授業科目	数学 II A	曜日・時限	金曜 ・ 2 時限	担当教員	野村隆昭

[1] 1 次元熱方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$（簡単のため $c=1$ とした）を次の境界条件 (B) と初期条件 (I) で考える：

$$\text{(B)}\ \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \quad (\forall t \geqq 0), \qquad \text{(I)}\quad u(x,0)=f(x):=x(L-x) \quad (0 \leqq x \leqq L)$$

(1) 変数分離を行って $u(x,t)=F(x)G(t)$ とするとき，定数 k が存在して

$$\dot{G}=kG, \quad F''=kF$$

となることを示せ．ただし $\dot{}=\dfrac{d}{dt}$，$''=\dfrac{d^2}{dx^2}$ である．

(2) 「恒等的に 0」ではない解 $u=u(x,t)=F(x)G(t)$ が存在するとき，$F(0)=F(L)=0$ であることを示せ．
またこのとき，問 (1) の定数 k は $k<0$ をみたすことを示せ．

(3) 問 (2) によって，$k=-p^2$ $(p>0)$ とおく．このとき，$F(x)$ がみたす微分方程式は $F''+p^2F=0$ である．
これの「恒等的に 0」ではない解 $F(x)$ で，境界条件 $F(0)=F(L)=0$ をみたすものが存在するときの $p>0$ の値すべてと，
そのそれぞれに対応する $F(x)$ を求めよ．
　以下，ここで求めた $p>0$ の値を $0<p_1<p_2<\cdots<p_n<\dots$ とする．

(4) 微分方程式 $\dot{G}+p_n^2G=0$ の一般解を記せ（答えだけでよい）．

裏面に続く

金曜 2 時限	科　年　組	学生番号		氏名		評点	

授業科目	数学II A	曜日・時限	金曜 ・ 2時限	担当教員	野村隆昭

(5) $f(x) = x(L-x)$ $(0 \leqq x \leqq L)$ のフーリエ正弦級数（$f(x)$ を奇函数として区間 $[-L, L]$ に拡張し，さらにそれを周期 $2L$ の函数として実数全体に拡張した函数のフーリエ正弦級数）を求めよ.

（$f(0) = f(L) = 0$ という特性を生かして，うまく部分積分を実行すること.）

(6) 与えられた1次元熱方程式の，境界条件 (B) と初期条件 (I) のもとでの解 $u = u(x, t)$ $(0 \leqq x \leqq L,\ t \geqq 0)$ を無限級数の形で書き下せ.

ただし，無限級数の収束性については論じなくてもよい.

金曜2時限	科 年 組	学生番号		氏名		評点	