九州大学理学部　**2008 年度前期 定期試験**　問題・解答用紙 (1)

授業科目	解析学 B2	試験日時	8 月 1 日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[1] Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の全体を $\mathcal{L}$，$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする．
以下の各命題が正しいかどうか，理由とともに述べよ．

(1) $E \in \mathcal{L}$ とする．$m(E) = 0$ ならば，E は高々可算集合である．
(2) $\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{L}$ 可測な函数 f が $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分ならば，$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ である．
(3) $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分な函数の列が $\mathbb{R}$ 上一様収束すれば，その極限函数もまた $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分である．
(4) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値函数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) > -\varepsilon$ (m-a.e.x) が成り立てば，$f(x) \geqq 0$ (m-a.e.x) が成り立つ．
(5) $\mathbb{R}$ 上いたる所不連続な函数でも，ある連続函数と m-a.e.x で一致することがあり得る．

次頁以降にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

九州大学理学部 2008年度前期 定期試験 問題・解答用紙 (2)

授業科目	解析学 B2	試験日時	8月1日 13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[**2**] 優収束定理を用いて次の極限を求めよ：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx$

[**3**] 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ で考える．

(1) 非負の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して，$\displaystyle\int\bigl(\liminf_{n\to\infty} f_n\bigr)\,d\mu$ と $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$ の大小関係を主張する Fatou の補題を述べ，等号ではない例をあげよ．

(2) 単調収束定理を Fatou の補題から導け．

次頁にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	8 月 1 日 13:00～15:00	担当教員	野村隆昭

[4] $\displaystyle\int_0^1 \sin x \log x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n)!}$ を次の手順に従って示せ．

(1) $\sin x \log x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$．ただし $f_n(x) := (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \log x$ $(n = 0, 1, \dots)$．

(2) $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)| \, dx = \frac{1}{(2n+2)(2n+2)!}$ より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)| \, dx < \infty$ である．

[5] f は区間 $[0, \infty)$ 上の Lebesgue 可積分な函数とする．このとき，$\varphi(t) := \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) \, dx$ $(t > 0)$ で定義される函数 φ は開区間 $(0, \infty)$ で微分可能であることを示せ．φ が well-defined であることもコメントすること．
（$a > 0$ を固定し，まず $t > a$ で考えよ．）

学生番号		氏名		評点	