数学特論12（学部）
複素解析学大意（大学院）　レポート問題

出題：2008 年 1 月 21 日　　　　　　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

∗ (1)〜(12) のすべてに解答すること．
∗ A4 レポート用紙にて数理事務室（理学部本館 4 階）に提出のこと．

提出期限：2008 年 2 月 8 日 (金) 17 時　厳守

---

2 次の実対称行列のなす実ベクトル空間を V とする：$V := \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$.

(1) $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ は V に内積を定義することを示せ．

以下，V にはこの内積から決まるノルム $\|x\| := \sqrt{\langle\, x \,|\, x \,\rangle}$ でノルム空間と見る．

(2) V に属する行列で，正定値なもの全体がなす集合を Ω とする．Ω は凸錐 (convex cone) で，しかも開集合であることを示せ．

(3) $x \in V$ とするとき

$$x \in \Omega \iff \mathrm{tr}(xy) > 0 \quad (\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})$$

であることを示せ．ただし，$\overline{\Omega}$ は Ω の閉包を表す．

(4) 2 次の一般線型群 $G := GL(2, \mathbb{R})$ は，$\rho : G \times \Omega \ni (g, x) \mapsto gx\,{}^t g$ で Ω に推移的に作用していることを示せ．

(5) W を V の複素化とする．$W = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{C})$ である．$U := \mathbb{C}$（1 次元の複素ベクトル空間）し，Hermitian sesqui-linear な写像 $Q : U \times U \to W$ を

$$Q(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2u_1\overline{u}_2 \end{pmatrix} \qquad (u_1, u_2 \in U)$$

で定義する．Q は Ω-positive であることを示せ．

以上のデータから，Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ を定義する：

$$D := \left\{ (u, w) \in U \times W \;;\; \mathrm{Re}\, w - \frac{1}{2} Q(u, u) \in \Omega \right\}.$$

(6) W と $\mathbb{C}^3$ を $\left(\begin{smallmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right) \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$ で同一視すると，

$$D = \{ (u, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^4 \;;\; v_1(v_3 - |u|^2) - v_2^2 > 0,\ v_3 > |u|^2 \} \quad (v_j := \mathrm{Re}\, w_j)$$

とも記述されることを示せ．

(7) G の部分群 $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;;\; a > 0,\ c > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$ は問 (4) の ρ により，Ω に単純推移的に（固定部分群は単位元のみ）作用していることを示せ．

裏面に続く

(8) $h = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in H$ に対して，$\sigma(h) = c$ とおく．問 (5) の Q に対して，

$$\rho(h)\big(Q(u_1, u_2)\big) = Q(\sigma(h)u_1,\, \sigma(h)u_2) \qquad (h \in H,\, u_1, u_2 \in U)$$

となることを示せ．

(9) N_Q は記号 $n(a,b)$ $(a \in V,\, b \in U)$ の全体に

$$n(a,b)n(a',b') := n(a + a' - \operatorname{Im} Q(b,b'),\, b + b')$$

で積を定義したものとする．N_Q は群をなすことを示せ．

(10) H を N_Q に $\alpha(h)(n(a,b)) = n(\rho(h)a,\, \sigma(h)b)$ で働かせる．このとき，$h \mapsto \alpha(h)$ は H から $\mathrm{Aut}(N_Q)$ （N_Q の自己同型群）への準同型であることを示せ．

(11) 直積集合 $N_Q \times H$ に，

$$(n(a,b),h)(n(a',b'),h') := (n(a,b)n(\rho(h)a', \sigma(h)b'), hh')$$

で積を入れると，群をなしていて，N_Q と $N_Q \times \{I_2\}$ （I_2 は 2 次の単位行列）を同一視するとき，N_Q は正規部分群になっていることを示せ．（この群を N_Q と H の半直積といい，$N_Q \rtimes H$ で表す）．

(12) $n(a,b) \in N_Q,\, h \in H$ のとき

$$(n(a,b),h)\cdot(u,w) := \big(\sigma(h)u + b,\, \rho(h)w + ia + \tfrac{1}{2}Q(b,b) + Q(\sigma(h)u, b)\big) \quad ((u,w) \in D)$$

とおくと，これは $N_Q \rtimes H$ の D への作用を定義していて，この作用は単純推移的であることを示せ．

以上