解 析 学 B 2 演 習

§0. 復習 　　2008 年 4 月 14 日出題

[0.1] $x>0$, $x\neq 1$ に対して，$f(x)$ を次式で定める：

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{x^n\left(1+\sin\dfrac{1}{x-1}\right)+2+\sin\dfrac{1}{x-1}}{1+x^n}.$$

このとき次の各極限を求めよ：

(1) $\liminf\limits_{x\to 1-0} f(x)$, 　(2) $\limsup\limits_{x\to 1-0} f(x)$, 　(3) $\liminf\limits_{x\to 1+0} f(x)$, 　(4) $\limsup\limits_{x\to 1+0} f(x)$.

[0.2] 次の各函数列は閉区間 $[0,1]$ で一様収束するかどうか，判定せよ：

(1) $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$, 　(2) $\{nx(1-x)^n\}$.

[0.3] 函数 $f(x)=\sin(x^2)$ が $\mathbb{R}$ 上一様連続かどうか判定せよ．

[0.4] 函数 $f(x):=x^{-x}e^x$ が $x\geqq 1$ で単調に減少すること（要証明）と級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ が収束すること（要証明）から，定積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-x}e^x\,dx$ が収束することを示せ．

[0.5] (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するなら $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 連続函数 $f(x)$ の積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$ が収束しても，$\displaystyle\limsup_{x\to\infty} f(x)=\infty$ とさえなり得ることを例で示せ．

[0.6] $a>0$ かつ $b^2<ac$ とし，$Q(x,y):=ax^2+2bxy+cy^2$ とおく．次の 2 重積分を計算せよ：

$$I := \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-Q(x,y)}} \qquad \bigl(D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ Q(x,y)<1\}\bigr).$$

[0.7] 定積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}(x-y)^2e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ．

[0.8] (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A,B に対して

$$d(A,B) := \inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b)$$

とおく．A がコンパクト，B が閉集合で，$A\cap B=\varnothing$ ならば，$d(A,B)>0$ であることを示せ．A の方も単に閉集合という仮定ではどうか．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

§1. Lebesgue 積分の導入に向けて 2008 年 4 月 21 日出題

[1.1] 次の函数 $f(x)$ はすべての点で微分可能であるが，導函数 $f'(x)$ は $x=0$ で不連続であることを示せ：

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

[1.2] 広義 Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^1 \log\sin x\,dx$ は収束することを示せ．

[1.3] 函数列 $f_n(x) := \dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ $(n=1,2,\dots)$ は閉区間 $[0,1]$ 上である連続函数に収束しているが，収束は一様ではないことを直接示せ．

[1.4] 前問の $f_n(x)$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 = \int_0^1 \bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\bigr)\,dx$ であることを確かめよ． （Hint: $\varepsilon>0$ が与えられたとき，積分を $[0,\varepsilon]$ と $[\varepsilon,1]$ に分割．）

[1.5] 等式 $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ を示せ．

$\Bigl($Hint: $t^{-t} = e^{-t\log t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(t\log t)^n$ を項別積分する（要正当化）$\Bigr)$

[1.6] A_n $(n=1,2,\dots,)$ は集合 X の部分集合とし，$A_* := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ とおく．A_n の定義函数 χ_{A_n} について，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x) = \chi_{A_*}(x)$ となることを示せ．

[1.7] X, Y は集合，$f : X \to Y$ は写像とする．また $A \subset X$，$B \subset Y$ とする．

(1) $f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B$ において（$f^{-1}(B)$ の定義から明らかであろう）f が全射ならば等号が成立するが，一般には等号でないことを例で示せ．

(2) $f^{-1}\bigl(f(A)\bigr) \supset A$ であることを示せ．f が単射ならば等号が成立するが，一般には等号でないことを例で示せ．

[1.8] 閉区間 $[0,1]$ 上の連続函数 f に対して，次式で $\|f\|$ を定義する：

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad (*)$$

(1) $\|\cdot\|$ はノルムであることを示せ．

(2) $[0,1]$ 上の連続函数全体に $(*)$ でノルムを入れたノルム空間は完備でないことを示せ．

以上

解 析 学 B 2 演 習

§2. 集合代数　　　　　　2008 年 4 月 28 日出題

[**2.1**]　(1) $\mathcal{E}_3 := \{(a,b]\,;\, -\infty < a < b < \infty\}$ とするとき，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_3]$ を示せ．
(2) $\mathcal{E}_8 := \{(-\infty,b]\,;\, b \in \mathbb{R}\}$ とするとき，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_8]$ を示せ．
　（Remark: 講義中の記号で，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_1]$ はもちろん証明なしで使ってよい．）

[**2.2**]　$\mathcal{E} := \{\mathbb{R}$ の h-intervals$\}$ とおくとき，$\mathcal{E}$ は elementary family をなすことを示せ．

[**2.3**]　$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ を elementary family とする．このとき，

$$\mathcal{A} := \{\, \text{有限個の } \mathcal{E} \text{ の元の非交差和}\,\}$$

とおくと，$\mathcal{A}$ は algebra をなすことを示せ．　（講義ノートに証明があるので，本問は黒板の前で説明をするときにノートを見ることを禁止する．）

[**2.4**]　$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ を σ-algebras とする．
(1) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ が algebra をなすならば，$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ は σ-algebra をなすことを示せ．
(2) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ が σ-algebra をなさない例をあげよ．

[**2.5**]　$\mathcal{B}$ は σ-algebra で，無限個の相異なる要素からなるものとする．
(1) $\mathcal{B}$ は互いに非交差な空でない集合の無限列 $\{C_n\}$ を含むことを示せ．
(2) 各 $a = \{a_n\}$ ($a_n = 0$ or 1) に対して，$D_a := \bigcup_{a_n=1} C_n$ を考えることにより，$\mathcal{B}$ は少なくとも連続濃度あることを示せ．

[**2.6**]　$\mathcal{S}$ は集合 X の互いに非交差な部分集合の族で，$X = \bigsqcup_{E\in\mathcal{S}} E$ となっているものとする（すなわち $\mathcal{S}$ は X の分割を与えている）．このとき，

$$\mathcal{B} := \{A \subset X\,;\, A \text{ は } \mathcal{S} \text{ に属する集合の和集合で表される}\,\} \cup \{\varnothing\}$$

は σ-algebra をなすことを示せ．

[**2.7**]　$\mathcal{S}$ は前問と同じとする．

$\sigma[\mathcal{S}] = \{A \subset X\,;\, A$ または A^c が $\mathcal{S}$ に属する集合の可算個の和集合で表される $\} \cup \{\varnothing\}$ であることを示せ．
（Hint: まず右辺が σ-algebra をなすことを示せ．）

[**2.8**]　集合 X の部分集合 A, B に対して，$A\Delta B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ とおいて，A と B の対称差と呼ぶ．
(1) 対称差に関して，次の「結合法則」が成り立つことを示せ：

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

(2) $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$ を示せ．
　（ベン図に基づくのではなく，定義に従った議論をすること．）

以上

解 析 学 B 2 演 習

§3.　測度　　　　2008 年 5 月 2 日出題

[3.1]　X は非可算集合であるとする．$\mathcal{B} := \{E \subset X\ ;\ E$ または E^c は高々可算 $\}$ とおき，$\mu(E) := \begin{cases} 0 & (E:\ \text{高々可算}) \\ 1 & (E^c:\ \text{高々可算}) \end{cases}$ とおくと，μ は測度になることを示せ．

[3.2]　X を $\varnothing$ でない集合，$\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ とする．また，f は X 上の非負値の函数で，値として ∞ も許すものとし，各 $E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\mu(E) := \sup\Bigl\{\sum_{x\in F} f(x)\ ;\ \ F \text{ は } E \text{ の有限部分集合}\Bigr\}\ (E \neq \varnothing),\quad \mu(\varnothing) = 0$$

とおく．$A := \{x \in X\ ;\ 0 < f(x) \leqq \infty\}$ とするとき，次の (1), (2) を示せ：

(1) $A \cap E$ が非可算ならば，$\mu(E) = \infty$　$\Bigl($注： $A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigl\{x \in E\ ;\ f(x) > \frac{1}{n}\bigr\}\Bigr)$.

(2) $A \cap E$ が可算無限ならば，任意の全単射 $\tau : \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to A \cap E$ に対して $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\tau(n))$.

[3.3]　[3.2] で μ は測度を定義することを示せ．また μ が σ-finite となるための必要十分条件は，任意の $x \in X$ に対して $f(x) < \infty$ かつ A は可算となることである．これを示せ．

[3.4]　$\mathcal{A}$ を algebra とし，$\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ は有限値をとる有限加法的測度とする．このとき，次の等式を示せ：

$$\nu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Bigr) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \nu\bigl(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_p}\bigr) \quad (E_j \in \mathcal{A}).$$

[3.5]　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$E_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ をみたすならば，$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ とおくとき，$\mu\Bigl(\limsup_{n\to\infty} E_n\Bigr) = 0$ であることを示せ．(Borel–Cantelli の補題)

[3.6]　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) < \infty$ であるとする．$\nu(X) < \infty$ であるような有限加法的測度 $\nu : \mathcal{B} \to [\,0, \infty)$ が次の性質を持つとき，ν は可算加法的，すなわち測度であることを示せ：

$$\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} \delta > 0 \text{ が存在して．} \\ \mu(E) < \delta \text{ であるすべての } E \in \mathcal{B} \text{ に対して } \nu(E) < \varepsilon \text{ が成り立つ．} \end{cases}$$

(Hint: $E_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が非交差ならば，$\sum \mu(E_n) < \infty$ であることに注意.)

$\boxed{\text{裏面にも問題がある}}$

[3.7] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) < \infty$ であるとする．また $E \Delta F$ は集合 E と F の対称差を表すとする（cf. [2.8]）．

(1) $\mu(E \Delta F) = 0$ のとき $E \sim F$ と表すことにすると，$\sim$ は $\mathcal{B}$ に同値関係を定義することを示せ．

(2) $\dot{E}, \dot{F} \in \mathcal{B}/\sim$ に対して，それぞれから代表元 E, F をとって $d(\dot{E}, \dot{F}) := \mu(E \Delta F)$ とおくと，d は well-defined で，同値類の空間 $\mathcal{B}/\sim$ に距離を定義していることを示せ．

[3.8] (1) $\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \Delta \left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \subset \limsup_{n\to\infty} (E_n \Delta E_{n+1})$ であることを示せ．

(2) $\sum \mu(E_n \Delta E_{n+1}) < \infty$ ならば，$\mu\left(\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \Delta \left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right)\right) = 0$ を示せ．

(Remark: 以上を用いて，[3.7] の距離空間 $(\mathcal{B}/\sim, d)$ は完備であることを示される．余裕のある人は挑戦してみてほしい．)

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

§4.　外測度　　　　　　　　2008 年 5 月 12 日出題

[4.1]　$\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & (E = \varnothing) \\ 1 & (E \neq \varnothing, \mathbb{N}) \\ 2 & (E = \mathbb{N}) \end{cases}$ と定義すると，μ^* は外測度であることを示せ．

[4.2]　[4.1] の外測度 μ^* に対して，Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

[4.3]　$\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) := \begin{cases} \dfrac{\sharp E}{1 + \sharp E} & (\sharp E < \infty) \\ 1 & (\sharp E = \infty) \end{cases}$ とおく．ただし $\sharp E$ は集合 E の元の個数を表す．

(1) $E \subset F$ ならば $\mu^*(E) \leqq \mu^*(F)$ であることを示せ．

(2) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Bigr)$ を示せ．

[4.4]　[4.3] の μ^* は外測度を定義するが，Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

[4.5]　$X = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とし，集合族 $\mathcal{A}$ を次で定義する：

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \,;\, A \text{ または } A^c \text{ は } 0 \text{ を含まない有限集合}\}.$$

(1) $\mathcal{A}$ は algebra をなすことを示せ．

(2) 各 $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu_0(A) := \sharp A$ とおく．このとき μ_0 は $\mathcal{A}$ 上の premeasure で，$\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{P}(X)$ であることを示せ．

[4.6]　記号は [4.5] の通りとする．正の数（無限大を許す）α と $E \subset X$ に対して

$$\nu_\alpha(E) := \begin{cases} \sharp E & (0 \notin E) \\ \alpha + \sharp(E \setminus \{0\}) & (0 \in E) \end{cases}$$

とおく．このとき ν_α は $\mathcal{P}(X)$ 上の測度を定義し，$\nu_\alpha\big|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ であることを示せ．また μ_0 から Hopf の拡張定理で得られる $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度を μ とするとき，$\mu = \nu_\infty$ であることを示せ．

[4.7]　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B} \,;\, \mu(N) = 0\}$ とする．

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \cup F \,;\, B \in \mathcal{B},\ F \subset N \text{ for some } N \in \mathcal{N}\}$$

とおくとき，$\overline{\mathcal{B}}$ は σ-algebra をなすことを示せ．

[4.8]　記号は [4.7] の通りとする．

(1) $\overline{\mu}(B \cup F) := \mu(B)$ によって $\overline{\mathcal{B}}$ 上の測度 $\overline{\mu}$ が定義できることを示せ．

(2) 測度 $\overline{\mu}$ は完備であることを示せ．

(3) λ を $\overline{\mathcal{B}}$ 上の測度で，$\lambda\big|_{\mathcal{B}} = \mu$ となるものとすると，$\lambda = \overline{\mu}$ であることを示せ．

以上

解 析 学 B 2 演 習

§5. $\mathbb{R}$ 上の測度　　　　　　2008 年 5 月 19 日出題
（[5.5] からは 5 月 23 日の講義内容に対応しています.）

[5.1] X は集合であるとし，μ^* は X 上の外測度とする．$E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ かつ $G \subset X$ が $\mu^*(E \Delta G) = 0$（$E\Delta G$ は E と G の対称差）をみたしたら，$G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ となることを示せ.（Hint: $\mu^*(F) = 0 \implies F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ であることを思い出すこと.）

[5.2] Lebesgue–Stieltjes 測度 μ の外正則性を使って，次を示せ：
任意の可測集合 E（ただし $\mu(E) < \infty$）に対して，E を含む G_δ 集合（可算個の開集合の共通部分になっている集合：従って Borel 集合である）B が存在して $\mu(E) = \mu(B)$ となる.

[5.3] $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は右連続な単調増加函数とし，μ_F は有限左半開区間 $(a, b]$ に対して，$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ となる Borel 測度とする．次の (1)〜(3) を示せ：
(1) $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a^-)$,
(2) $\mu_F([\,a, b)) = F(b^-) - F(a^-)$,
(3) $\mu_F((a, b)) = F(b^-) - F(a)$.　　（注意：(1)〜(3) とも $-\infty < a < b < \infty$ とする.）

[5.4] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続函数とする．また $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の Borel 集合全体がなす σ-algebra とする．$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ならば $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを次の手順で示せ.
(1) $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ は σ-algebra をなす.
(2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}$ の任意の開集合を含む．従って，(1) と $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の定義から $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となる.

[5.5] $C \subset [0, 1]$ を Cantor 集合とする．$x, y \in C$ かつ $x < y$ のとき，$x < z < y$ かつ $z \notin C$ であるような z が存在することを示せ.

[5.6] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする．任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，閉区間 $[0, 1]$ に含まれる $\mathbb{R}$ の開集合 G_ε で，$\overline{G_\varepsilon} = [0, 1]$ かつ $m(G_\varepsilon) \leqq \varepsilon$ をみたすものを作れ.　（Hint: 有理数を中心とする半径 $\varepsilon/2^k$ の開区間を考える.）

[5.7] m は [5.6] と同じく $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．$E \in \mathcal{L}$ かつ $0 < m(E) < \infty$ とする．$0 < \alpha < 1$ のとき，開区間 I があって，$m(I \cap E) > \alpha \cdot m(I)$ となることを示せ.　(Hint: 開集合 $G \supset E$ をとって，$m(G) < \frac{1}{\alpha} m(E)$ とし，$G = \sum I_n$ と表せ.)

[5.8] $N \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 零集合とする．無理数 α を適当にとると，集合 $N + \alpha := \{x + \alpha\,;\, x \in N\}$ は有理数を含まないことを示せ.

(Hint: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ とおくとき，結論を否定すると $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (-N + r_j)$ となることを示せ．ただし $-N := \{-x\,;\, x \in N\}$.)

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

§6. 可測函数　　　　　　　　2008 年 6 月 9 日出題

[6.1]〜[6.7] まで，$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．

[6.1] $A \subset X$ かつ $A \in \mathcal{B}$ とする．A の部分集合の族 $\mathcal{B}_A := \{E \subset A\,;\ E \in \mathcal{B}\}$ は σ-algebra をなし（A を全体集合とみる），$\{F \cap A\,;\ F \in \mathcal{B}\}$ に等しいことを示せ．

[6.2] $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ とし，$X_0 := f^{-1}(\mathbb{R})$ とおく．このとき，f が可測 であるための必要十分条件は，次の (1)〜(3) がみたされることである．これを示せ．
(1) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{B}$,　(2) $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{B}$,　(3) $f_0 := f\big|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{R}$ は可測.

[6.3] $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測であるとする．$0 \cdot (\pm\infty) = 0$ という約束のもとで，積 fg は可測であることを示せ．

[6.4] $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測であるとする．$a \in \mathbb{R}$ を固定し，

$$h(x) := \begin{cases} a & (f(x) = -g(x) = \pm\infty) \\ f(x) + g(x) & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

と定義すると h は可測であることを示せ．
（$a \in \overline{\mathbb{R}}$ で構わないが，簡単のため，本問では $a \in \mathbb{R}$ としている.）

[6.5] f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を可測函数 $X \to \overline{\mathbb{R}}$ とする．

$$L := \{x \in X\,;\ \text{有限な} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ が存在する}\}$$

とおくと，$L = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n,m=l}^{\infty} \left\{x \in X\ ;\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$ と書けることから，$L \in \mathcal{B}$ であることを示せ．

[6.6] 前問と同じ設定で，$\{x \in X\ ;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$ や $\{x \in X\ ;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\}$ も可測集合であることを示せ．

[6.7] $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が，すべての $r \in \mathbb{Q}$ に対して，$f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{B}$ をみたすならば，f は可測であることを示せ．

[6.8] 単調増加な函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Borel 可測であることを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

§7.　積分　　　　　　　　　　　　2008 年 6 月 16 日出題

以下測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で考える．また函数はすべて $\mathcal{B}$ 可測とする．

[7.1]　Fatou の補題を仮定して，そこから単調収束定理を導け．

[7.2]　$f \geqq 0$ かつ，$\displaystyle\int f\, du < \infty$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu(E) < \infty$ である $E \in \mathcal{B}$ が存在して，$\displaystyle\int_E f\, d\mu > \int f\, d\mu - \varepsilon$ をみたすことを示せ．

[7.3]　$f \geqq 0$ のとき，$\lambda(E) := \displaystyle\int_E f\, d\mu$ $(E \in \mathcal{B})$ とおくと，λ は測度であることを示せ．そして，$g \geqq 0$ に対して，$\displaystyle\int g\, d\lambda = \int gf\, d\mu$ が成り立つことを示せ．

（Hint: 後半は，まず g が単函数のときに示せ．）

[7.4]　$f : X \to [0, \infty]$ に対して $E_n := \{x \in X\ ;\ f(x) \geqq n\}$ とおくとき，次の不等式を示せ：　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqq \int f\, d\mu \leqq \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

また，$\mu(X) < \infty$ のとき，$\displaystyle\int f\, d\mu < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ を示せ．

[7.5]　$f \geqq 0$ かつ $\displaystyle\int_X f\, d\mu < \infty$ ならば，$\{x \in X\ ;\ f(x) = \infty\}$ は零集合であり，$\{x \in X\ ;\ f(x) > 0\}$ は σ-finite な集合であることを示せ．

[7.6]　Fatou の補題における $\liminf$ を２つとも $\limsup$ に置き換えると，どちら向きの不等号も成立しうることを例で示せ．

[7.7]　$f_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ で，各点 $x \in X$ において $f_n(x) \to f(x)$ であり，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu < \infty$ が成り立っているとする．このとき任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ となることを示せ．

（Hint: $\chi_E f_n$ と $\chi_{E^c} f_n$ の両方に Fatou の補題を適用してみよ．）

[7.8]　前問で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu = \infty$ のときは，結論は必ずしも成立しないことを例で示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

§8.　収束定理　　　　　　　　2008 年 6 月 30 日出題

以下測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で考える．また $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m で表す．

[8.1] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,d\mu < \infty$ ならば，$f_n \to 0$ (a.e.) であることを示せ．

[8.2] C を Cantor 集合とする．閉区間 $[0,1]$ 上の函数 f を次で定義する：

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ n & (x \text{ は取り除かれる長さ } \frac{1}{3^n} \text{ の閉区間に属する}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\int_{[0,1]} f\,dm = 3$ であることを示せ．

[8.3] 閉区間 $[0,1]$ 上の函数を次で定義する：

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ n & (x \text{ は無理数で 10 進法表示で小数点直後に連続して 0 が丁度 } n \text{ 個並ぶ}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\int_{[0,1]} f\,dm = \frac{1}{9}$ であることを示せ．

[8.4] 次の函数列 $\{f_n\}$ の例を作れ．$f_n(x) \to 0$ $(\forall x)$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = 0$ となるが，$|f_n(x)| \leqq g(x)$ (a.e.x) となる可積分函数 $g(x)$ は存在しない．

[8.5] f_n $(n = 1, 2, \dots)$ は可積分函数とし可測函数 f に一様収束すると仮定する．

(1) $\mu(X) < \infty$ ならば，f は可積分であって $\displaystyle\int f_n\,d\,u \to \int f\,d\mu$ であることを示せ．

(2) $\mu(X) = \infty$ ならば，(1) の二つの結論のそれぞれが不成立である例を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度空間で示せ．

[8.6] f_n, g_n $(n = 1, 2, \dots)$ そして f, g はすべて可積分函数とする．$f_n \to f$ (a.e.) かつ $g_n \to g$ (a.e.) であり，$|f_n(x)| \leqq g_n(x)$ $(\forall x \in X)$ かつ $\displaystyle\int g_n\,d\mu \to \int g\,d\mu$ ならば，$\displaystyle\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ であることを示せ（優収束定理の証明をなぞる）．

[8.7] f は可積分であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な $\delta > 0$ が存在して，$\mu(E) < \delta$ ならば $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \varepsilon$ となることを示せ．

[8.8] $f \geqq 0$ は可積分であるとする．$\displaystyle\int f^n\,d\mu$ が $n = 1, 2, \dots$ と無関係ならば，f はある可測集合の特性函数とほとんど至る所一致することを示せ．

以上

解 析 学 B 2 演 習

§9.　Riemann 積分との関係・Fubini の定理　　2008 年 7 月 7 日出題
([9.7] 以降は 7 月 11 日・18 日の講義内容を含みます)

[9.1]　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を完備な測度空間とする．X 上の函数 f がある可測函数 g と μ-a.e. で等しいならば，f は可測であることを示せ．測度空間が完備でなければどうか．

[9.2]　次の極限を求めよ．計算を正当化すること．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx$$

[9.3]　$\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_0^k x^n \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k dx = n!$ を示せ．
(Hint: $\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \leqq e^{-x}$ $(0 \leqq x \leqq k)$ をまず示せ．)

[9.4]　$\displaystyle \int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ $(t > 0)$ の両辺を t で微分することで，次の公式を導け：

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n\, n!}$$

[9.5]　$\alpha > 1$ のとき，$\displaystyle \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ を項別積分により示せ．

$$\left(\text{Hint：} x > 0 \text{ のとき，} \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}.\right)$$

[9.6]　項別積分で次式を示せ．ただし $a > 1$ とする．

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\, dx = \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{a}$$

(公式自体は，解析接続により $\mathrm{Re}\, a > 0$ で成り立つ．)

[9.7]　本問では $f(x,y) := e^{-axy} \sin x$ を $E := (0,\infty) \times (1,\infty)$ で x, y について積分することにより，前問の公式を導け（E で $|f(x,y)| \leqq xe^{-axy}$ であることに注意）．

[9.8]　$a > 0$ とする．函数 f は開区間 $(0, a)$ で可積分とし，$\displaystyle g(x) := \int_x^a \frac{f(t)}{t}\, dt$ $(0 < x < a)$ とおく．このとき g は $(0, a)$ 上で可積分であって，$\displaystyle \int_0^a g(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$ となることを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$