

授業科目	数学 II A	曜日・時限	金曜 ・ 1時限	担当教員	野村隆昭
------	---------	-------	----------	------	------

[1] 1次元熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (簡単のため $c = 1$ とした) を次の境界条件 (B) と初期条件 (I) で考える:

$$(B) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (\forall t \geq 0), \quad (I) \quad u(x, 0) = f(x) := x(L - x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

(1) 変数分離を行って $u(x, t) = F(x)G(t)$ とするとき, 定数 k が存在して

$$\dot{G} = kG, \quad F'' = kF$$

となることを示せ. ただし $\dot{} = \frac{d}{dt}$, $'' = \frac{d^2}{dx^2}$ である.

(2) 「恒等的に 0」ではない解 $u = u(x, t) = F(x)G(t)$ が存在するとき, $F(0) = F(L) = 0$ であることを示せ. またこのとき, 問 (1) の定数 k は $k < 0$ をみたすことを示せ.

(3) 問 (2) によって, $k = -p^2$ ($p > 0$) とおく. このとき, $F(x)$ がみたす微分方程式は $F'' + p^2 F = 0$ である. この「恒等的に 0」ではない解 $F(x)$ で, 境界条件 $F(0) = F(L) = 0$ をみたすものが存在するときの $p > 0$ の値すべてと, そのそれぞれに対応する $F(x)$ を求めよ.

以下, ここで求めた $p > 0$ の値を $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ とする.

(4) 微分方程式 $\dot{G} + p_n^2 G = 0$ の一般解を記せ (答えだけでよい).

裏面に続く

金曜 1時限	科	年	組	学生番号	氏名	評点
--------	---	---	---	------	----	----

授業科目	数学 II A	曜日・時限	金曜 ・ 1 時限	担当教員	野村隆昭
------	---------	-------	-----------	------	------

(5) $f(x) = x(L-x)$ ($0 \leq x \leq L$) のフーリエ正弦級数 ($f(x)$ を奇函数として区間 $[-L, L]$ に拡張し, さらにそれを周期 $2L$ の函数として実数全体に拡張した函数のフーリエ正弦級数) を求めよ.

($f(0) = f(L) = 0$ という特性を生かして, うまく部分積分を実行すること.)

(6) 与えられた 1 次元熱方程式の, 境界条件 (B) と初期条件 (I) のもとでの解 $u = u(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) を無限級数の形で書き下せ. ただし, 無限級数の収束性については論じなくてもよい.

金曜 1 時限	科	年	組	学生番号	氏名	評点
---------	---	---	---	------	----	----