cosh\frac{t}{2}\,dt.$$

ところで，$\Psi_{\mathcal{H}f}(\cosh t)=\mathcal{H}f(t)$ ゆえ，$(\Psi_{\mathcal{H}f})'(\cosh t)\sinh t=(\mathcal{H}f)'(t)$.

$$\therefore\ f(0)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{H}f)'(t)\,\frac{dt}{\sinh\frac{t}{2}}.$$

(7.3) を代入すると

$$\begin{aligned}f(0)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\lambda\,\sin\lambda t\,d\lambda\right]\frac{dt}{\sinh\frac{t}{2}}\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt\right]\lambda\,d\lambda.\end{aligned}$$

演習： $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{\sinh\frac{t}{2}}\,dt=\tanh(\pi\lambda)$. Hint: $f(z):=\dfrac{e^{i\lambda z}}{\sinh\frac{z}{2}}$ の積分の留数計算.

演習より

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda. \tag{7.4}$$

定理 7.3. $f\in C_c^{\infty}(\mathcal{D})^K$ とする.

(1) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda$ （反転公式）.

(2) $\displaystyle\int_{\mathcal{D}}|f(z)|^2\,d\sigma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}|\widehat{f}(\lambda)|^2\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda$ （**Plancherel** 公式）.

証明に入る前に記号を準備し，補題を証明する．一般に $\mathcal{D}$ 上の連続函数 φ に対して

$$\varphi^{\natural}(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(k_\theta\cdot z)\,d\theta\qquad(z\in\mathcal{D}).$$

明らかに $\varphi^{\natural}$ は radial である．$\varphi^{\natural}(0)=\varphi(0)$ に注意．以下 $f_g(z):=f(g^{-1}\cdot z)$ $(g\in G)$ とおく．f が radial であっても，f_g は radial とは限らないことに注意しておく．

補題 7.4. $f\in C_c^{\infty}(\mathcal{D})^K$ とすると，$\big((f_g)^{\natural}\big)\widehat{\ }(\lambda)=\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g\cdot 0)\widehat{f}(\lambda)$.

証明． 証明中では簡単のため，$\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ を単に Φ と書く．定義により

$$\begin{aligned}\big((f_g)^\natural\big)^\wedge(\lambda) &= \int_{\mathcal{D}} (f_g)^\natural(z)\Phi(z)\,d\sigma(z)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}}\int_0^{2\pi} f(g^{-1}k_\theta\cdot z)\Phi(z)\,d\theta d\sigma(z)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{D}} f(z)\Phi(k_\theta^{-1}g\cdot z)\,d\sigma(z)d\theta.\end{aligned}$$

Φ 自身 radial であるから，$\Phi(k_\theta^{-1}g\cdot z)=\Phi(g\cdot z)$．ゆえに

$$\big((f_g)^\natural\big)^\wedge(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} f(z)\Phi(g\cdot z)\,d\sigma(z) = \int_{\mathcal{D}} f(k_\theta\cdot z)\Phi(gk_\theta\cdot z)\,d\sigma(z)$$

が任意の $\theta\in\mathbb{R}$ で成立する．f が radial であることに注意して両辺を θ で積分すると

$$\big((f_g)^\natural\big)^\wedge(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}}\int_0^{2\pi} f(z)\Phi(gk_\theta\cdot z)\,d\theta d\sigma(z).$$

定理 5.4 の積公式を使うと，$\big((f_g)^\natural\big)^\wedge(\lambda)=\Phi(g\cdot 0)\widehat{f}(0)$ となっている． □

定理 7.3 の証明に取りかかろう：

証明． (1) $g\in G$ をとって $z=g\cdot 0$ と表す．補題 6.3 の $|g\cdot 0|=|g^{-1}\cdot 0|$ に注意すると

$$f(z)=f(g\cdot 0)=f(g^{-1}\cdot 0)=f_g(0)=(f_g)^\natural(0).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)=(f_g)^\natural(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \big((f_g)^\natural\big)^\wedge(\lambda)\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

(2) 定義から

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}|f(z)|^2\,d\sigma(z) &= \int_{\mathcal{D}} f(I\cdot z)\overline{f(z)}\,d\sigma(z) = (f*\overline{f})(0) \quad \text{（系 6.4）}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f*\overline{f})^\wedge(\lambda)\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widehat{f}(\lambda)(\overline{f})^\wedge(\lambda)\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda \quad \text{（命題 6.7）}.\end{aligned}$$

ところが $\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ は実数値函数ゆえ，容易に $\big(\overline{f}\big)^\wedge(\lambda)=\overline{\widehat{f}(\lambda)}$．よって

$$\int_{\mathcal{D}}|f(z)|^2\,d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\widehat{f}(\lambda)|^2\,\lambda\,\tanh(\pi\lambda)\,d\lambda$$

となって証明終わり． □

注意：一般の Riemann 対称空間上の解析における記号法を導入しよう：
$\boldsymbol{c}(\lambda) := \pi^{-1/2} \cdot \dfrac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}$ とおくと $\boldsymbol{c}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数で，$\lambda \in \mathbb{R}$ のとき

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda)}{\Gamma(i\lambda)\Gamma(-i\lambda)} = -i\lambda \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda)}{\Gamma(i\lambda)\Gamma(1-i\lambda)}.$$

ここで，$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = \dfrac{\pi}{\cos\pi z}$ 及び $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ より

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} = -i\lambda \cdot \frac{\sin\pi i\lambda}{\cos\pi i\lambda} = -i\lambda \cdot \frac{i\sinh\pi\lambda}{\cosh\pi\lambda} = \lambda\tanh(\pi\lambda).$$

以上より，たとえば Plancherel 公式は

$$\int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2\,d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}.$$

と書ける．これが一般的な記号法である．$\boldsymbol{c}$ は Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$ 函数と呼ばれている．

命題 7.5. $\mathrm{Re}(i\lambda) > 0$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} e^{(-i\lambda+\frac{1}{2})t}\,\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t\cdot 0) = \boldsymbol{c}(\lambda).$$

証明. 公式 (5.1) より

$$\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t\cdot 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cosh t + \sinh t\cos\theta)^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\,d\theta.$$

ここで $u = \tan\frac{1}{2}\theta$ と変数変換をすると，$du = \frac{1}{2}(1+u^2)\,d\theta$ かつ $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t\cdot 0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big(\cosh t + \frac{1-u^2}{1+u^2}\,\sinh t\Big)^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\,\frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+u^2)^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\,(e^t + e^{-t}u^2)^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\,du \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot e^{(i\lambda-\frac{1}{2})t}\int_0^\infty (1+e^{-2t}u^2)^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\,du.
\end{aligned}$$

従って

$$e^{(-i\lambda+\frac{1}{2})t}\,\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t\cdot 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+e^{-2t}u^2)^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\,du.$$

Lebesgue の優収束定理を使うために，まず被積分函数を評価しよう：

$$|\,\text{被積分函数}\,| = (1+e^{-2t}u^2)^{-\frac{1}{2}-\eta}\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}+\eta} \qquad (\lambda = \xi + i\eta).$$

仮定は $\mathrm{Re}(i\lambda) = -\eta > 0$.　そこで $\varepsilon > 0$ を十分小さくとって $\frac{1}{2}+\varepsilon\eta > 0$ とする．このとき，$(1+e^{-2t}u^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon\eta} \geqq 1$ かつ $\varepsilon\eta - \eta = -\eta(1-\varepsilon) > 0$ より

$$|\,\text{被積分函数}\,| \leqq (1+e^{-2t}u^2)^{\varepsilon\eta-\eta}\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}+\eta} \leqq (1+u^2)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon\eta} \in L^1[0,\infty).$$

優収束定理より積分記号下で極限をとって

$$\lim_{t\to\infty} e^{(-i\lambda+\frac{1}{2})t}\,\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(a_t\cdot 0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+u^2)^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\,du.$$

ここで $s=\dfrac{1}{1+u^2}$ と変数変換をする：$2\,du=s^{-3/2}(1-s)^{-1/2}\,ds$ であるから

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty (1+u^2)^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\,du &= \int_0^1 s^{-1+i\lambda}(1-s)^{-1/2}\,ds = B\Big(i\lambda,\,\frac{1}{2}\Big)\\ &= \frac{\Gamma(i\lambda)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}=\pi\cdot\boldsymbol{c}(\lambda).\end{aligned}$$

これより命題の公式が直ちに従う. □

§8. Poisson 変換と連続主系列表現

Poisson 核 $P_{\mathcal{D}}(z,e^{i\theta})=\dfrac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ $(z\in\mathcal{D},\,\theta\in\mathbb{R})$ を思い出そう. 今後は $\partial\mathcal{D}$ 上の積分を次のように書く：

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(\gamma)\,d\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

そうすると，§4 での考察と $\left|\dfrac{d(e^{i\theta})}{d\theta}\right|=1$ より

$$P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)=\left|\frac{d(g^{-1}\cdot\gamma)}{d\gamma}\right|\qquad (g\in G,\ \gamma\in\partial\mathcal{D})\tag{8.1}$$

となる. そして次の性質を復習しておこう（§4 参照）：

$$P_{\mathcal{D}}(g_1g_2\cdot 0,\,\gamma)=P_{\mathcal{D}}(g_2\cdot 0,\,g_1^{-1}\cdot\gamma)P_{\mathcal{D}}(g_1\cdot 0,\,\gamma),\tag{8.2}$$

$$P_{\mathcal{D}}(0,\gamma)=1\qquad (\forall\gamma\in\partial\mathcal{D}).\tag{8.3}$$

以下 $L^2(\partial\mathcal{D})$ とは $L^2(\partial\mathcal{D},d\gamma)$ のこととし，$\chi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$ とおく.

定義： 各 $\mu\in\mathbb{C}$ に対して，次の積分で定義される変換 $\mathcal{P}_\mu : L^2(\partial\mathcal{D})\ni f\mapsto\mathcal{P}_\mu f$ を **Poisson 変換** という：

$$\mathcal{P}_\mu f(z):=\int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{\mu}(z,\gamma)f(\gamma)\,d\gamma\qquad (z\in\mathcal{D}).$$

積分は確かに絶対収束していることに注意.

次の (1), (2) は簡単にわかる. ただし $\mathcal{L}$ は $\mathcal{D}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素で，$\mathbf{1}$ は $\partial\mathcal{D}$ 上恒等的に 1 である函数である：

(1) $\mathcal{P}_\mu f\in C^\infty(\mathcal{D})$ かつ $\mathcal{L}\mathcal{P}_\mu f=\mu(\mu-1)\mathcal{P}_\mu f$.
(2) $\mathcal{P}_\mu\mathbf{1}=\Phi_\mu$: index μ の球函数.

補題 8.1. $\mathcal{P}_\mu$ が単射 $\iff$ $\mu\neq 0,-1,-2,\dots$.

証明． $P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z,\cdot)$ の Fourier 係数を $\{Z_\mu(z;n)\}$ とし，$f=\sum f_n\chi_n$ を $f\in L^2(\partial\mathcal{D})$ の Fourier 級数展開とする．そうすると $\mathcal{P}_\mu$ の定義より

$$\mathcal{P}_\mu f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_\mu(z;n)f_{-n}. \tag{8.4}$$

さて $\mathcal{P}_\mu f=0$ とする．このとき，任意の $z\in\mathcal{D}$ に対して $\sum Z_\mu(z;n)f_{-n}=0$ ゆえ，z を $e^{in\theta}z$ $(\theta\in\mathbb{R})$ で置き換えると，命題 5.2 より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}Z_\mu(z;n)f_{-n}=0.$$

θ は任意ゆえ，$Z_\mu(z;n)f_{-n}=0$ $(\forall z\in\mathcal{D},\ \forall n)$．命題 5.1 より

$$Z_\mu(re^{i\varphi};n)=\frac{(\mu)_{|n|}}{|n|!}(1-r^2)^\mu r^{|n|}e^{-in\varphi}F(\mu,\mu+|n|;|n|+1;r^2)$$

であるが，$\mu\neq 0,-1,-2,\dots$ ならば $(\mu)_{|n|}\neq 0$ $(\forall n)$ より，$Z_\mu(\cdot;n)\neq 0$．ゆえに任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して $f_n=0$ となって $f=0$ である．

逆に，$\mu=-m$ $(m=0,1,2,\dots)$ ならば $|n|\geqq m+1$ のとき $(\mu)_{|n|}=0$．従って $Z_\mu(\cdot;n)=0$ for $|n|\geqq m+1$ となるから，(8.4) より

$$\mathrm{Range}(\mathcal{P}_\mu)\subset\mathrm{Span}\{Z_\mu(\cdot;n)\ ;\ |n|\leqq m\}.$$

これは Range $(\mathcal{P}_\mu)$ が有限次元であることを示しているので，$\mathcal{P}_\mu$ は単射ではない． □

以下 $\mathfrak{H}_\mu:=\mathcal{P}_\mu(L^2(\partial\mathcal{D}))$ とおき，$\mathfrak{H}_\mu$ を考察するときは $\mu\neq 0,-1,-2,\dots$ を仮定する．

命題 8.2. $F\in\mathfrak{H}_\mu$ と $g\in G$ に対して，$F_g(z):=F(g^{-1}\cdot z)$ とおくとき，$F_g\in\mathfrak{H}_\mu$．

証明． $F=\mathcal{P}_\mu f$ $(f\in L^2(\partial\mathcal{D}))$ とすると

$$\mathcal{P}_\mu f(g^{-1}\cdot z)=\int_{\partial\mathcal{D}}P^{\mu}_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot z,\,\gamma)f(\gamma)\,d\gamma.$$

(8.2) より，$P_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot z,\,\gamma)=P_{\mathcal{D}}(z,\,g\cdot\gamma)P_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot 0,\,\gamma)$ ゆえ

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mu f(g^{-1}\cdot z)&=\int_{\partial\mathcal{D}}P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z,g\cdot\gamma)P^{\mu}_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot 0,\,\gamma)f(\gamma)\,d\gamma\\&=\int_{\partial\mathcal{D}}P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z,\gamma)P^{\mu}_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot 0,\,g^{-1}\cdot\gamma)P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)f(g^{-1}\cdot\gamma)\,d\gamma.\end{aligned}$$

$1=P_{\mathcal{D}}(gg^{-1}\cdot 0,\,\gamma)=P_{\mathcal{D}}(g^{-1}\cdot 0,\,g^{-1}\cdot\gamma)P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)$ ゆえ

$$\mathcal{P}_\mu f(g^{-1}\cdot z)=\int_{\partial\mathcal{D}}P^{\mu}_{\mathcal{D}}(z,\gamma)P^{1-\mu}_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)f(g^{-1}\cdot\gamma)\,d\gamma.$$

ここで

$$T_\mu(g)f(\gamma):=P^{1-\mu}_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)f(g^{-1}\cdot\gamma) \tag{8.5}$$

とおく．実数 λ に対して，$M_\lambda(g):=\sup_{\gamma\in\partial\mathcal{D}}P^{\lambda}_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)$ とするとき

$$|T_\mu(g)f(\gamma)|\leqq M_{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\mu}(g)\cdot P^{1/2}_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\gamma)|f(g^{-1}\cdot\gamma)|.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} |T_\mu(g)f(\gamma)|^2\,d\gamma &\leqq M^2_{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\mu}(g)\int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)|f(g^{-1}\cdot\gamma)|^2\,d\gamma\\ &= M^2_{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\mu}(g)\int_{\partial\mathcal{D}} |f(\gamma)|^2\,d\gamma.\end{aligned}$$

これより $\|T_\mu(g)f\|_{L^2(\partial\mathcal{D})} \leqq M_{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\mu}(g)\|f\|_{L^2(\partial\mathcal{D})}$ となって，$T_\mu(g)$ は $L^2(\partial\mathcal{D})$ 上の有界線型作用素である．よって $F_g = \mathcal{P}_\mu(T_\mu(g)f) \in \mathfrak{H}_\mu$. □

系 **8.3.** $g \mapsto T_\mu(g)$ は $L^2(\partial\mathcal{D})$ 上の有界線形作用素による G の表現で，$\mathrm{Re}\,\mu = 1/2$ のときはユニタリ表現（各 $T_\mu(g)$ がユニタリ作用素）になっている：

$$(T_{\frac{1}{2}+i\lambda}(g)f_1 \,|\, T_{\frac{1}{2}+i\lambda}(g)f_2)_{L^2(\partial\mathcal{D})} = (f_1 \,|\, f_2)_{L^2(\partial\mathcal{D})}.$$

この表現 T_μ を G の 連続主系列表現と呼ぶ．一方，$\pi_\mu(g)F(z) := F(g^{-1}\cdot z)$ $(F \in \mathfrak{H})$ とおく．このとき，命題 8.2 より

$$\pi_\mu(g)\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu T_\mu(g) \qquad (\forall g \in G). \tag{8.6}$$

G から $L^2(\partial\mathcal{D})$ への写像 $g \mapsto T_\mu(g)f$ $(f \in L^2(\partial\mathcal{D}))$ が連続であることに注意．従って，$g \mapsto \pi_\mu(g)F$ $(F \in \mathfrak{H}_\mu)$ も連続である．

$\mu \neq 0, -1, -2, \ldots$ のとき，$\mathcal{P}_\mu$ によって $L^2(\partial\mathcal{D})$ の Hilbert 空間の構造を $\mathfrak{H}_\mu$ に移してくる：

$$(P_\mu f_1 \,|\, P_\mu f_2) := (f_1 \,|\, f_2)_{L^2(\partial\mathcal{D})}.$$

以下 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\mu$ の特質をしばらく見よう：まず，$\mathfrak{H}_\mu \subset C^\infty(\mathcal{D})$ に注意．そして，$F = \mathcal{P}_\mu f \in \mathfrak{H}_\mu$, $z \in \mathcal{D}$ のとき

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leqq \int_{\partial\mathcal{D}} |P^\mu_{\mathcal{D}}(g)(z,\gamma)||f(\gamma)|\,d\gamma \qquad (z = g\cdot 0)\\ &\leqq M_{\mathrm{Re}\,\mu}(g)\int_{\partial\mathcal{D}} |f(\gamma)|\,d\gamma \leqq M_{\mathrm{Re}\,\mu}(g)\left[\int_{\partial\mathcal{D}} |f(\gamma)|^2\,d\gamma\right]^{1/2}\\ &= M_{\mathrm{Re}\,\mu}(g)\|f\| = M_{\mathrm{Re}\,\mu}(g)\|F\|.\end{aligned}$$

これは $F \mapsto F(z)$ が $\mathfrak{H}_\mu$ 上の連続な線形形式であることを示す．Riesz の定理により，$K_\mu(\cdot, z) \in \mathfrak{H}_\mu$ が存在して

$$F(z) = (F \,|\, K_\mu(\cdot, z)) \qquad (\forall F \in \mathfrak{H}_\mu)$$

となる．この函数 K_μ のことを $\mathfrak{H}_\mu$ の再生核と呼ぶ．

注意：上での評価を検討することにより，$\mathfrak{H}_\mu$ での収束からコンパクト集合上の一様収束（広義一様収束）が出る．

再生核の一般的な性質を述べよう：

(1) $K_\mu(w, z) = \overline{K_\mu(z, w)}$.

$\because$ これは，$K_\mu(z, w) = (K_\mu(\cdot, w) \,|\, K_\mu(\cdot, z))$ より直ちに出る．//

(2) $K_\mu(z, z) = \|K_\mu(\cdot, z)\|^2 \geqq 0$.

(3) $|K_\mu(z, w)|^2 \leqq K_\mu(z, z)K_\mu(w, w)$.

命題 8.4. (1) $K_\mu(z,w)=\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} P^\mu_{\mathcal{D}}(z,\gamma)\overline{P^\mu_{\mathcal{D}}(w,\gamma)}\,d\gamma.$

(2) $K_\mu(z,w)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_\mu(z;n)\overline{Z_\mu(w;n)}$（各点収束）.

証明. (1) w を固定して右辺を $Q(z)$ とおくと，$Q=\mathcal{P}_\mu(\overline{P^\mu_{\mathcal{D}}(w,\cdot)})$ であるから，任意の $F=\mathcal{P}_\mu f\in\mathfrak{H}_\mu$ に対して

$$(F\,|\,Q)=\int_{\partial\mathcal{D}} f(\gamma)P^\mu_{\mathcal{D}}(w,\gamma)\,d\gamma=\mathcal{P}_\mu f(w)=F(w)=(F\,|\,K_\mu(\cdot,w)).$$

ゆえに $Q(z)=K_\mu(z,w)$ である.
(2) $\{Z_\mu(z;n)\}$ が $P^\mu_{\mathcal{D}}(z,\cdot)$ の Fourier 係数であることによる. □

定理 8.5. $\lambda\in\mathbb{R}$ のとき，$K_{\frac12+i\lambda}(z,w)=\Phi_{\frac12+i\lambda}\Big(\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\Big).$

証明. (8.5) より，$P^\mu_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)=T_{1-\mu}(g)\mathbf{1}(\gamma)$. 命題 8.4 より，$g,h\in G$ のとき

$$\begin{aligned}K_{\frac12+i\lambda}(g\cdot 0,\,h\cdot 0)&=(T_{\frac12-i\lambda}(g)\mathbf{1}\,|\,T_{\frac12-i\lambda}(h)\mathbf{1})=(T_{\frac12-i\lambda}(h^{-1}g)\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1})\\&=\int_{\partial\mathcal{D}} P^{\frac12+i\lambda}_{\mathcal{D}}(h^{-1}g\cdot 0,\gamma)\,d\gamma=\Phi_{\frac12+i\lambda}(h^{-1}g\cdot 0).\end{aligned}$$

さて，w を 0 に写す G の元 h_0 として，$h_0(\zeta)=\dfrac{\zeta-w}{1-\overline{w}\zeta}$ が取れる（§1 参照）. ゆえに $g\cdot 0=z,\,h\cdot 0=w$ とおくとき，$h_0h\cdot 0=h_0\cdot w=0$. ゆえに $k:=h_0h\in K$. このとき，$h^{-1}=k^{-1}h_0$ であり，$\Phi_{\frac12+i\lambda}$ は radial であるから

$$\Phi_{\frac12+i\lambda}(h^{-1}g\cdot 0)=\Phi_{\frac12-i\lambda}(h_0g\cdot 0)=\Phi_{\frac12+i\lambda}\Big(\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\Big)$$

となって証明終わり. □

定理 8.6. $\mu\notin\mathbb{Z}$ のとき，表現 T_μ は位相的に既約. すなわち，$T_\mu(G)$ 不変な $L^2(\partial\mathcal{D})$ の閉部分空間は $\{0\}$ か全体のみ.

証明. π_μ の方で証明しよう. $V\neq\{0\}$ を $\pi_\mu(G)$ 不変な $\mathfrak{H}_\mu$ の閉部分空間とする. $0\neq F\in V$ をとると，ある $\exists z_0\in\mathcal{D}$ において $F(z_0)\neq 0$. ここで $g\in G$ をとって，$z_0=g^{-1}\cdot 0$ とする. $V\ni\pi_\mu(g)F$ であり，$\pi_\mu(g)F(0)=F(g^{-1}\cdot 0)=F(z_0)\neq 0$ より，V は $F_0(0)\neq 0$ となる函数 F_0 を含む.

$$F_0^\natural(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(k_\theta\cdot z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi_\mu(k_\theta^{-1})F_0(z)\,d\theta$$

を考える. V が $\pi_\mu(G)$ 不変な閉部分空間ということから，Riemann 和の極限と見て

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi_\mu(k_\theta^{-1})F_0\,d\theta\in V.$$

一方 point evaluation は $\mathfrak{H}_\mu$ で連続なので，Riemann 和の極限における等式と見て

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi_\mu(k_\theta^{-1})F_0\,d\theta\Big)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi_\mu(k_\theta^{-1})F_0(z)\,d\theta.$$

ゆえに $F_0^\natural = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \pi_\mu(k_\theta^{-1})F_0\,d\theta \in V$．しかも $F_0^\natural(0) = F_0(0) \neq 0$．さて，$F_0^\natural$ は V に属する radial な函数で，$\mathcal{L}F_0^\natural = \mu(\mu-1)F_0^\natural$ をみたす．命題 5.2 とその後の注意より，定数 C が存在して，$F_0^\natural = C\cdot\Phi_\mu$．そして $0 \neq F_0^\natural(0) = C\cdot\Phi_\mu(0) = C$ より，$\Phi_\mu = C^{-1}F_0^\natural \in V$．従って，$\mathrm{span}\,\{\pi_\mu(g)\Phi_\mu\,;\,g\in G\}$ が $\mathfrak{H}_\mu$ で稠密であることが示されれば，$V = \mathfrak{H}_\mu$ となって証明が終わる．そこで

$$F_1 = \mathcal{P}_\mu f_1 \in \big(\mathrm{span}\,\{\pi_\mu(g)\Phi_\mu\,;\,g\in G\}\big)^\perp$$

とする．$\pi_\mu(g)\Phi_\mu = \pi_\mu(g)\mathcal{P}_\mu\mathbf{1} = \mathcal{P}_\mu T_\mu(g)\mathbf{1}$ (cf. (8.6)) より

$$\begin{aligned}0 = (\pi_\mu(g)\Phi_\mu\,|\,F_1) &= (T_\mu(g)\mathbf{1}\,|\,f_1)_{L^2(\partial\mathcal{D})}\\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{1-\mu}(g\cdot 0,\,\gamma)\overline{f_1(\gamma)}\,d\gamma\\ &= (\mathcal{P}_{1-\mu}\overline{f}_1)(g\cdot 0) \qquad (\text{for all } g\in G).\end{aligned}$$

$1-\mu \neq 0, -1, -2\ldots$ ゆえ，$\mathcal{P}_{1-\mu}$ は単射．ゆえに $f_1 = 0$．従って $F_1 = 0$． □

重要なので，最後の所で示したことを命題にしておこう：

命題 8.7. $\mu \notin \mathbb{Z}$ ならば $\mathbf{1}$ は T_μ の巡回ベクトル，すなわち $\mathrm{span}\,\{T_\mu(g)\mathbf{1}\,;\,g\in G\}$ は $L^2(\partial\mathcal{D})$ で稠密．

定理 8.8. $\lambda\in\mathbb{R}$ のとき，$T_{\frac12+i\lambda} \cong T_{\frac12-i\lambda}$.

証明. 命題 5.3 より $\Phi_{\frac12+i\lambda} = \Phi_{\frac12-i\lambda}$. これより

$$(T_{\frac12+i\lambda}(g)\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}) = (T_{\frac12-i\lambda}(g)\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}) \qquad (\forall g\in G).$$

$\mathbf{1}$ が $T_{\frac12\pm i\lambda}$ の巡回ベクトルであることから

$$U\Big(\sum c_j T_{\frac12+i\lambda}(g_j)\mathbf{1}\Big) := \sum c_j T_{\frac12-i\lambda}(g_j)\mathbf{1}$$

によって，$L^2(\partial\mathcal{D})$ 上のユニタリ作用素で，$UT_{\frac12+i\lambda}(g) = T_{\frac12-i\lambda}(g)U$ $(\forall g\in G)$ となるものが定義される．詳細は演習． □

§9. $L^2(\mathcal{D})$ の分解：Non-Euclidean Fourier Transform.

本論に入る前に，$\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換を，$L^2(\mathbb{R})$ の分解の手段としての Euclidean Fourier transform という観点から見てみよう．

まず $\mathbb{R}$ を加法群と見て，$\mathbb{R}$ に平行移動で作用していると見る：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(x,t)\mapsto t+x\in\mathbb{R}$. この作用は函数空間 $L^2(\mathbb{R})$ に直ちに持ち上がる：

$$\rho(x)f(t) := f(t-x) \qquad (f\in L^2(\mathbb{R}),\, x\in\mathbb{R}).$$

作用素 $\rho(x): f\mapsto\rho(x)f$ は，加法群 $\mathbb{R}$ の表現になっている：

$$\rho(x_1+x_2) = \rho(x_1)\rho(x_2), \qquad \rho(0) = \mathrm{Id}.$$

さらに，Lebesgue 測度の平行移動不変性から，各作用素 $\rho(x)$ はユニタリである：

$$\begin{aligned}(\rho(x)f_1 \,|\, \rho(x)f_2) &= \int_{\mathbb{R}} f_1(t-x)\overline{f_2(t-x)}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt \\ &= (f_1 \,|\, f_2).\end{aligned}$$

従って，表現 $\rho : x \mapsto \rho(x)$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上への加法群 $\mathbb{R}$ のユニタリ表現になっている．この表現 ρ は可約である．その既約分解を行うのに Fourier 変換を用いる：

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \quad \text{（一般の } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ に対しては積分は平均収束の意味）．}$$

このとき，

$$\mathcal{F}\rho(x)f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)e^{-i\lambda t}\,dt = e^{-i\lambda x}\mathcal{F}f(\lambda).$$

各 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$\chi_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$ $(x \in \mathbb{R})$ とおくと，χ_λ は加法群 $\mathbb{R}$ の 1 次元表現である．従って既約である．上の計算は，Fourier 変換 $\mathcal{F}$ によって，表現 ρ は，各点 $\lambda \in \mathbb{R}$ において，既約表現 χ_λ になっていることを示している：$\mathcal{F}\rho(x)f(\lambda) = \chi_\lambda(x)\mathcal{F}f(\lambda)$．より正確にいうと，Hilbert 空間の同型

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, dt) \cong L^2\left(\mathbb{R}, \frac{d\lambda}{2\pi}\right) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}_\lambda\,d\lambda \qquad (\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C},\ \forall\lambda \in \mathbb{R})$$

によって，表現 ρ が次のように既約分解することを示している：

$$\rho \cong \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\lambda\,d\lambda.$$

話を単位円板 $\mathcal{D}$ に戻そう．$\mathcal{D}$ を保つ 1 次分数変換の群 G を考えてきた．まず，$\mathcal{D}$ 上の G 不変測度 $d\sigma$ を思い出そう：

$$d\sigma(z) := 4\,\frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2} \qquad (z = x+iy).$$

以下 $L^2(\mathcal{D})$ は $L^2(\mathcal{D}, d\sigma)$ のこととする．$L^2(\mathcal{D})$ には G の自然なユニタリ表現 ρ がある：

$$\rho(g)F(z) := F(g^{-1}\cdot z) \qquad \text{（準正則表現）．}$$

目的： このユニタリ表現 ρ を既約分解すること．

次に前節で導入した連続主系列表現 $(T_\mu, L^2(\partial\mathcal{D}))$ を思い出そう：

$$T_\mu(g)\varphi(\gamma) = P_{\mathcal{D}}^{1-\mu}(g\cdot 0,\, \gamma)\varphi(g^{-1}\cdot\gamma) \qquad (\varphi \in L^2(\partial\mathcal{D})).$$

$\mathrm{Re}\,\mu = 1/2$ のとき，T_μ は（強連続な）既約ユニタリ表現で，$T_{\frac{1}{2}+i\lambda} \cong T_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$．さらに，$\mathbf{1}$ を $\partial\mathcal{D}$ 上の恒等的に 1 である函数とするとき，

$$(T_\mu(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}) = \Phi_{1-\mu}(g\cdot 0) = \Phi_\mu(g\cdot 0) \qquad \text{（命題 5.3）．} \tag{9.1}$$

♠ $\boldsymbol{c}(\lambda) := \pi^{-1/2} \cdot \dfrac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}$ を $\boldsymbol{c}$ 函数とすると，$f \in C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ のとき

$$\int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 \, d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} \quad \text{（定理 7.3 と命題 7.5 直前の注意）.}$$

ここで $\widehat{f}$ は f の球 Fourier 変換で

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathcal{D}} f(z) \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z) \, d\sigma(z).$$

(9.1) を使って書き直すと：

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(g\cdot 0)(T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}) \, dg = \Big(\int_G f(g\cdot 0) T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g)\mathbf{1} \,\Big|\, \mathbf{1} \Big).$$

定義：（必ずしも K 不変とは限らない）$f \in L^1(\mathcal{D})$ に対して，

$$\Psi f(\lambda) := \int_G f(g\cdot 0) T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g)\mathbf{1} \, dg \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

により，ベクトル値（$L^2(\partial\mathcal{D})$ 値）函数 Ψf を定義する．$\|$ 被積分函数 $\| \leqq |f(g\cdot 0)|$ ゆえ，積分は絶対収束していることに注意．

$\Psi f(\lambda)$ のままだと少々取り扱いにくいので，これを書き換えよう．$f \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ とする．任意の $\varphi \in L^2(\partial\mathcal{D})$ に対して

$$\begin{aligned}
(\Psi f(\lambda) \,|\, \varphi) &= \int_G f(g\cdot 0)(T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g)\mathbf{1} \,|\, \varphi) \, dg \\
&= \int_G f(g\cdot 0) \int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0, \gamma) \overline{\varphi(\gamma)} \, d\gamma dg \\
&= \int_{\partial\mathcal{D}} \overline{\varphi(\gamma)} \, d\gamma \int_G f(g\cdot 0) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0, \gamma) \, dg.
\end{aligned}$$

ゆえに a.e.$\gamma \in \partial\mathcal{D}$ に対して

$$\Psi f(\lambda)(\gamma) = \int_G f(g\cdot 0) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0, \gamma) \, dg = \int_{\mathcal{D}} f(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z, \gamma) \, d\sigma(z).$$

定義：次式で定義される $\widetilde{f}$ を f の **non-Euclidean Fourier transform** あるいは **Helgason–Fourier 変換** という：

$$\widetilde{f}(\lambda, \gamma) := \int_{\mathcal{D}} f(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z, \gamma) \, d\sigma(z).$$

♠ f が radial のとき，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\lambda,\gamma) &= \int_{\mathcal{D}} f(k_\theta \cdot z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\, d\sigma(z)\\ &= \int_{\mathcal{D}} f(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(k_\theta^{-1}\cdot z,\, \gamma)\, d\sigma(z)\\ &= \int_{\mathcal{D}} f(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\, k_\theta \cdot \gamma)\, d\sigma(z).\end{aligned}$$

従って，$\gamma = e^{i\psi}$ とおいて，θ に関して積分すると

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\lambda,\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{D}} f(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z, e^{i(\theta+\psi)})\, d\sigma(z)\\ &= \int_{\mathcal{D}} f(z)\Phi_{\frac{1}{2}+i\lambda}(z)\, d\sigma(z) = \widehat{f}(\lambda).\end{aligned}$$

すなわち，$\widetilde{f}(\lambda,\gamma)$ は γ に関して定数であって，f の球 Fourier 変換 $\widehat{f}(\lambda)$ に等しい．従ってまた，$\Psi f(\lambda)$ は定数函数であって，それは $\widehat{f}(\lambda)\mathbf{1}$ に等しい．

定義：右辺の積分が意味を持つような $\mathcal{D}$ 上の函数 f_1, f_2 に対して

$$f_1 * f_2(z) := \int_G f(g\cdot 0) f_2(g^{-1}\cdot z)\, dg \qquad (z\in\mathcal{D}).$$

一般に非可換 $f_1 * f_2 \neq f_2 * f_1$ であることに注意．

以下では，non-Euclidean Fourier transform を反転する．$f \in C_c^\infty(\mathcal{D})$, $z_0 := g_0\cdot 0 \in \mathcal{D}$ を固定し，$h(z) := f(g_0\cdot z)$ を考える．明らかに $h \in C_c^\infty(\mathcal{D})$.

$$h^\natural(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(k_\theta\cdot z)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g_0 k_\theta\cdot z)\, d\theta$$

とおく．$h^\natural \in C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ であり，$h^\natural(0) = f(g_0\cdot 0) = f(z_0)$.　定理 7.3 より

$$f(z_0) = h^\natural(0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty (h^\natural)\widehat{\ }(\lambda)\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}. \tag{9.2}$$

ここで定義に戻って $(h^\natural)\widehat{\ }$ を計算すると

$$\begin{aligned}(h^\natural)\widehat{\ }(\lambda) &= \int_{\mathcal{D}} h^\natural(z)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\, d\sigma(z)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}}\int_0^{2\pi} f(g_0 k_\theta\cdot z)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z)\, d\theta d\sigma(z)\\ &= \int_{\mathcal{D}} f(z)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0^{-1}\cdot z)\, d\sigma(z).\end{aligned}$$

補題 6.3 より $\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0^{-1}g\cdot 0) = \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g^{-1}g_0\cdot 0) = \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g^{-1}\cdot z_0)$．ゆえに

$$(h^\natural)\widehat{\ }(\lambda) = \int_G f(g\cdot 0)\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g^{-1}\cdot z_0)\, dg = f * \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0).$$

補題 9.1. $f * \Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0) = \int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{f}(\lambda,\gamma) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0,\gamma)\, d\gamma$ $(\forall z_0 \in \mathcal{D})$.

証明． 定理 8.5 の証明中の計算と命題8.4 より，$g, g_0 \in G$ のとき

$$\begin{aligned}\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g^{-1}g_0\cdot 0) &= K_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0\cdot 0,\, g\cdot 0)\\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0\cdot 0,\,\gamma)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0,\,\gamma)\,d\gamma.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}f*\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0) &= \int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0\cdot 0,\,\gamma)\,d\gamma\int_{\mathcal{D}} f(z)P^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\,d\sigma(z)\\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{f}(\lambda,\gamma)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0,\gamma)\,d\gamma\end{aligned}$$

となって，証明終わり． □

以上により次式を得る：

$$(h^{\natural})\hat{}\,(\lambda) = \int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{f}(\lambda,\gamma)P^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0,\gamma)\,d\gamma.$$

これを (9.2) に代入して次の定理が証明されたことになる：

定理 9.2. $f \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ のとき

$$f(z) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{f}(\lambda,\gamma)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z,\gamma)\,\frac{d\gamma\,d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} \qquad \text{（反転公式）}.$$

定理 9.3. Non-Euclidean Fourier transform $f \mapsto \widetilde{f}$ により

$$L^2(\mathcal{D}) \cong L^2\left([0,\infty)\times\partial\mathcal{D},\, \frac{1}{2\pi^2}\frac{d\lambda\,d\gamma}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}\right). \tag{9.3}$$

証明． 補題 9.1 の両辺に $\overline{f(z_0)}$ をかけて z_0 について $\mathcal{D}$ 上積分すると

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} |\widetilde{f}(\lambda,\gamma)|^2\,d\gamma &= \int_{\mathcal{D}} f*\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0)\overline{f(z_0)}\,d\sigma(z_0)\\ &= \int_{\mathcal{D}} \overline{f(z_0)}\,d\sigma(z_0)\int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{f}(\lambda,\gamma)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}-i\lambda}(z_0,\gamma)\,d\gamma.\end{aligned}$$

$|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}$ をかけて $[0,\infty)$ 上積分すると

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_{\partial\mathcal{D}} |\widetilde{f}(\lambda,\gamma)|^2\,\frac{d\gamma\,d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} = \int_{\mathcal{D}} |f(z_0)|^2\,d\sigma(z_0).$$

従って，Non-Euclidean Fourier transform は $L^2(\mathcal{D})$ から (9.3) の右辺の L^2 空間への等長写像に拡張される．これが全射であることを示すためにいくらか準備が必要である．

補題 9.4. $f \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ かつ $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ のとき，$(f*\psi)^{\sim}(\lambda,\gamma) = \widetilde{f}(\lambda,\gamma)\widehat{\psi}(\lambda)$.

証明．　定義より

$$
\begin{aligned}
(f*\psi)^{\sim}(\lambda,\gamma) &= \int_{\mathcal{D}} f*\psi(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\mathcal{D}}\int_G f(g\cdot 0)\psi(g^{-1}\cdot z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\,dg\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\mathcal{D}}\int_G f(g\cdot 0)\psi(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot z,\,\gamma)\,dg\,d\sigma(z).
\end{aligned}
$$

ここで $P_{\mathcal{D}}(g\cdot z,\,\gamma)=P_{\mathcal{D}}(z,\,g^{-1}\cdot\gamma)P_{\mathcal{D}}(g\cdot 0,\,\gamma)$ ゆえ

$$
\begin{aligned}
(f*\psi)^{\sim}(\lambda,\gamma) &= \int_G\int_{\mathcal{D}} f(g\cdot 0)\psi(z) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\,g^{-1}\cdot\gamma) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0,\,\gamma)\,d\sigma(z)dg \\
&= \int_G f(g\cdot 0)\widetilde{\psi}(\lambda,\,g^{-1}\cdot\gamma) P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(g\cdot 0,\,\gamma)\,dg.
\end{aligned}
$$

ところが ψ は radial であるから，先に注意したように $\widetilde{\psi}(\lambda,\gamma)=\widehat{\psi}(\lambda)$ $(\forall\gamma\in\partial\mathcal{D})$．よって

$$
(f*\psi)^{\sim}(\lambda,\gamma)=\widehat{\psi}(\lambda)\int_{\mathcal{D}} f(z)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\,d\sigma(z)=\widehat{\psi}(\lambda)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)
$$

となって，証明が終わる．　□

以下，無限遠で 0 となる $\mathbb{R}$ 上の連続な偶函数の全体を　$C_0(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ とすると，これは sup-norm と各点ごとの積で可換な Banach algebra になる．さて，$\mathcal{A}:=\{\widehat{\psi}\,;\,\psi\in C_c^\infty(\mathcal{D})^K\}$ を考える．$\widehat{\psi}=\mathcal{F}\mathcal{H}\psi$ であり，Harish-Chandra 変換 $\mathcal{H}$ は $C_c^\infty(\mathcal{D})^K$ と $C_c^\infty(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ の間の全単射を与えていたので (cf. §7)，$\mathcal{A}\subset C_0(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ である．

(1) $\widehat{\psi}_1\widehat{\psi}_2=(\psi_1*\psi_2)^\wedge$ より，$\mathcal{A}$ は subalgebra,

(2) $\overline{(\widehat{\psi})}=(\overline{\psi})^\wedge$ より，$\mathcal{A}$ は複素共役をとる操作で安定,

(3) もし $\widehat{\psi}(\lambda_1)=\widehat{\psi}(\lambda_2)$ がすべての $\widehat{\psi}\in\mathcal{A}$ に対して成り立てば，$\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda_1}=\Phi_{\frac{1}{2}-i\lambda_2}$．Laplace–Beltrami 作用素 $\mathcal{L}$ を apply して，$\frac{1}{4}+\lambda_1^2=\frac{1}{4}+\lambda_2^2$．ゆえに $\lambda_1=\pm\lambda_2$．従って，$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}/\{\pm1\}$ の点を分離する．

(4) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ に共通零点を持たない．

以上の (1) 〜 (4) と，局所コンパクト空間での Stone–Weierstrass の定理から，$\mathcal{A}$ は $C_0(\mathbb{R})$ で稠密である（1 点コンパクト化に Stone-Weierstrass の定理を適用する）．

さて定理 9.3 の証明を続けよう．$F\in\left[L^2(\mathcal{D})^{\sim}\right]^{\perp}$ とする．すなわち

$$
\int_0^\infty\int_{\partial\mathcal{D}} F(\lambda,\gamma)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\,\frac{d\gamma\,d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}=0 \qquad (\forall f\in C_c^\infty(\mathcal{D}))
$$

とする．f の代わりに $f*\psi$ $(\psi\in C_c^\infty(\mathcal{D})^K)$ として，補題 9.4 より

$$
\int_0^\infty \widehat{\psi}(\lambda)\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}\int_{\partial\mathcal{D}} F(\lambda,\gamma)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\,d\gamma=0 \qquad (\forall f\in C_c^\infty(\mathcal{D}),\,\forall\psi\in C_c^\infty(\mathcal{D})^K).
$$

$\mathcal{A}$ は $C_0(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ で稠密ゆえ，特に $\widehat{\psi}$ を $C_c(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$ の任意の函数に置き換えることができる．ゆえに，各 $f\in C_c^\infty(\mathcal{D})$ に対して，$[0,\infty)$ の零集合 N_f が存在して，$\lambda\notin N_f$

ならば

$$F(\lambda,\cdot)\in L^2(\partial\mathcal{D}) \quad \text{かつ} \quad \int_{\partial\mathcal{D}} F(\lambda,\gamma)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\,d\gamma = 0. \tag{9.4}$$

以下この条件をみたす零集合が f について共通に取り直すことができることを示そう．そのために $\phi_n\in C_c^\infty$ $(n=1,2,\dots)$ を

$$\phi_n(z) := \begin{cases} 1 & \left(d(0,z)\leqq n-\frac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(d(0,z)\geqq n+\frac{1}{n}\right), \end{cases} \qquad 0\leqq \phi_n \leqq 1$$

をみたすようにとり，可算集合 Q を

$$Q := \{p\phi_n\ ;\ p \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ 上の有理係数多項式函数，} n=1,2,\dots\}$$

で定義する．$N := \bigcup_{f\in Q} N_f$ は零集合である．$f\in C_c^\infty(\mathcal{D})$ が与えられたとき，番号 n が存在して，$f=f\phi_n$ となる．Weierstrass の多項式近似定理より，

$$\exists f_k := p_k\phi_n \in Q\ \ (k=1,2,\dots)\ \text{ s.t. }\ f_k\to f\ (\mathcal{D} \text{ 上一様}).$$

このとき

$$\left|\widetilde{f_k}(\lambda,\gamma)-\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\right| \leqq \int_{\mathrm{supp}(\phi_n)} |f_k(z)-f(z)|\, P_{\mathcal{D}}^{1/2}(z,\gamma)\,d\sigma(z)$$

より，各 $\lambda\in\mathbb{R}$ において，$\gamma\in\partial\mathcal{D}$ について一様に $\widetilde{f_k}(\lambda,\gamma)\to\widetilde{f}(\lambda,\gamma)$．これと (9.4) より，$\lambda\notin N$ ならば

$$F(\lambda,\cdot)\in L^2(\partial\mathcal{D}) \quad \text{かつ} \quad \int_{\partial\mathcal{D}} F(\lambda,\gamma)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\,d\gamma = 0 \quad (\forall f\in C_c^\infty(\mathcal{D})). \tag{9.5}$$

補題 9.5. 任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して，$\{\widetilde{f}(\lambda,\cdot)\ ;\ f\in C_c^\infty(\mathcal{D})\}$ は $L^2(\partial\mathcal{D})$ で稠密．

証明． $H\in L^2(\partial\mathcal{D})$ かつ

$$\int_{\partial\mathcal{D}} H(\gamma)\widetilde{f}(\lambda,\gamma)\,d\gamma = 0 \qquad (\text{for } \forall f\in C_c^\infty(\mathcal{D}))$$

と仮定すると

$$0 = \int_{\mathcal{D}} f(z)\int_{\partial\mathcal{D}} H(\gamma)P_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}+i\lambda}(z,\gamma)\,d\gamma\,d\sigma(z) = \int_{\mathcal{D}} f(z)\mathcal{P}_{\frac{1}{2}+i\lambda}H(z)\,d\sigma(z).$$

補題 8.1 より Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}+i\lambda}$ は単射．ゆえに $H=0$． □

補題 9.5 と (9.5) により

$$\int_E F(\lambda,\gamma)\,d\gamma = 0 \qquad (\text{for } \forall\lambda\in[0,\infty)\setminus N \text{ and } \forall E\in\mathcal{B}(\partial\mathcal{D})).$$

Fubini の定理により，任意の Borel 矩形 $R\subset[0,\infty)\times\partial\mathcal{D}$ に対して，

$$\iint_R F(\lambda,\gamma)\,d\gamma\,d\lambda = 0.$$

これは $F=0$ を意味する． □

定理 9.6. Ψ は Hilbert 空間の同型

$$L^2(\mathcal{D}) \cong \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} L^2(\partial\mathcal{D})\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}$$

を与え，それにより次のユニタリ表現 ρ の既約分解を得る：

$$\rho \cong \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} T_{\frac{1}{2}-i\lambda}\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}.$$

証明. $f \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ のとき，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\Psi f(\lambda)(\gamma) = \widetilde{f}(\lambda, \gamma)$ (a.e.γ) であること，及び

$$\Psi(\rho(g_0)f)(\lambda) = \int_G f(g_0^{-1}g\cdot 0)T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g)\mathbf{1}\,dg = T_{\frac{1}{2}-i\lambda}(g_0)(\Psi f(\lambda))$$

であることに注意． □

$\lambda \in \mathbb{R}$ のとき，Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ で $L^2(\partial\mathcal{D}) \cong \mathfrak{H}_{\frac{1}{2}-i\lambda}$ であったから次の定理も得る．$\mu = \frac{1}{2} - i\lambda$ のとき，$\mu(\mu-1) = -\big(\frac{1}{4}+\lambda^2\big)$ に注意．

定理 9.7. $L^2(\mathcal{D}) \cong \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \mathfrak{H}_{\frac{1}{2}-i\lambda}\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}$．これにより $\mathcal{L}$ のスペクトル分解を得る：

$$\mathcal{L} \cong \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} -\Big(\frac{1}{4}+\lambda^2\Big)\,\frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}.$$

§10. Bergman 空間と複素解析的表現

以下 $g \in G$ と $z \in \mathcal{D}$ に対して，$J(g, z) := g'(z)$ とおく．
$g(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ $(|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$ のとき，$g'(z) = \dfrac{1}{(\overline{\beta}z+\overline{\alpha})^2}$ であったことも思い出しておこう (§1)．次の (1),(2) が成り立つ：

(1) $J(g_1g_2, z) = J(g_1,\, g_2\cdot z)J_2(g_2, z)$　(chain rule).
(2) $J(I, z) = 1$　$(\forall z \in \mathcal{D})$.

さらに次の関係式も思い出しておこう（命題 1.3 の証明参照）：

$$|J(g,z)|(1-|z|^2) = 1 - |g\cdot z|^2. \tag{10.1}$$

定義：$\alpha > 1$ とする．$H^2_\alpha(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ 上正則な函数 f で

$$\|f\|^2 := \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy < \infty \qquad (z = x+iy)$$

となるもの全体とする．$H^2_\alpha(\mathcal{D})$ を **weighted Bergman space** と呼ぶ．$\alpha = 2$ のときの $H^2(\mathcal{D}) := H^2_2(\mathcal{D})$ は **Bergman space** と呼ばれているものである．

命題 10.1. $\alpha > 1$ とする．$H^2_\alpha(\mathcal{D}) \neq \{0\}$ であり，$\phi_n(z) := \left[\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\,n!}\right]^{1/2} z^n$ とおくとき，$\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ は $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ の ONB をなす．特に $\|\mathbf{1}\| = 1$ である．

証明． f を $\mathcal{D}$ 上正則な函数とし，$f(z)=\sum a_n z^n$ を f の $z=0$ における Taylor 展開とする．$0<\rho<1$ とするとき

$$
\begin{aligned}
\iint_{|z|\leqq\rho}|f(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy &= \sum_{n,m} a_n\overline{a}_m \iint_{|z|\leqq\rho} z^n\overline{z}^m(1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy \\
&= \sum_{n,m} a_n\overline{a}_m \int_0^\rho r^{n+m+1}(1-r^2)^{\alpha-2}\,dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \int_0^\rho r^{2n+1}(1-r^2)^{\alpha-2}\,dr \\
&= \pi\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \int_0^{\rho^2} r^n(1-r)^{\alpha-2}\,dr.
\end{aligned}
$$

ここで $\rho\uparrow 1$ とすると，単調収束の定理から

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}}|f(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy &= \pi\sum |a_n|^2\,B(n+1,\alpha-1) \\
&= \pi\sum \frac{n!\,\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(n+\alpha)}\,|a_n|^2.
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\|f\|^2=\sum \dfrac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,|a_n|^2$．これより容易に命題の結論を得る． □

さて $f\in H^2_\alpha(\mathcal{D})$ $(\alpha>1)$ とし，$z=0$ での f の Taylor 展開を $f(z)=\sum a_n z^n$ とする．

$$
|f(z)|\leqq\sum |a_n||z|^n \leqq \left[\sum \frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,|a_n|^2\right]^{1/2}\left[\sum \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(\alpha)}\,|z|^{2n}\right]^{1/2}
$$

であること，及び

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(\alpha)} &= \frac{(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)\alpha}{n!} \\
&= (-1)^n\,\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} \\
&= (-1)^n\binom{-\alpha}{n}
\end{aligned}
\tag{10.2}
$$

であることから，$|f(z)|\leqq\|f\|(1-|z|^2)^{-\alpha/2}$．これは $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ の収束から広義一様収束が出ることを示している．特に $f\mapsto f(z)$ は $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ 上の連続な線型形式である．Poisson 変換の像空間でのとき (§8) と全く同様にして，$H^2_\alpha(\mathcal{D})$ は再生核 K_α を持つことがわかる：

$$
f(w)=(f\,|\,K_\alpha(\cdot,w)) \qquad (\forall f\in H^2_\alpha(\mathcal{D})).
$$

以下 K_α を求めよう．f の Taylor 展開を次のように見る：

$$
f(w)=\sum\frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,a_n\overline{\left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(n)}\,\overline{w}^n\right]}. \tag{10.3}
$$

$K_\alpha(z,w) := \sum \left[\dfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(n)}\right] \overline{w}^n z^n$ とおくと，(10.2) より $K_\alpha(z,w) = (1-z\overline{w})^{-\alpha}$．ここで $K_\alpha(\cdot,w) \in H^2_\alpha(\mathcal{D})$ に注意．実際

$$\sum \frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} \left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(n)}\right]^2 |w|^{2n} = (1-|w|^2)^{-\alpha} = K_\alpha(w,w) < \infty.$$

そうすると (10.3) は $f(w) = (f \,|\, K_\alpha(\cdot,w))$ と見ることができる．

命題 10.2. $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ は再生核 $K_\alpha(z,w) = (1-z\overline{w})^{-\alpha}$ を持つ．

さて $\alpha = 2,4,6,\ldots$ に対して

$$U_\alpha(g)f(z) := J(g^{-1},z)^{\alpha/2}\, f(g^{-1}\cdot z) \qquad (f \in H^2_\alpha(\mathcal{D}),\, g \in G)$$

とおく．容易に

$$U_\alpha(g_1g_2) = U_\alpha(g_1)U_\alpha(g_2)\ (g_1,g_2 \in G), \qquad U_\alpha(I) = \mathrm{Id}.$$

定理 10.3. $(U_\alpha, H^2_\alpha(\mathcal{D}))$ は G の既約ユニタリ表現である（ただし，ユニタリな主系列 $(T_{\frac{1}{2}+i\lambda}, L^2(\partial\mathcal{D}))$ とは同値でない）．

証明． 各表現作用素 $U_\alpha(g)$ がユニタリであることを検証しよう．表現作用素ゆえ，等長作用素であればよい．

$$\begin{aligned}\|U_\alpha(g)f\|^2 &= \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |J(g^{-1},z)|^\alpha |\, f(g^{-1}\cdot z)|^2 (1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy \\ &= \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |J(g^{-1},\, g\cdot z)|^\alpha\, |f(z)|^2 (1-|g\cdot z|^2)^{\alpha-2}\, |g'(z)|^2\,dxdy.\end{aligned}$$

ここで，$J(g^{-1},\, g\cdot z) = J(g,z)^{-1}$ および $g'(z) = J(g,z)$ より

$$\begin{aligned}\|U_\alpha(g)f\|^2 &= \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |J(g,z)|^{-\alpha+2}\, |f(z)|^2 (1-|g\cdot z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy \\ &= \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy = \|f\|^2 \quad (\because (10.1))\end{aligned}$$

既約であることの証明に次の補題が必要である．

補題 10.4. $K_\alpha(g\cdot z,\, g\cdot w) = J(g,z)^{-\alpha/2}\, K_\alpha(z,w)\, \overline{J(g,w)^{-\alpha/2}}$.

証明． 任意の $f \in H^2_\alpha(\mathcal{D})$ に対して

$$\begin{aligned}(f \,|\, K_\alpha(\cdot,\, g\cdot w)) &= f(g\cdot w) = J(g,w)^{-\alpha/2}\, U_\alpha(g^{-1})f(w) \\ &= J(g,w)^{-\alpha/2} \big(U_\alpha(g^{-1})f \,\big|\, K_\alpha(\cdot,w)\big) \\ &= J(g,w)^{-\alpha/2} \big(f \,\big|\, U_\alpha(g)K_\alpha(\cdot,w)\big).\end{aligned}$$

f は任意であるから，$K_\alpha(z,\, g\cdot w) = \overline{J(g,w)^{-\alpha/2}}\, J(g^{-1},z)^{\alpha/2}\, K_\alpha(g^{-1}\cdot z,\, w)$.
z を $g\cdot z$ と置き換えることにより補題を得る． □

さて既約性の証明に入ろう．$V \neq \{0\}$ を $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ の閉部分空間で $U_\alpha(G)$ 不変であるとする．V でも当然 point evaluation は連続であるから，V も再生核 L を持つ．再生核の一般的な性質から $L(z,w) = \overline{L(w,z)}$ が出るので (cf. §8)，$L(z,w)$ は z について正則，w について反正則であることに注意しておこう．V の $U_\alpha(G)$ 不変性により，補題 10.4 の議論が L にも使えて

$$L(g \cdot z,\, g \cdot w) = J(g,z)^{-\alpha/2}\, L(z,w)\, \overline{J(g,w)^{-\alpha/2}}.$$

$\beta = L(0,0)$ とおこう．$K_\alpha(0,0) = 1$ であるので，$L(0,0) = \beta \cdot K_\alpha(0,0)$ となる．任意の $z \in \mathcal{D}$ に対して，$g \in G$ を選んで $z = g \cdot 0$ とすると

$$\begin{aligned} L(z,z) &= L(g \cdot 0,\, g \cdot 0) = |J(g,0)|^{-\alpha}\, L(0,0) \\ &= \beta \cdot |J(g,0)|^{-\alpha} K_\alpha(0,0) = \beta \cdot K_\alpha(z,z). \end{aligned}$$

これより次の一致の定理を使えば，$L = \beta \cdot K_\alpha$ が出る．

補題 10.5. $F(z,w)$ は $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ 上の函数で，z について正則，w について反正則であるとする．もし $F(z,z) = 0$ $(\forall z \in \mathcal{D})$ ならば $F = 0$ である．

証明． $\Phi(z,w) := F(z,\overline{w})$ とおくと Φ は $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ 上正則．次の変数変換を施そう：

$$\begin{cases} z = u + iv \\ w = u - iv \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2}(z + w) \\ v = \dfrac{1}{2i}(z - w). \end{cases}$$

函数 $\Psi(u,v) := \Phi(z,w) = \Phi(u+iv, u-iv)$ を考える．明らかに Ψ は正則である．$\overline{w} = z \iff u, v \in \mathbb{R}$ であるから，仮定は $\Psi|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = 0$ ということ．たとえばべき級数展開を考えれば $\Psi = 0$ が出る．よって $\Phi = 0$. □

既約性の証明を続けよう．$L = \beta \cdot K_\alpha$ となったが，ここで $\beta \neq 0$ である．そうでなければ $L = 0$ となり $V = \{0\}$ となってしまう．さて $f \in V^\perp$ と仮定しよう．任意の $w \in \mathcal{D}$ に対して

$$f(w) = (f \,|\, K_\alpha(\cdot, w)) = \frac{1}{\beta}\,(f \,|\, L(\cdot, w)) = 0.$$

ゆえに $f = 0$ となって，$V = H^2_\alpha(\mathcal{D})$ を得る． □

定義：既約ユニタリ表現 $(U_\alpha, H^2_\alpha(\mathcal{D}))$ $(\alpha = 2, 4, \ldots)$ を複素解析的離散系列表現という．

注意：α が偶数でなくなると，$J(g,z)^{\alpha/2}$ は一価でなくなるが，G の適当な被覆群 $\widetilde{G}$ をとることにより，$\widetilde{G}$ の既約ユニタリ表現 U_α を得る．$\alpha \in \mathbb{Z}$ なら $\widetilde{G} = SU(1,1)$ でよく，$\alpha \in \mathbb{Q}$ なら G の有限被覆，$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ならば普遍被覆（それは無限重の被覆になっている）を取らねばならない．

「離散」系列ということばを理解するために，U_α の一つの行列要素を計算してみよう．以下 $u_\alpha(g) := (U_\alpha(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1})$ を考える．$J(k_\theta, z) = e^{i\theta}$ より，$U_\alpha(k_\theta)\mathbf{1} = e^{-i\alpha\theta/2}\mathbf{1}$. ゆえに

$$u_\alpha(k_\varphi a_\tau k_\psi) = e^{i\alpha(\varphi - \psi)/2}\, u_\alpha(a_\tau).$$

$u_\alpha(a_\tau)$ を計算しよう．$J(a_\tau, z) = \big((\sinh(\tau/2)\cdot z + \cosh(\tau/2)\big)^{-2}$ より

$$\begin{aligned} u_\alpha(a_\tau) &= \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-2}}{\big(-\sinh(\tau/2)\cdot z + \cosh(\tau/2)\big)^\alpha}\,dxdy \\ &= \frac{\alpha-1}{\pi}\cdot\frac{1}{\cosh^\alpha(\tau/2)}\int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha-2}\,dr\int_0^{2\pi}(1-re^{i\theta}\tanh(\tau/2))^{-\alpha}\,d\theta. \end{aligned}$$

ここで，$(1-re^{i\theta}\tanh(\tau/2))^{-\alpha}$ を 2 項展開して項別積分すればわかるように

$$\int_0^{2\pi}(1-re^{i\theta}\tanh(\tau/2))^{-\alpha}\,d\theta = 2\pi.$$

従って

$$u_\alpha(a_\tau) = \frac{\alpha-1}{\cosh^\alpha(\tau/2)}\int_0^1 (1-r)^{\alpha-2}\,dr = \cosh^{-\alpha}(\tau/2).$$

以上と命題 6.8 より，

$$\begin{aligned} \int_G |u_\alpha(x)|^2\,dx &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} |u_\alpha(k_\varphi a_\tau)|^2\,\sinh\tau\,d\varphi d\tau \\ &= 2\pi\int_0^\infty \cosh^{-2\alpha}(\tau/2)\,\sinh\tau\,d\tau \\ &= 2\pi\int_1^\infty\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha}dx = \frac{4\pi}{\alpha-1} < \infty. \end{aligned}$$

定理 10.6. $(U_\alpha(\cdot)\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}) \in L^2(G)$.

ここで一般論から言葉を借りてこよう．以下この節の終わりまで G は局所コンパクトな unimodular 群とし，(π, H) を G の既約ユニタリ表現とする．

定義：(π, H) が **2 乗可積分** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists v_1, v_2$ s.t. $(\pi(\cdot)v_1\,|\,v_2) \in L^2(G)$.

従って，複素解析的離散系列表現は 2 乗可積分である．

定理 10.7. G の既約ユニタリ表現 (π, H) について次は同値：
(1) (π, H) は 2 乗可積分である．
(2) 任意の $v_1, v_2 \in H$ に対して，$(\pi(\cdot)v_1\,|\,v_2) \in L^2(G)$.
(3) $L^2(G)$ での G の左正則表現を λ で表す．$L^2(G)$ の $\lambda(G)$ 不変な閉部分空間 W があって，$\pi \cong \lambda|_W$.

定理 10.8. 定理 10.7 の状況下で，$d_\pi > 0$ が存在して，

$$\int_G \big|(\pi(x)v_1\,|\,v_2)\big|^2\,dx = \frac{1}{d_\pi}\,\|v_1\|^2\|v_2\|^2 \qquad (\forall v_1, v_2 \in H)$$

となる．この d_π を 2 乗可積分表現 π の形式的次数と呼ぶ．

§11. Hardy 空間と $SU(1,1)$ の表現

$SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \; ; \; |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$ とする．群 $SU(1,1)$ は $\mathcal{D}$ に次で作用する：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \cdot z := \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}.$$

$\mathcal{D}$ 上正則な函数 f で，次の条件をみたすもの全体を $\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ で表す：

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty.$$

$\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上の **Hardy** 空間と呼ぶ．

さて，f は $\mathcal{D}$ で正則とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を $z=0$ での Taylor 展開とすると，$0 < r < 1$ を固定するとき，この級数は $|z| \leqq r$ で一様に絶対収束しているから

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum a_n \overline{a}_m r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \, d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n}.$$

これは明らかに r について単調に増加する．従って

$$f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

そして $\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ に

$$\|f\|^2 := \frac{1}{2\pi} \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

でノルムを入れると，上の計算から $\mathcal{H}^2(D)$ は Hilbert 空間となることがわかる．

さて $w \in \mathcal{D}$ とし，Taylor 展開 $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ より

$$|f(w)| \leqq \sum |a_n||w|^n \leqq \left[\sum |a_n|^2 \right]^{1/2} \left[\sum |w|^{2n} \right]^{1/2} = \|f\| \cdot (1 - |w|^2)^{-1/2}.$$

これは，各 $w \in \mathcal{D}$ を固定するとき，線型形式 $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}) \ni f \mapsto f(w) \in \mathbb{C}$ が連続であることを示している．ゆえに weighted Bergman space のときと同様にして，Hardy 空間 $\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ は再生核 $K(z,w)$ を持つことがわかる：

$$f(w) = (f \mid K(\cdot, w)) \qquad (w \in \mathcal{D}, \; f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})).$$

この再生核 $K(z,w)$ は次のようにして容易に求まる．すなわち $f(w)$ の Teylor 展開を，$f(w)$ と $(1 - z\overline{w})^{-1} = \sum (\overline{w})^n z^n$ との内積だと見ればよい：

$$f(w) = \sum a_n w^n = \sum a_n (\overline{w}^n)^{-}.$$

従って，$K(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-1}$ である．

さて前節の weighted Bergman 空間 $H^2_\alpha(\mathcal{D})$ $(\alpha > 1)$ を思い出そう．それは $\mathcal{D}$ 上正則な f で次の条件をみたすものの全体のなす Hilbert 空間である：

$$\|f\|_\alpha^2 = \frac{\alpha-1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha-2}\,dxdy < \infty \qquad (z = x+iy).$$

命題 11.1. (1) 任意の $\alpha > 1$ に対して，集合として $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}) \subset H^2_\alpha(\mathcal{D})$ である．さらに $f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ ならば $\|f\| = \lim_{\alpha\downarrow 1}\|f\|_\alpha$ となる．

(2) $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}) = \left\{ f \in \bigcap_{\alpha>1} H^2_\alpha(\mathcal{D})\ ;\ \exists \lim_{\alpha\downarrow 1}\|f\|_\alpha < \infty \right\}$.

証明． まず $\|f\|_\alpha^2 = \sum \dfrac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}|a_n|^2$ を思い出そう．ここで $\alpha > 1$ なので

$$\frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots\alpha} < 1.$$

従って $f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ ならば

$$\|f\|_\alpha^2 = \sum \frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}|a_n|^2 \leqq \sum |a_n|^2 = \|f\|^2 < \infty.$$

ゆえに $f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ $(\forall\alpha > 1)$ であり，単調収束定理を用いれば，$\lim_{\alpha\downarrow 1}\|f\|_\alpha^2 = \|f\|^2$.

逆に $f \in H^2_\alpha(\mathcal{D})$ $(\forall\alpha > 1)$ とし，$\exists\lim_{\alpha\downarrow 1}\|f\|_\alpha$ を仮定する．ここで次の不等式に注意する：$\alpha > 1$ のとき

$$\frac{n-k+1}{n+\alpha-k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+n-k}{1+\dfrac{n-k}{\alpha}} \geqq \frac{1}{\alpha}.$$

これより $\|f\|_\alpha^2 \geqq \sum_{n=0}^\infty \dfrac{1}{\alpha^n}|a_n|^2$．すなわち，$0 < r < 1$ のとき

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leqq \|f\|_{r^{-2}}^2.$$

以上より，$\sup_{0<r<1}\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} < \infty$ となって $f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ がわかる． □

注意： 証明からわかるように，(2) において条件は $\sup_{\alpha>1}\|f\|_\alpha$ でよい．

さて各 $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \in SU(1,1)$ に対して $j(g,z) := \dfrac{1}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ $(z \in \overline{\mathcal{D}})$ とおく．このとき，次の (1), (2) が成り立つことが容易に確かめられる：

(1) $j(g_1g_2, z) = j(g_1,\, g_2\cdot z)j(g_2, z)$,

(2) $j(I, z) = 1$ $(z \in \overline{\mathcal{D}})$.

注意： 前節までの群 G を思い出そう．これは $\mathcal{D}$ を保つ一次分数変換のなす群である．一方 $g \in SU(1,1)$ に対して，$f_g(z) := g\cdot z$ とおく．$\eta : f \mapsto f_g$ とおくと，これは $SU(1,1)$ から G への群準同型であって，$\mathrm{Ker}\,\eta = \{\pm I\}$ となる．実際 $SU(1,1)$

は G の 2 重被覆群となっている．そして $j(g,z)^2 = J(\eta(g),z) = (f_g)'(z)$ であることに注意しておこう．

定義：各 $g \in SU(1,1)$ に対して

$$U(g)f(z) := j(g^{-1},z)f(g^{-1}\cdot z) \qquad (f \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D})).$$

命題 11.2. $(U,\mathcal{H}^2(\mathcal{D}))$ は $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現である．

証明．　$g \mapsto U(g)$ が群準同型であることは容易にわかる．次に
(1) $K(g\cdot z,\, g\cdot w) = j(g,z)^{-1}K(z,w)\overline{j(g,w)^{-1}}$.
　これも直接計算で直ちに出る．
(2) $K_w(z) := K(z,w)$ とおくとき，$\operatorname{span}\{K_w\ ;\ w \in \mathcal{D}\}$ は $\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ で稠密．
　実際再生核ということから，$(f\,|\,K_w) = 0\ (\forall w \in \mathcal{D}) \iff f = 0$.
(3) $U(g)K_w = \overline{j(g,w)}K_{g\cdot w}$.
　なぜなら定義と (1) により，

$$U(g)K_w(z) = j(g^{-1},z)K(g^{-1}\cdot z,\, w) = K(z, g\cdot w)\overline{j(g^{-1}, g\cdot w)^{-1}}.$$

　これと $j(g^{-1},\, g\cdot w)^{-1} = j(g,w)$ による．
以上の準備の下で U のユニタリ性を示そう．

$$\begin{aligned}(U(g)K_w\,|\,K_{w'}) &= \overline{j(g,w)}(K_{g\cdot w}\,|\,K_{w'}) = \overline{j(g,w)}K(w',\, g\cdot w)\\ &= j(g,\, g^{-1}\cdot w')^{-1}K(g^{-1}\cdot w',\, w)\\ &= j(g^{-1},w')(K_w\,|\,K_{g^{-1}\cdot w'})\\ &= (K_w\,|\,U(g^{-1})K_{w'}).\end{aligned}$$

ゆえに $U(g)$ は稠密な部分空間上で等長写像．従って，$\mathcal{H}^2(\mathcal{D})$ 上の等長写像に拡張される．群準同型性から全射がわかるので，$U(g)$ はユニタリ作用素である．既約性の証明は前節の $(U_\alpha, H^2_\alpha(\mathcal{D}))$ のときと同様なので省略．　□

定義：既約表現 $(U,\mathcal{H}^2(\mathcal{D}))$ を複素解析的離散系列表現の極限という．

定義：各 $s \in \mathbb{C},\, k = 0, \frac{1}{2}$ と $g \in SU(1,1)$ に対して

$$T_s^k(g)f(\gamma) := \left[\frac{j(g^{-1},\gamma)}{|j(g^{-1},\gamma)|}\right]^{2k} |j(g^{-1},\gamma)|^{2s} f(g^{-1}\cdot\gamma) \quad (f \in L^2(\partial\mathcal{D}),\, \gamma \in \partial\mathcal{D}).$$

<u>事実：</u> (1) $(T_s^k, L^2(\partial\mathcal{D}))$ は $SU(1,1)$ の表現になっている（$SU(1,1)$ の連続主系列表現と呼ばれる）．
(2) $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ のとき，T_s^k はユニタリ表現である．
(3) $\eta : SU(1,1) \to G$ を上の注意で述べた被覆準同型とし，T_s を G の連続主系列表現とすると，$T_s^0(g) = T_{1-s}(\eta(g))$ が成り立つ．これは次の関係式による：$P_{\mathcal{D}}(\eta(g)\cdot 0,\, \gamma) = |j(g^{-1},\gamma)|^2$.

命題 11.3. $T_{1/2}^{1/2}$ は可約であり，$\chi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ として

$$L_+ := \left\{f = \sum f_n\chi_n\ ;\ f_n = 0\ (\forall n \leqq -1)\right\},$$
$$L_- := \left\{f = \sum f_n\chi_n\ ;\ f_n = 0\ (\forall n \geqq 0)\right\}$$

とおくとき，$L_\pm$ は $T^{1/2}_{1/2}$ 不変で，$T^{1/2}_{1/2}\big|_{L_+} \cong U$.

<u>証明の概略：</u> 作用素 $B : \mathcal{H}^2(\mathcal{D}) \to L_+$ を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto Bf := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n$$

で定義する．B が Hilbert 空間としての同型を与えることは明らかであろう．実は $\phi = Bf$ は f の「境界函数」である（Poisson 積分に関する Fatou の定理による）．

以下に f が $\phi = Bf$ の Poisson 積分で表されることを示しておこう：$z \in \mathcal{D}$ のとき，$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} z^n$ より，項別積分をすれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z).$$

一方，$\dfrac{\overline{z}}{e^{-i\theta} - \overline{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} \overline{z}^n$ より，項別積分をすれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{z}\,\phi(e^{i\theta})}{e^{-i\theta} - \overline{z}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}^n \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-i(-n)\theta}\, d\theta = 0.$$

これら 2 個の式を辺々加えれば

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \left[\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} + \frac{\overline{z}}{e^{-i\theta} - \overline{z}} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\, d\theta = \int_{\partial\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}(z, \gamma) \phi(\gamma)\, d\gamma \end{aligned}$$

を得る．さて $T^{1/2}_{1/2}(g)\phi(\gamma) = j(g^{-1}, \gamma)\phi(g^{-1} \cdot \gamma)$ であり，$U(g)$ の定義式と見比べれば容易に，$T^{1/2}_{1/2}(g)B = BU(g)$ がわかる． □

References

[1] P. Eymard, *Le noyau de Poisson et la théorie des groupes*, Symposia Math., **22** (1977), 107–132.

[2] P. Eymard, *Le noyau de Poisson et l'analyse harmonique non euclidienne*, In "Topics in Modern Harmonic Analysis", Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 353–404.

[3] G. B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC Press, 1995.

[4] 深谷賢治，双曲幾何，岩波書店，1996.

[5] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.

[6] R. Howe and E. C Tan, *Non-abelian harmonic analysis, Application of* $SL(2, \mathbb{R})$, Springer, Berlin, 1992.

[7] T. Koornwinder, *The representation theory of* $SL(2, \mathbb{R})$*, a non-infinitesimal approach*, L'enseignement Math., **28** (1982), 53–90.

[8] S. Lang, $SL_2(\mathbf{R})$, Springer GTM, Berlin, 1985.

[9] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover edition, New York, 1972.

[10] 岡本清郷，等質空間上の解析学，紀伊國屋書店，1980.
[11] P. J. Sally, *Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of* $SL(2,\mathbb{R})$, Mem. Amer. Math. Soc., **69**, Providence R. I., 1967.
[12] 杉浦光夫，ユニタリ表現入門（上）（下），上智大学講究録，8, 13.
[13] M. Sugiura, *Unitary representations and harmonic analysis*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1990.
[14] R. Takahashi, $SL(2,\mathbb{R})$, In "Analyse harmonique", Les Cours du CIMPA, CIMPA, 1982. 235–446.
[15] 谷口雅彦・奥村善英，双曲幾何学への招待，培風館，1996.
[16] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications* I, II, Springer, Berlin, 1985, 1988.
[17] M. Flensted-Jensen, *Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces*, Ark. Mat., **10** (1972), 143–162.
[18] V. A. Fock, *On the representation of an arbitrary function by an integral involving Legendre's functions with a complex index*, Dokl. Acad. Sci. USSR, **39** (1943), 253–256.
[19] T. Koornwinder, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat., **13** (1975), 145–159.
[20] L. Pukanszky, *The Plancherel formula for the universal covering group of* $SL(\mathbb{R},2)$, Math. Ann., **156** (1964), 96–143.
[21] P. J. Sally, *Intertwining operators and the representations of* $SL(2,\mathbf{R})$, J. Funct. Anal., **6** (1970), 441–453.