九州大学理学部	2008年度前期 中間試験	問題・解答用紙 (1)

授業科目	解析学 B2	試験日時	5月30日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[1] X を集合とし，X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\Big)$$

とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\,;$ 無数の番号 n に対して $x \in A_n$ となる$\}$ を示せ．

(2) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\,;\ \boxed{}\ \}$ の空欄を正しく埋めよ．

(3) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$ を示せ．

(4) $\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$ であることを次の 2 通りに示せ．

（あ）De Morgan の法則で．　　（い）(1), (2) の右辺の記述を用いて．

(5) $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) \cup \big(\limsup_{n\to\infty} B_n\big)$ を示せ．

(6) $\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big) \cap \big(\liminf_{n\to\infty} B_n\big)$ を示せ．

次頁以降にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	5月30日 13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[**2**] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B}\ ;\ \mu(N) = 0\}$ とする．

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \cup F\ ;\ B \in \mathcal{B},\ F \subset N \text{ for some } N \in \mathcal{N}\}$$

とおくとき，$\overline{\mathcal{B}}$ は σ-algebra をなすことを示せ．

[**3**] $\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & (E = \varnothing) \\ 1 & (E \neq \varnothing) \end{cases}$ とおく．

(1) μ^* は外測度であることを示せ．

(2) Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

次頁にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

九州大学理学部 **2008年度前期 中間試験** 問題・解答用紙 (3)

授業科目	解析学 B2	試験日時	5月30日 13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[4] $(X,\mathcal{B},\mu)$ は測度空間で，$\mu(X)<\infty$ とする．可測集合の列 $A_n\in\mathcal{B}$ $(n=1,2,\dots)$ を考える．
今，$\delta>0$ が存在して，すべての $n=1,2,\dots$ に対して $\mu(A_n)\geqq\delta$ が成り立っていると仮定する．
(1) $\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n)\geqq\delta$ を示せ．
(2) (1) で $\mu(X)<\infty$ という仮定を外したらどうなるか．

[5] μ は $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度で，有界閉集合に対しては有限な値をとるものとする．
さらに μ は平行移動不変，すなわち $\mu(B+a)=\mu(B)$ がすべての Borel 集合 B とすべての実数 a に対して成り立っているものとする．
(1) $F(x):=\mu((0,x])$ $(x>0)$ とおくとき，$F(x)$ は右連続であって，任意の $x>0,\ y>0$ に対して $F(x+y)=F(x)+F(y)$ が成り立つことを示せ．
(2) (1) より，$F(x)=\mu((0,1])\cdot x$ $(\forall x>0)$ となることを示せ．
(3) 任意の有限左半開区間 $(a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ に対して，$\mu((a,b])=\mu((0,1])(b-a)$ となることを示せ．
(4) 任意の Borel 集合 $B\subset\mathbb{R}$ に対して，$\mu(B)=\mu((0,1])m(B)$（m は Lebesgue 測度）となることを示せ．

学生番号		氏名		評点	