Faculty of Mathematics
Kyushu University

Faculté de Mathématiques
Université de Kyushu

数 学 特 論 講 義 ノ ー ト

（2007年度後期）

Siegel 領域

野 村 隆 昭

目　　次

§1. Introduction

複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^N$ の有界領域を D とする．写像 $g: D \to D$ が正則同相であるとは，g は正則な全単射であって，g^{-1} も正則なときをいう．N 変数の N 個の函数 $g_1, \dots, g_N$ を使って

$$g(z) = (g_1(z_1, \dots, z_N), \dots, g_N(z_1, \dots, z_N)) \qquad z = (z_1, \dots, z_N)$$

と書けるから，g が正則であるとは，各 g_k $(k = 1, \dots, N)$ が各変数 $z_1, \dots, z_N$ に関して正則であることとする（Hartogs の定理を飲み込んでいる）．

D の正則同相の全体のなす群を $\mathrm{Hol}(D)$ で表す．任意のコンパクト集合上での一様収束ということで，$\mathrm{Hol}(D)$ に位相を入れると，$\mathrm{Hol}(D)$ は位相群になる．すなわち

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Hol}(D) \times \mathrm{Hol}(D) \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in \mathrm{Hol}(D) \\ \mathrm{Hol}(D) \ni g \mapsto g^{-1} \in \mathrm{Hol}(D) \end{cases}$$

は連続になっている．さらに D を有界領域と仮定しているので，$\mathrm{Hol}(D)$ は有限次元の Lie 群になることがわかっている．すなわち，$\mathrm{Hol}(D)$ に多様体の構造（局所的にユークリッド空間）が入って，群演算 (1.1) は実解析的になっている．

定義． D が等質 であるとは，$\mathrm{Hol}(D)$ が D に推移的に働くことをいう．すなわち，任意の $z_1, z_2 \in D$ に対して，$g \in \mathrm{Hol}(D)$ が存在して，$g(z_1) = z_2$ となることをいう．

注意 1.1. 等質性の定義において，特定のもの z_0 を固定しておいて，それを任意の z に写す $g \in \mathrm{Hol}(D)$ が見つかればよいことに注意．実際 z_1, z_2 に対して，$g_j(z_0) = z_j$ $(j = 1, 2)$ となるように $g_j \in \mathrm{Hol}(D)$ を見つけておくと，$g_2 \circ g_1^{-1}$ は z_1 を z_2 に写す．

以下等質有界領域を考える．

<u>$\mathbb{C}^1$ での（等質）有界領域とは？</u>

Riemann の写像定理（弱い形で十分）を使うと，Jordan 閉曲線（区分的に滑らかな単純閉曲線）で囲まれた有界領域は，単位円の内部 $\mathbb{D}$ に正則同相であることがわかる．すなわち，全単射な正則写像 $\varphi: D \to \mathbb{D}$ で，φ^{-1} も正則なものが存在する．写像 φ を modulo にして，単位円の内部 $\mathbb{D}$ が理解できればよいということになる．

一方 $\mathbb{D}$ は等質である．実際次の行列の群 $\boldsymbol{G}$ を考えてみる：

$$\boldsymbol{G} := \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$\boldsymbol{G}$ は，行列の演算で Lie 群になる：行列の積は成分の多項式演算，逆行列を対応させる写像は，逆行列の公式から，有理式演算であるから，共に実解析的な演算である．$\boldsymbol{G}$ は通常 $SU(1,1)$ と書かれる Lie 群である．各 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{G}$ に対して，次の変換 φ_g を考える：

$$\varphi_g(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \qquad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.2}$$

このとき，$\varphi_g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ であって，

$$\begin{cases} \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}, \\ \varphi_I = \mathrm{Id} \qquad (I \text{ は単位行列}) \end{cases}.$$

言い換えると，$\boldsymbol{G}$ から $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ への群準同型が得られている．その核は $\{\pm I\}$ であることも容易にわかる．実は，写像 $\varphi : \boldsymbol{G} \ni g \mapsto \varphi_g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ は全射であることもわかる（函数論での Schwarz の補題を使う）.

$\mathbb{D}$ が等質であることをみよう．(1.2) において，$\varphi_g(0) = \dfrac{\beta}{\overline{\alpha}}$ であるから，これが任意の $z = re^{i\theta}$ $(0 \leqq r < 1)$ となり得るかが問題となるが，それには

$$\alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad \beta = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

とすれば，$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ がみたされて，OK であることがわかる.

定義. 一般に（有界とは限らない）領域 $D \subset \mathbb{C}^N$ が対称であるとは，任意の $z \in D$ に対して，次の 2 条件をみたす $\sigma_z \in \mathrm{Hol}(D)$ が存在することである：

(1) $\sigma_z^2 = \mathrm{Id}$,

(2) z は σ_z の孤立固定点.

命題 1.2. $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ は対称領域である.

証明. $\sigma_0(w) := -w$ $(w \in \mathbb{D})$ とおくと，$\sigma_0 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ であって，$\sigma_0^2 = \mathrm{Id}$ であり，

$$\sigma_0(w) = w \iff -w = w \iff w = 0$$

となっている．一般の $z \in \mathbb{D}$ に対しては，等質性を使って，$g \in \boldsymbol{G}$ を見つけて $\varphi_g(0) = z$ としておく．$\sigma_z := \varphi_g \circ \sigma_0 \circ \varphi_g^{-1}$ とおくと，$\sigma_z^2 = \mathrm{Id}$ であり，

$$\begin{aligned} \sigma_z(w) = w &\iff \varphi_g(\sigma_0(\varphi_g^{-1}(w))) = w \iff \sigma_0(\varphi_g^{-1}(w)) = \varphi_g^{-1}(w) \\ &\iff \varphi_g^{-1}(w) = 0 \iff w = \varphi_g(0) = z \end{aligned}$$

となって証明終わり. □

<u>$\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3$：**E. Cartan (1935)** による結果</u>：

$\mathbb{C}^2$ 及び $\mathbb{C}^3$ の任意の等質有界領域は対称である．

<u>**Cartan** の問題</u>：$\mathbb{C}^N$ $(N \geqq 4)$ ではどうか．

答としては，$N \geqq 4$ のとき，$\mathbb{C}^N$ には非対称な等質有界領域が存在する — である．

注意 1.3. 俗にいわれるような，「任意の等質有界領域は対称である」などという「予想」を E. Cartan は立ててはいない．Cartan は，「高次元の非対称等質有界領域の存在を否定するものは何もないし，その発見は何か新しいアイデアに支えられたものに違いない」と書いたのであって，これを Cartan の予想というのであれば，Cartan の予想は全く正しかったのである．

さて Cartan の問題に解答を与えたのは，Piatetski-Shapiro である (1959)．それには彼が 1957 年に導入した Siegel 領域というものを使う．ただし，Siegel 領域の導入は，保型函数論への応用を見込んでのものであり，決して Cartan の問題を解くためのものではなかった（彼自身が，最も予期しなかった応用と述懐している）．彼は有界対称領域の管状領域タイプの実現を欲していたのである．

ここで管状領域の説明をするために，まず複素平面 $\mathbb{C}$ の上半平面 $\mathbb{R} + i\,\mathbb{R}_{>0} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ （$\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数全体の集合）を考える．これは複素 1 次元の管状領域である．この高次元化の一例として，Siegel の上半空間がある．それを説明しよう．n 次の実対称行列のなす実ベクトル空間を V で表す．Ω は V の元で，正定値のものがなす集合とする．ここで，実対称行列が正定値であるとは，その固有値がすべて正の実数であるものをいう．Ω は開集合であり，凸錐をなしている．実ベクトル空間 V の複素化を W とする：$W := V_{\mathbb{C}}$．明らかに W は n 次複素対称行列のなすベクトル空間である．W の中の開集合 $V + i\Omega = \{Z \in W\,;\, \operatorname{Im} Z \text{ は正定値}\}$ を **Siegel 上半空間**という．$n = 1$ なら明らかに，$V + i\Omega$ は $\mathbb{C}$ における上半平面である．管状領域とは，実ベクトル空間 V と，V の中の開凸錐 Ω を用いて，$V + i\Omega$ と表される，$W = V_{\mathbb{C}}$ の領域のことである．

上半平面 $\{w \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} w > 0\}$ と単位円の内部 $\mathbb{D}$ は，一次分数変換 $z = \dfrac{w - i}{w + i}$ で写りあう．言い換えれば，上半平面は有界対称領域 $\mathbb{D}$ の管状領域モデルと言える．一方，$\mathbb{C}^N$ の開単位球 $\mathbb{B}^N$ は明らかに有界対称領域である．Shilov 境界と呼ばれる函数論的に定義される境界があって，一般に位相的な境界とは異なるのであるが，それの考察をすることにより，$\mathbb{B}^N$ は，どのように V, Ω を選んでも，管状領域

$V+i\,\Omega$ とは正則同相にならないことがわかる．そこで Piatetski-Shapiro が考え出したのが，管状領域の一般化としての Siegel 領域である．命名は上述の Siegel 半空間になぞらえている．任意の Siegel 領域は有界領域に正則同相なので，非対称な等質 Siegel 領域が見つかれば，非対称な等質有界領域が見つかったことになるのである．

本講義では等質 Siegel 領域について，その代数的な構造と Cayley 変換について述べる．ただし，上半空間 $V+i\,\Omega$ ではなく，右半空間 $\Omega+i\,V$（とそれの一般化としての Siegel 領域）が現れる．これは，本質的でないところで虚数単位の i が現れるのを避けるためでもある．

§2. 正則函数

記号：**Polydisc.** $w=(w_1,\dots,w_N)\in\mathbb{C}^N$ と $r=(r_1,\dots,r_N)$ $(r_j>0,\ \forall j)$ に対して

$$\Delta(w,r):=\{z\in\mathbb{C}^N\ ;\ |z_j-w_j|<r_j\quad(j=1,\dots,n)\}$$

その閉包である closed polydisc を $\overline{\Delta}(w,r)$ で表す．

以下 D は $\mathbb{C}^N$ の領域（連結開集合）とする．
定義. D 上の複素数値函数 $f(z)$ が正則であるとは，各 $z^0\in D$ の近傍で $f(z)$ が一様に絶対収束するべき級数に展開できることする：

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^N_{\geqq 0}}a_n(z-z^0)^n\qquad(a_n\in\mathbb{C},\ \forall n)$$

ただし，$n=(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{Z}^N_{\geqq 0}$ に対して，$(z-z^0)^n=(z_1-z^0_1)^{n_1}\cdots(z_N-z^0_N)^{n_N}$ である（多重指数）.

D 上の正則函数の全体を $\mathcal{O}(D)$ で表す.

定理 2.1. $f\in C^1(D)$ のとき，次の (1)〜(4) は同値である：
(1) $f\in\mathcal{O}(D)$,
(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}=0$ $(\forall j=1,\dots,N)$ (Cauchy–Riemann),
(3) $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N$ を $\mathbb{C}^N$ の基本ベクトルとするとき，$\forall z^0\in D$ に対して，$\zeta\mapsto f(z^0+\zeta\boldsymbol{e}_j)$ $(j=1,\dots,N)$ は正則函数.

(4) $\overline{\Delta}(z^0,\varepsilon)\subset D$ のとき，任意の $z\in\Delta(z^0,\varepsilon)$ に対して

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{|\zeta_1-z_1^0|=\varepsilon_1}d\zeta_1\cdots\int_{|\zeta_N-z_N^0|=\varepsilon_N}d\zeta_N\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_N-z_N)}$$

（Cauchy の積分公式）.

証明．　ほとんどの証明は省略するが，(4) $\Longrightarrow$ (1) を示して注意を付け加えておこう．証明は 1 変数のときと同じく，被積分函数をべき級数展開して項別積分する：$|z_j-z_j^0|<\varepsilon_j$ のとき，$0<r_j<1$ をとって，$|z_j-z_j^0|\leqq r_j\varepsilon_j$ とするとき，$\dfrac{|z_j-z_j^0|}{|\zeta_j-z_j^0|}\leqq r_j$ であるから，

$$\frac{1}{\zeta_j-z_j}=\frac{1}{\zeta_j-z_j^0-(z_j-z_j^0)}=\frac{1}{\zeta_j-z_j^0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_j-z_j^0}{\zeta_j-z_j^0}}=\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{(z_j-z_j^0)^{n_j}}{(\zeta_j-z_j^0)^{n_j+1}}$$

は ζ_j に関して一様に絶対収束する．$|f(\zeta)|$ は $\overline{\Delta}(z^0,\varepsilon)$ 上有界であるから

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_N-z_N)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^N_{\geqq 0}}f(\zeta)\frac{(z_j-z_j^0)^{n_j}}{(\zeta_j-z_j^0)^{n_j+1}}$$

は，$\zeta_1,\dots,\zeta_N$ に関して一様収束する．項別積分をすれば，$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^N_{\geqq 0}}a_n(z-z^0)^n$ を得る．ただし，$n=(n_1,\dots.n_N)\in\mathbb{Z}^N_{\geqq 0}$ に対して

(2.1)
$$a_n:=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{|\zeta_1-z_1^0|=\varepsilon_1}d\zeta_1\cdots\int_{|\zeta_N-z_N^0|=\varepsilon_N}d\zeta_N\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1^0)^{n_1+1}\cdots(\zeta_N-z_N^0)^{n_N+1}}$$

である．ゆえに $f(z)$ は $\Delta(z^0,\varepsilon)$ で正則である．特に $f(z)$ の $z=z^0$ でのべき級数展開は $\Delta(z^0,\varepsilon)$ で収束している．　□

注意 **2.2.**　実は $f\in C^1(D)$ という仮定は不要である（Hartogs の定理）.

系 **2.3.**　$f,g\in\mathcal{O}(D)$ で，D のある開集合 E 上で $f\equiv g$ とする．このとき，D 上で $f\equiv g$ である．

注意 **2.4.**　$f(z_1,\dots,z_N):=\sin z_1$ を考えると，$f(z)$ は明らかに正則であるが，$f(z)$ の零点は，$N\geqq 2$ ならば孤立集合ではない.

系 **2.3** の証明．　$f-g$ を考えることにより，$g\equiv 0$ としてよい.

$$U:=\{z\in D\,;\,z\text{ のある近傍で }f\equiv 0\}$$

を考える．明らかに U は開集合で，仮定より空ではない．U は D の中で閉集合でもあることを示そう．そのとき，D は連結ゆえ，$U=D$ を得る．

$z^0 \in \overline{U} \cap D$（$\overline{U}$ は U の閉包）とする．ε をとって，$\overline{\Delta}(z^0,\varepsilon) \subset D$ としておく．このとき，$w^0 \in \Delta(z^0,\varepsilon/4) \cap U$ がとれる．そうすると，$\Delta(w^0,\varepsilon/2) \subset D$ となる．(実際，$z \in \Delta(w^0,\varepsilon/2)$ ならば，$|z_j - w_j^0| < \varepsilon_j/2$ であるから

$$|z_j - z_j^0| \leqq |z_j - w_j^0| + |w_j^0 - z_j^0| < \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_j}{4} < \varepsilon_j$$

ゆえ，$z \in \Delta(z^0,\varepsilon) \subset D$ となっている．）$\Delta(w^0,\varepsilon/2) \subset D$ なので，定理 2.1 とその証明の最後の所から，$f(z)$ のべき級数展開は，$\Delta(w^0,\varepsilon/2)$ で収束する．一方，$w^0 \in U$ なので，$f(z)$ は w^0 の近傍で恒等的に 0 である．よって，$f(z)$ の $z=w^0$ におけるべき級数展開の係数はすべて 0（(2.1) 参照）．従って，$\Delta(w^0,\varepsilon/2)$ で $f \equiv 0$．ここで，$z^0 \in \Delta(w^0,\varepsilon/4) \subset \Delta(w^0,\varepsilon/2)$ であるから，$\Delta(w^0,\varepsilon/2)$ は z^0 の近傍でもある．ゆえに $z^0 \in U$ となって，証明終わり． □

定義． $\mathcal{H}^2(D) := \mathcal{O}(D) \cap L^2(D)$ とする．すなわち，$\mathbb{C}^N \equiv \mathbb{R}^{2N}$ 上の Lebesgue 測度に関して，D 上 2 乗可積分な正則函数のなすベクトル空間を $\mathcal{H}^2(D)$ とする．

定理 2.5． $\mathcal{H}^2(D)$ は $L^2(D)$ の閉部分空間であり，各 $z \in D$ を固定するとき，線型形式 $\mathcal{H}^2(D) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ は連続である．

証明． 記号が煩雑になるので，$N=1$ で証明を記述する．一般の N では各変数で以下の議論を繰り返せばよい．

$h \in \mathcal{O}(D)$，$z^0 \in D$ とし，$\varepsilon > 0$ を選んで，$\overline{\Delta}(z^0,\varepsilon) \subset D$ とする．このとき，$z \in \Delta(z^0,\varepsilon/4)$ とすると，$\dfrac{\varepsilon}{2} \leqq \forall r \leqq \varepsilon$ に対して

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z^0| = r} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, re^{i\theta}\, d\theta \qquad (\zeta = z^0 + re^{i\theta}).$$

この両辺を $r = \dfrac{\varepsilon}{2}$ から ε まで，r に関して積分すると

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} h(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} r\, dr \int_0^{2\pi} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, e^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{A_\varepsilon} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\zeta - z^0}{|\zeta - z^0|}\, d\xi d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta).\end{aligned}$$

ただし，$A_\varepsilon := \{\zeta \in \mathbb{C}\,;\ \varepsilon/2 \leqq |\zeta - z^0| \leqq \varepsilon\}$．ゆえに

$$
\begin{aligned}
|h(z)| &\leqq \frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{A_\varepsilon} \frac{|h(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta \\
&\leqq \frac{1}{\pi\varepsilon}\left[\int_{A_\varepsilon} |h(\zeta)|^2\, d\xi d\eta\right]^{1/2}\left[\int_{A_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^2}\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ここで，$|\zeta - z| \geqq |\zeta - z^0| - |z - z^0| \geqq \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{4} = \dfrac{\varepsilon}{4}$ であるから，$h = f \in \mathcal{H}^2(D)$ のとき，次の不等式が出る：$\|f\|_2$ は $L^2(D)$ ノルムとして

$$
(2.2) \qquad |f(z)| \leqq \frac{4}{\pi\varepsilon^2} m(A_\varepsilon)^{1/2}\|f\|_2 \leqq \frac{4}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}\|f\|_2 \quad (\forall f \in \mathcal{H}^2(D),\ \forall z \in \Delta(z^0, \varepsilon)).
$$

これより，特に $z = z^0$ とおくと，$\mathcal{H}^2(D) \ni f \mapsto f(z^0)$ の連続性が出る．

$\mathcal{H}^2(D)$ が $L^2(D)$ で閉じていることを示そう．$f_k \in \mathcal{H}^2(D)$ $(k = 1, 2, \ldots)$，$f_k \to f \in L^2(D)$ とする．(2.2) より，$\{f_k(z)\}$ は D で広義一様収束する．従って，極限函数 $g(z) := \lim_{k\to\infty} f_k(z)$ は各点 $z \in D$ で定まって，正則函数である．一方，$L^2(D)$ で収束すれば，部分列 $\{f_{k_l}(z)\}$ をとればほとんど至るところ $f(z)$ に収束する．よって，零集合を除いて，$g(z) = f(z)$ であるから，$L^2(D)$ の元としては $f = g$ となって，$f \in \mathcal{H}^2(D)$. □

§3. Bergman 核

<u>記号</u>： $w \in \mathbb{C}^N$ に対して

$$
D_w f(z) := \frac{d}{dt} f(z + tw)\Big|_{t=0} \qquad (w \text{ 方向の微分}).
$$

$w_j = u_j + iv_j$ $(u_j, v_j \in \mathbb{R})$ と書くと

$$
D_w = \sum_{j=1}^{N}\left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right).
$$

ここで，右辺の $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ や $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ は $f(z_1, \ldots, z_n)$ を $x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N$ の函数と見て偏微分することを意味する．

以下の作用素を導入すると便利である：

$$
\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right).
$$

また，各 $w \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\partial_w := \sum_{j=1}^{N} w_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad \overline{\partial}_w := \sum_{j=1}^{N} \overline{w}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}
$$

とおく．そうすると，$D_w = \partial_w + \overline{\partial}_w$ が成り立つ．実際

$$
\begin{aligned}
D_w &= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2}(w_j + \overline{w}_j)\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2i}(w_j - \overline{w}_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{w_j}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial y_j} \right) + \frac{\overline{w}_j}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(w_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{w}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right) \\
&= \partial_w + \overline{\partial}_w.
\end{aligned}
$$

- 領域 $D \subset \mathbb{C}^N$ で C^1 級の函数 $f(z)$ について，

$$
\begin{aligned}
&f(z) \text{ は正則} \\
&\iff \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} f = 0 \quad (j = 1, \ldots, N) \quad (\S 2 \text{ 参照}) \\
&\iff \overline{\partial}_w f = 0 \quad (\forall w \in \mathbb{C}^N) \\
&\iff D_{iw} f = iD_w f \quad （\text{すなわち，各 } z \in D \text{ で，} w \mapsto D_w f(z) \text{ は複素線型}）
\end{aligned}
$$

最後の $\iff$ は，$\partial_{iw} = i\partial_w$, $\overline{\partial}_{iw} = -i\overline{\partial}_w$ による．

定義． D 上の函数 $f(z)$ が反正則 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{f(z)}$ が正則．

- 先に述べた事から

$$
\begin{aligned}
f(z) \text{ が反正則} &\iff \frac{\partial}{\partial z_j} f = 0 \quad (j = 1, \ldots, N) \\
&\iff \partial_w f = 0 \quad (\forall w \in \mathbb{C}^N) \\
&\iff D_{iw} f = -iD_w f \quad (\forall w \in \mathbb{C}^N).
\end{aligned}
$$

$dm(z) := dxdy\ (z = x + iy)$：$\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$ 上の Lebesgue 測度．

$$
\mathcal{H}^2(D) := \left\{ f \in \mathcal{O}(D)\ ;\ \int_D |f(z)|^2\, dm(z) < \infty \right\}.
$$

$f_1, f_2 \in \mathcal{H}^2(D)$ に対して

$$
(f_1 \,|\, f_2) := \int_D f_1(z)\overline{f_2(z)}\, dm(z)
$$

とおくと，$(f_1 \,|\, f_2)$ は $\mathcal{H}^2(D)$ にエルミート内積を定める．これによって，$\mathcal{H}^2(D)$ は Hilbert 空間をなしている．すなわち，ノルム $\|f\| := (f \,|\, f)^{1/2}$ に関して完備なノルム空間になっている．さらに，任意の $z \in D$ に対して，線型形式 $\mathcal{H}^2(D) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ は連続になっている．

注意 3.1. $\mathcal{H}^2(D)=\{0\}$ もあり得る（たとえば，$D=\mathbb{C}^N$ のとき）．D が有界ならば，$\mathcal{H}^2(D)\neq\{0\}$ である．実際，恒等的に 1 という函数は $\mathcal{H}^2(D)$ に属する．

定理 3.2 (Riesz の定理). Hilbert 空間においては，任意の連続な線型形式は内積によって一意的に表される．

Riesz の定理を $\mathcal{H}^2(D)$ 上の連続な線型形式 $f\mapsto f(z)$ に適用すると，各 $z\in D$ に対して，一意的に $K_z\in\mathcal{H}^2(D)$ が存在して

$$f(z)=(f\,|\,K_z)\qquad(\forall f\in\mathcal{H}^2(D)).$$

補題 3.3. $K_z(w)=\overline{K_w(z)}$ $(z,w\in D)$.

証明. $K_z\in\mathcal{H}^2(D)$ より，$K_z(w)=(K_z\,|\,K_w)=\overline{(K_w\,|\,K_z)}=\overline{K_w(z)}$. □

定義. $K(z,w):=K_w(z)$：D の **Bergman 核**.
$K(z,w)$ は z に関して正則，w に関して反正則.

- $K(z,z)=K_z(z)=(K_z\,|\,K_z)=\|K_z\|^2\geqq 0.$

命題 3.4. (1) 任意の $\alpha_1,\dots.\alpha_p\in\mathbb{C}$ と $z_1,\dots,z_p\in D$ に対して，

$$\sum_{j,k=1}^{N}K(z_k,z_j)\alpha_j\overline{\alpha}_k\geqq 0.$$

(2) $\mathcal{H}^2(D)$ の任意の正規直交基底 $\{\psi_m\}$ に対して

$$K(z,w)=\sum_m\psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}.$$

級数は任意の $z,w\in D$ で収束している．

証明. Bergman 核の定義から

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{p}K(z_k,z_j)\alpha_j\overline{\alpha}_k&=\sum_{j,k=1}^{p}\alpha_j\overline{\alpha}_k(K(\cdot,z_j)\,|\,K(\cdot,z_k))\\&=\left(\sum_{j=1}^{p}\alpha_jK(\cdot,z_j)\,\middle|\,\sum_{k=1}^{p}\alpha_kK(\cdot,z_k)\right)\\&=\left\|\sum_{j=1}^{p}\alpha_jK(\cdot,z_j)\right\|^2\geqq 0.\end{aligned}$$

(2) 正規直交基底展開して

$$K_w = \sum_m (K_w \,|\, \psi_m)\psi_m = \sum_m \overline{\psi_m(w)}\psi_m.$$

これは $\mathcal{H}^2(D)$ で収束するので，定理 2.5 より各点 $z \in D$ でも収束して

$$K(z,w) = K_w(z) = \sum_m \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}.$$

定義.　$D \subset \mathbb{C}^N$, $D' \subset \mathbb{C}^{N'}$ を領域とする．写像 $\Phi : D \to D'$ が正則であるとは，$\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_{N'}(z))$ の各成分 $\Phi_j(z)$ が D 上の正則函数であることとする．

注意 3.5.　Φ が D で正則 $\iff$ $\Phi'(z) : \mathbb{C}^N \ni w \mapsto D_w\Phi(z) \in \mathbb{C}^{N'}$ が任意の $z \in D$ で複素線型.

定義.　$\Phi : D \to D'$ が双正則（正則同相）であるとは，Φ が正則な全単射であって，Φ^{-1} も正則であることとする．$D' = D$ のときは，正則同型と呼ぶ．D の正則同型の全体を $\mathrm{Hol}(D)$ で表す.

定理 3.6 (H. Cartan)**.**　D が有界ならば，$\mathrm{Hol}(D)$ はコンパクト開位相で有限次元のリー群になる.

命題 3.7.　$D, D' \subset \mathbb{C}^N$ を領域とし，$\Phi : D \to D'$ は双正則であるとする．
(1) $Tf(z) := (\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z))f(\Phi(z))$ $(f \in \mathcal{H}^2(D'))$ とおくと，T は $\mathcal{H}^2(D')$ から $\mathcal{H}^2(D)$ の上への等長な線形同型である．ただし，$\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)$ は，複素線型写像 $\Phi'(z)$ の複素行列式である.
(2) K, K' をそれぞれ D, D' の Bergman 核とするとき

$$K(z,w) = \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) K'(\Phi(z), \Phi(w)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(w)} \qquad (z, w \in D).$$

補題 3.8.　$F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ を複素線型写像とするとき，$\det_{\mathbb{R}} F = |\det_{\mathbb{C}} F|^2$．ここで，$\det_{\mathbb{R}} F$ は実線型写像 $\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ としての実行列式.

証明.　$\mathbb{R}^{2N}$ 上の実線型写像として，基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N, i\boldsymbol{e}_1, \dots, i\boldsymbol{e}_N$ に関する F の行列は

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \qquad (A, B \text{ は } N \text{ 次正方行列})$$

の形に表される．補題の証明には次式に注意すればよい（演習）：

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2.$$

命題 3.7 の証明. $f \in \mathcal{H}^2(D')$ とする．$|\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)|^2 = \det_{\mathbb{R}} \Phi'(z)$ より

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \int_{D'} |f(z')|^2 \, dm(z') \qquad (z' = \Phi(z) \text{ とおく}) \\
&= \int_D |f(\Phi(z))|^2 \det_{\mathbb{R}} \Phi'(z) \, dm(z) \\
&= \int_D |f(\Phi(z))|^2 |\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)|^2 \, dm(z) \\
&= \int_D |Tf(z)|^2 \, dm(z) = \|Tf\|^2.
\end{aligned}$$

全射であることは，Φ を Φ^{-1} で置き換えれば，T^{-1} が得られることより明らか．
$\det_{\mathbb{C}}(\Phi^{-1})'(\Phi(w)) = \dfrac{1}{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(w)}$ であることに注意．
(2) 定義により，任意の $f \in \mathcal{H}^2(D')$ に対して

$$\begin{aligned}
Tf(z) &= f(\Phi(z)) \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) = (f \,|\, K(\cdot, \Phi(z))) \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) \\
&= \left(f \,\middle|\, K'(\cdot, \Phi(z)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)} \right)
\end{aligned}$$

一方

$$Tf(z) = (Tf \,|\, K(\cdot, z)) = (f \,|\, T^{-1} K_z).$$

ここで

$$T^{-1} K_z(u) = K_z(\Phi^{-1}(u)) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u) = K(\Phi^{-1}(u), z) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u)$$

であるから，次式を得る：

$$K'(u, \Phi(z)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)} = K(\Phi^{-1}(u), z) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u).$$

$u = \Phi(w)$ とおくと，$\det_{\mathbb{C}}(\Phi^{-1})'(\Phi(w)) = \dfrac{1}{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(w)}$ より所要の結果を得る． □

§4. Bergman 計量

$D \subset \mathbb{C}^N$ は領域であるとし，K を D の Bergman 核とする．
各 $z \in D$ を固定するとき，$\partial_w \overline{\partial}_{w'} \log K(z, z)$ は，w に関して複素線型，w' に関して複素反線型である．すなわち，$(w, w') \mapsto \partial_w \overline{\partial}_{w'} \log K(z, z)$ は複素半双線型 (sesquilinear) な形式である．従って，$\mathbb{C}^N$ 上の複素線型作用素 $B(z)$ が存在して

$$(B(z)w \,|\, w') = \partial_w \overline{\partial}_{w'} \log K(z, z) \qquad (w, w' \in \mathbb{C}^N).$$

ここで左辺の $(\cdot\,|\,\cdot)$ は $\mathbb{C}^N$ の標準エルミート内積を表す：$w=(w_1,\ldots,w_N)\in\mathbb{C}, w'=(w'_1,\ldots,w'_N)\in\mathbb{C}^N$ のとき，$(w\,|\,w')=w_1\overline{w}'_1+\cdots+w_N\overline{w}'_N$ である．$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_N$ を $\mathbb{C}^N$ の標準基底とすると，

$$(B(z)\boldsymbol{e}_j\,|\,\boldsymbol{e}_k)=\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial\overline{z}_k}\log K(z,z).$$

定義.　D のエルミート計量とは，各 $z\in D$ に対して，$\mathbb{C}^N\equiv T_z(D)$（$z$ における D の接空間）上の正定値エルミート形式（エルミート内積）$H_z(w,w')$ を与えるものであって，対応 $z\mapsto H_z(w,w')$ が滑らかであるもの．

命題 4.1.　D は有界，または有界領域に正則同相であるとする．
(1) $D\ni z\mapsto(B(z)w\,|\,w')$ は D にエルミート計量を定義する．これを D の **Bergman 計量**と呼ぶ．
(2) D' も有界，または有界領域に正則同相とする．正則写像 $\Phi:D\to D'$ に対して，その微分 Φ' は Bergman 計量に関して等長である．

注意 4.2.　各 $j=1,\ldots,N$ と $z\in D$ に対して，$\mathcal{H}^2(D)\ni f\mapsto\dfrac{\partial}{\partial z_j}f(z)$ は連続（$f\mapsto f(z)$ の連続性と同様に示せる：導函数に対する Cauchy の積分表示式を使うだけ）．従って，任意の $w\in\mathbb{C}^N$ に対して，$\mathcal{H}^2(D)\ni f\mapsto\partial_w f(z)$ も連続．また，前節と同様に，$\mathcal{H}^2(D)$ の函数列 $\{f_n\}$ が $f\in\mathcal{H}^2(D)$ に $\mathcal{H}^2(D)$ で収束すると，$\partial_w f_n(z)$ は $\partial_w f(z)$ に $z\in D$ について広義一様収束することが示せる．より高階の微分も同様である．

命題 4.1 の証明.　D は有界領域としてよい．
(1) $\{\psi_m\}$ を $\mathcal{H}^2(D)$ の正規直交基底とするとき，

$$K(z,w)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}.$$

これと注意 4.2 で述べたことから

$$
\begin{aligned}
&\partial_w \overline{\partial}_w \log K(z,z) \\
&\qquad = \partial_w \left(\frac{1}{K(z,z)} \sum_m \psi_m(z)\, \overline{\partial_w \psi_m(z)} \right) \\
&\qquad = -\frac{\partial_w K(z,z)}{K(z,z)^2} \sum_m \psi_m(z)\, \overline{\partial_w \psi_m(z)} + \frac{1}{K(z,z)} \sum_m \partial_w \psi_m(z)\, \overline{\partial_w \psi_m(z)} \\
&\qquad = \frac{1}{K(z,z)^2} \left\{ \Bigl(\sum_m |\psi(z)|^2 \Bigr) \Bigl(\sum_m |\partial_w \psi(z)|^2 \Bigr) - \Bigl| \sum_m \partial \psi_m(z) \overline{\psi_m(z)} \Bigr|^2 \right\} \\
&\qquad \geqq 0 \qquad \text{（Schwarz の不等式による）.}
\end{aligned}
$$

$z = z^0$ のとき，等号が成立するなら，二つの数列 $\{\partial_w \psi_m(z^0)\}$ と $\{\psi_m(z^0)\}$ は一次従属である．すなわち，m に無関係な $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$（同時には 0 でない）があって，すべての m に対して，$\lambda \partial_w \psi_m(z^0) + \mu \psi_m(z^0)$ が成り立つ．このとき，任意の $f \in \mathcal{H}^2(D)$ に対して，$\lambda \partial_w f(z^0) + \mu f(z^0) = 0$ が成り立つ．$f(z)$ として恒等的に 1 である函数 $\mathbf{1} \in \mathcal{H}^2(D)$ を選ぶと，$\mu = 0$ を得る．そうすると $\lambda \neq 0$ であり，$\partial_w f(z^0) = 0$ $(\forall f \in \mathcal{H}^2(D))$ を得る．$f_c(z) := c_1 z_1 + \cdots + c_N z_N$ $(c := (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N)$ を考えると，$f_c \in \mathcal{H}^2(D)$ であり，

$$
0 = \partial_w f_c(z^0) = w_1 c_1 + \cdots + w_N c_N.
$$

$c_1, \ldots, c_N$ は任意であるから，$w = 0$ でないといけない．ゆえに，各 $z \in D$ で，$\partial_w \overline{\partial}_{w'} \log K(z,z)$ は正定値なエルミート形式になっている．$z \mapsto \partial_w \overline{\partial}_{w'} \log K(z,z)$ の滑らかさは明らかである．

(2) $H^D, H^{D'}$ をそれぞれ D, D' の Bergman 計量とするとき，証明すべきことは

$$
\text{(4.1)} \qquad H^{D'}_{\Phi(z)}(\Phi'(z)w_1, \Phi'(z)w_2) = H^D_z(w_1, w_2) \qquad (w_1, w_2 \in \mathbb{C}^N,\ z \in D)
$$

である．D' の Bergman 核を K' とすると

$$
\begin{aligned}
H^{D'}_{\Phi(z)}(\Phi'(z)w_1, \Phi'(z)w_2) &= \bigl(\partial_{\Phi'(z)w_1} \overline{\partial}_{\Phi'(z)w_2} \log K'\bigr)(\Phi(z), \Phi(z)) \\
&= \partial_{w_1} \overline{\partial}_{w_2} \log K'(\Phi(z), \Phi(z)) \qquad \text{(chain rule).}
\end{aligned}
$$

実際，$(f \circ \Phi)'(z) = f'(\Phi(z))\Phi'(z)$ と，f, Φ がともに正則であることから $\partial_w (f \circ \Phi) = (\partial_{\Phi'(z)w} f)(\Phi(z))$．ここで

$$
(\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)) \log K'(\Phi(z), \Phi(z)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)} = \log K(z,z)
$$

より，$\partial_{w_1}\overline{\partial}_{w_2}\log K'(\Phi(z),\Phi(z)) = \partial_{w_1}\overline{\partial}_{w_2}\log K(z,z) = H_z^D(w_1,w_2)$ となるのがわかる．ゆえに (4.1) が示された． $\square$

例 4.3. 右半平面を考える： $D := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re} z > 0\}$ とする．
$w \in D$ が与えられたとき，$w = u + iv$ $(u > 0)$ として，$\Phi_w(z) := uz + iv$ を考える．$\operatorname{Re} z > 0$ ならば，$\operatorname{Re}\Phi_w(z) = u(\operatorname{Re} z) > 0$ であるから，$\Phi_w : D \to D$ であり，$\Phi_w(1) = w$ である．$\Phi_w'(z) \equiv u$（定数函数）であるから，K を D の Bergman 核とするとき

$$\begin{aligned} K(w,w) &= K(\Phi_w(1),\Phi_w(1)) = (\det_{\mathbb{C}}\Phi_w'(1))^{-1}K(1,1)\,\overline{\det_{\mathbb{C}}\Phi_w'(1)}^{-1} \\ &= \frac{K(1,1)}{u^2} = \frac{K(1,1)}{(\operatorname{Re} w)^2} = \frac{4K(1,1)}{(w+\overline{w})^2}. \end{aligned}$$

補題 4.4. $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^N$ を領域とし，$f(z,w)$ は $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 上の函数で，z について正則，w については反正則であるとする．このとき，$f(z,z) = 0$ $(\forall z \in \mathfrak{D})$ であれば，$f(z,w)$ は恒等的に 0 である．

証明. $h(z,w) := f(z,\overline{w})$ $((z,w) \in \mathfrak{D}\times\overline{\mathfrak{D}})$ とおく．ただし，$\overline{\mathfrak{D}} := \{\overline{z}\ ;\ z \in \mathfrak{D}\}$．そうすると，$h(z,w)$ は $\mathfrak{D}\times\overline{\mathfrak{D}}$ 上の正則函数で，$\Delta := \{(z,\overline{z})\ ;\ z \in \mathfrak{D}\}$ で消えている．変数変換 $\Phi : (z,w) \to (u,v)$

$$\begin{cases} u = \dfrac{z+w}{2}, \\ v := \dfrac{z-w}{2i} \end{cases} \qquad \left(\Longleftrightarrow \begin{cases} z = u + iv, \\ w = u - iv \end{cases} \right)$$

を施す．$h_1(u,v) := h(u+iv,\, u-iv)$ は $\Phi(\mathfrak{D}\times\overline{\mathfrak{D}})$ 上で正則で，$\Phi(\Delta)$ で消えている．$h_1(u,v)$ の $(u_0,v_0) \in \Phi(\Delta)$ での Taylor 展開（の係数）は，$\Phi(\Delta) \subset \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ ゆえ，$\Phi(\Delta)$ で決まるので，0 である．ゆえに，$h_1(u,v)$ は $\Phi(\Delta)$ の近傍で消える．一致の定理から，h_1 が，従って f が恒等的に消える． $\square$

この補題によって，右半平面 D の Bergman 核は，

$$K(z,w) = \frac{4K(1,1)}{(z+\overline{w})^2}.$$

そして，$\log K(z,z) = \mathrm{const} - 2\log(z+\overline{z})$ であるから

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\overline{z}}\log K(z,z) = \frac{2}{(z+\overline{z})^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2}.$$

従ってまた，$B(z) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(\operatorname{Re} z)^2}$ である．

例 4.5. 今度は，単位円板 $\mathbb{D}$ を考えよう： $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$.
$\psi_m(z) := z^m$ を考えると，$\psi_m \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ であり，

$$
\begin{aligned}
(\psi_m \,|\, \psi_n) &= \int_{\mathbb{D}} z^m\, \overline{z}^n\, dxdy \qquad (z = x + iy) \\
&= \int_0^1 r^{m+n+1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta.
\end{aligned}
$$

従って，$m \neq n$ ならば $(\psi_m \,|\, \psi_n) = 0$ であり，$m = n$ のとき

$$
\|\psi_m\|^2 = 2\pi \left[\frac{r^{2m+2}}{2m+2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{m+1}.
$$

ゆえに $\left\{ \dfrac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{\pi}}\, \psi_m\,;\ m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ は正規直交系をなし，原点での Taylor 展開を考えることにより，それは Hilbert 空間 $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ の正規直交基底をなしていることもわかる．ゆえに，K' を $\mathbb{D}$ の Bergman 核とすると

$$
K'(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^m\, \overline{w}^m.
$$

さて，$u \in \mathbb{D}$ のとき，

$$
\sum_{m=0}^{\infty} u^m = \frac{1}{1-u}.
$$

この両辺を u で微分することにより，$u \in \mathbb{D}$ のとき

$$
\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) u^m = \frac{1}{(1-u)^2}.
$$

よって，$K'(z, w) = \dfrac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}$ となる．

例 4.3 の右半平面 D に戻ろう．Cayley 変換

$$
\Phi(z) := \frac{z-1}{z+1} \qquad (z \in D)
$$

によって，D は単位円板 $\mathbb{D}$ に双正則に写される．$\Phi'(z) = \dfrac{2}{(z+1)^2}$ であるから，$\Phi'(1) = \dfrac{1}{2}$ である．従って

$$
\frac{1}{\pi} = K'(0, 0) = K'(\Phi(1), \Phi(1)) = (\det \Phi'(z))^{-1} K(1, 1)\, (\overline{\det \Phi'(1)}\,)^{-1} = 4K(1, 1).
$$

ゆえに $K(1, 1) = \dfrac{1}{4\pi}$ となるから

$$
K(z, w) = \frac{1}{\pi(z + \overline{w})^2}.
$$

§5. Convex cones

V を内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ実ベクトル空間とし，$\|x\| := \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$ とおく．

定義. (1) $\varnothing \neq \Omega \subset V$ が **cone** であるとは,「$x \in \Omega,\ \lambda > 0 \implies \lambda x \in \Omega$」が成り立つことである.

(2) $\Omega \subset V$ が**凸 (convex)** であるとは,「$x, y \in \Omega$ かつ $0 \leqq \lambda \leqq 1 \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$」が成り立つことである.

(3) Convex な cone を **convex cone** と呼ぶ.

注意 5.1. (1) $\mathbb{R}^2$ で，$\{(x,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ は cone であるが，convex ではない.

(2) Ω が cone (resp. convex) $\implies$ その閉包 $\overline{\Omega}$ も cone (resp. convex).

定義. (4) Ω を open convex cone とする．Ω が **regular** （あるいは **proper**）であるとは,

$$\Omega^* := \left\{ y \in V\ ;\ \langle x\,|\,y\rangle > 0 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}$$

とおくとき，$\Omega^* \neq \varnothing$ が成り立つことである.

補題 5.2. Ω^* は,（空集合である場合も込めて）開集合である．従って，$\Omega^* \neq \varnothing$ ならば，Ω^* も open convex cone になっている.

証明. $\Omega^* \neq \varnothing$ のときが問題．このとき，Ω^* が convex cone になっていることは容易にわかる．開集合であることを示そう．$y_0 \in \Omega^*$ とする．$S := \{x \in V\ ;\ \|x\| = 1\}$ とおいて,

$$\delta := \min_{x \in S \cap \overline{\Omega}} \langle x\,|\,y_0\rangle$$

おく．$y_0 \in \Omega^*$ と $S \cap \overline{\Omega}$ のコンパクト性から，$\delta > 0$ である．$\|y\| < \delta/2$ のとき，任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle x\,|\,y_0 + y\rangle \geqq \|x\| \left\langle \frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, y_0 \right\rangle - |\langle x\,|\,y\rangle| \geqq \left(\delta - \frac{\delta}{2}\right)\|x\| = \frac{\delta}{2}\|x\| > 0.$$

ゆえに $y_0 + y \in \Omega^*$．これは y_0 の $\frac{\delta}{2}$ 近傍が Ω^* に含まれていることを示しているから，Ω^* は開集合である． $\square$

以下 Ω は open convex cone とする．もし $0 \in \Omega$ ならば，0 は Ω は内点になって，cone ということから $\Omega = V$ となってしまうことに注意.

命題 5.3. $\Omega^* \neq \varnothing \iff V$ の基底 $e_1, \ldots, e_N$ が存在して，

$$\Omega \subset \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \; ; \; x_1 > 0, \; \ldots, x_N > 0 \right\}. \tag{5.1}$$

証明. $\Omega^* \neq \varnothing$ であるとき，Ω^* は開集合であるから，Ω^* に含まれる V の基底 $f_1, \ldots, f_N$ が存在する．これの双対基底を $e_1, \ldots, e_N$ とする：$\langle f_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N)$．このとき，(5.1) が成り立つ．実際，$x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N \in \Omega$ とすると，$x \neq 0$ であるから（$\Omega = V$ なら，$\Omega^* = \varnothing$ である），

$$x_j = \langle x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N \,|\, f_j \rangle = \langle x \,|\, f_j \rangle > 0.$$

逆にある基底に対して，(5.1) が成り立つとする．$f_1, \ldots, f_N$ をその双対基底とし，$f := f_1 + \cdots + f_N$ を考える．任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ を $x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N$ と表すとき，$x_j \geqq 0$ $(\forall j)$ であり，$x \neq 0$ より，すべてが 0 というわけではない．従って

$$\langle x \,|\, f \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j \langle e_j \,|\, f \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j > 0.$$

ゆえに $f \in \Omega^*$ である． □

系 5.4. $\Omega^* \neq \varnothing \iff \Omega$ は直線を含まない．

証明. $\Omega^* \neq \varnothing$ のとき，(5.1) がある基底 $e_1, \ldots, e_N$ に対して成り立つので，明らかに Ω は直線を含み得ない．

逆に Ω が直線を含まないとすると，任意の $b \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，$-b \notin \overline{\Omega}$ である．実際，もし $-b \in \overline{\Omega}$ ならば，$\pm b \in \overline{\Omega}$ より，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $tb \in \mathbb{R}$. これより，$a \in \Omega$ をとって直線 $\ell := \{a + tb \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ を考えると，次の補題より，$\ell \subset \Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$ となって矛盾するからである．

さて $b \in S \cap \overline{\Omega}$ とする．$-b \notin \overline{\Omega}$ より，閉凸集合の分離定理を使うと，$y_b \in V$ があって，

$$\langle -b \,|\, y_b \rangle < 0, \qquad \langle x \,|\, y_b \rangle \geqq 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega}).$$

$\langle b \,|\, y_b \rangle > 0$ より，b の開近傍 N_b があって，$\langle u \,|\, y_b \rangle > 0$ $(\forall u \in N_b)$．ここで，$S \cap \overline{\Omega} \subset \bigcup_{b \in S \cap \overline{\Omega}} N_b$ であり，$S \cap \overline{\Omega}$ はコンパクトゆえ，$b_1, \ldots, b_n \in S \cap \overline{\Omega}$ が存在して，$S \cap \overline{\Omega} \subset N_{b_1} \cup \cdots \cup N_{b_n}$．そして $y_0 := y_{b_1} + \cdots + y_{b_n}$ とおくと，任意の

$x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, x \,|\, y_0 \,\rangle = \|x\| \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, y_{b_j} \right\rangle > 0$$

となって，$y_0 \in \Omega^*$ である． □

補題 5.5. $\Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$ である．

証明. $\Omega + \overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}$ は容易に言える．$a \in \Omega, b \in \overline{\Omega}$ とする．$a + b \in \Omega$ を示そう．

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1]\ ;\ (1 - t)a + tb \in \Omega\}$$

とおく．Ω は開集合ゆえ，$t_0 > 0$ である．以下 $t_0 = 1$ を示そう．$0 < t_0 < 1$ とすると，$t_0 < t_1 < 1$ をみたす t_1 について，$(1 - t_1)a + t_1 b \notin \Omega$ である．しかし，$(1-t_1)a+t_1 b \in \Omega+\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}$ ではあるので，$(1-t_1)a+t_1 b \in \partial\Omega$．ゆえに，$t_0 < t_2 < t_1$ をみたす（t_1 に十分近い）t_2 があって，$(1 - t_2)a + t_2 b \in \Omega$．これは t_0 の定義に反する．よって $t_0 = 1$．従って，$\frac{1}{2}(a + b) \in \Omega$．ゆえに $a + b = 2 \cdot \frac{1}{2}(a + b) \in \Omega$ となる． □

例 5.6. $V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$（$n$ 次実対称行列のなすベクトル空間）とし，V には $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ で内積を入れておく．$x = (x_{ij}) \in V$ $(x_{ji} = x_{ij})$ とすると，

$$\|x\|^2 = \mathrm{tr}(x^2) = \sum_{j=1}^{n} x_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_{ij}^2.$$

V に属する行列で正定値（固有値はすべて正）なもの全体を Ω とする．このとき，

$$\overline{\Omega} = \{V \text{ に属する行列で半正定値（固有値はすべて非負）なもの}\}$$

となる．

補題 5.7. $x \in V$ とする．このとき，

$$x \text{ が正定値} \iff \text{任意の } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ に対して，} \langle\, x\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0.$$

証明. $x \in V$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．このとき，x の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をとって，$\xi = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{e}_n$ とすると

$$\langle\, x\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \langle\, x\boldsymbol{e}_i \,|\, \boldsymbol{e}_j \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2.$$

これより直ちに補題が従う． □

命題 5.8. Ω は regular な open convex cone である．

証明. Ω が cone であることは明らか．そして convex であることは補題 5.7 から言える：実際，$x, y \in \Omega$，$0 \leqq \lambda \leqq 1$ のとき，任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, (\lambda x + (1-\lambda)y)\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda \langle\, x\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} + (1-\lambda)\langle\, y\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0.$$

開集合であることは，固有値の連続性より．さらに n 次単位行列 I_n に対して，

$$\langle\, x \,|\, I_n \,\rangle = \operatorname{tr} x > 0 \qquad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})$$

となるから，$I_n \in \Omega^*$ である．よって，Ω は regular である．

注意 5.9. じつは，$\Omega^* = \Omega$ が言える．適当な内積に関して $\Omega^* = \Omega$ となるような open convex cone Ω を，自己双対 **(selfdual)** であるという．

§6. Siegel 領域（定義と例）

以下 V は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ実ベクトル空間とし，Ω は V に含まれる regular open convex cone とする．$W := V_{\mathbb{C}}$（V の複素化）とおく．
定義. W の領域 $T_\Omega := \Omega + iV$ を **tube domain** (over Ω) あるいは，**第 1 種の Siegel 領域**と呼ぶ．

例 6.1. $V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ を，n 次実対称行列のなすベクトル空間とし，内積は $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \operatorname{tr}(xy)$ で与えておく．Ω としては，V の正定値な元全体をとる．このとき，$W := V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ の領域 T_Ω は **Siegel の右半空間**と呼ばれるものである．

補題 6.2. $w \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ で，$\operatorname{Re} w \gg 0$（正定値）ならば，行列 w は可逆で，$\operatorname{Re} w^{-1} \gg 0$.

証明. まず，$w = u + iv$ $(u, v \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}))$ と表すとき，任意の $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(w\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} = (u\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} + i(v\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} \tag{6.1}$$

であることに注意する．さて，$\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して，$w\xi = 0$ となったとする．(6.1) において，$(u\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} \in \mathbb{R}$ かつ $(v\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} \in \mathbb{R}$ であるから

$$0 = \operatorname{Re}(w\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} = (u\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n}.$$

$u \gg 0$ であるから，これより $\xi = 0$ が出る．ゆえに w は可逆．そこで $w^{-1} = u' + iv'$ $(u', v' \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}))$ とおくと，再び (6.1) より

$$\begin{aligned}(u'\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} &= \mathrm{Re}(w^{-1}\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^n} = \mathrm{Re}\,(\eta \,|\, w\eta)_{\mathbb{C}^n} \qquad (\eta := w^{-1}\xi)\\ &= \mathrm{Re}\,(w\eta \,|\, \eta)_{\mathbb{C}^n} = (u\eta \,|\, \eta)_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

$\xi \neq 0$ のとき $\eta \neq 0$ であるから $(u\eta \,|\, \eta)_{\mathbb{C}^n} > 0$．ゆえに u' は正定値． □

例 6.1 を続けよう．以下 T_Ω は有界領域に正則同相であることを見よう．$w \in T_\Omega$ ならば，$w + I_n \in T_\Omega$ であるから，補題 6.2 によって，$w + I_n$ は可逆である．ゆえに

$$z := (w - I_n)(w + I_n)^{-1} \qquad (w \in T_\Omega)$$

は well-defined である．

補題 6.3. $I - z^*z \gg 0$．ただし，$z^* := {}^t\overline{z} = \overline{z}$.

証明. $z = I_n - 2(w + I_n)^{-1}$ であるから，$2(w + I_n)^{-1} = I_n - z$．ゆえに $I_n - z$ は可逆であって，$(I_n - z)^{-1} = \frac{1}{2}(w + I_n)$．よって

$$w = 2(I_n - z)^{-1} - I_n = (I_n + z)(I_n - z)^{-1}.$$

従って

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,w &= \frac{1}{2}\left\{(I_n + z)(I_n - z)^{-1} + (I_n - z^*)^{-1}(I_n + z^*)\right\}\\ &= \frac{1}{2}(I_n - z^*)^{-1}\left\{(I_n - z^*)(I_n + z) + (I_n + z^*)(I_n - z)\right\}(I_n - z)^{-1}\\ &= (I_n - z^*)^{-1}(I_n - z^*z)(I_n - z)^{-1}.\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}\,w \gg 0$ であるから，$(I_n - z^*)^{-1}(I_n - z^*z)(I_n - z)^{-1} \gg 0$．ゆえに $I_n - z^*z \gg 0$ である． □

以下，$\Phi(w) := (w - I_n)(w + I_n)^{-1}$ とする．

命題 6.4. (1) $\Phi(T_\Omega) = \{z \in W \,;\, I - z^*z \gg 0\}$．右辺の集合（有界領域である）を **Siegel disk** と呼ぶ．
(2) $\Phi^{-1}(z) = (I_n + z)(I_n - z)^{-1}$ （z が Siegel disk に属するとき）．

注意 6.5. n 次の複素行列 z を自然に $\mathbb{C}^n$ 上の線型作用素と見たときの作用素ノルムを $\|z\|_{\mathrm{op}}$ と表す．すなわち，$\|z\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\|\xi\| \leqq 1} \|z\xi\|$．このとき，Siegel disk は

$$\{z \in W \,;\, \|z\|_{\mathrm{op}} < 1\}$$

とも記述できる．このように表せば，Siegel disk の有界性は明らかであろう．

写像 Φ, Φ^{-1} の正則性は明らかだから，T_Ω は有界領域である Siegel disk と正則同相である．

以下，再び V は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ実ベクトル空間とし，Ω は V に属する regular open convex cone とする．$W := V_{\mathbb{C}}$ とおき，実型 V に関する W の conjugation を $w \mapsto w^*$ とする．すなわち，$(v_1 + iv_2)^* := v_1 - iv_2$ $(v_1, v_2 \in V)$ である．

U を複素ベクトル空間とし，$Q : U \times U \to W$ は，sesqui-linear で Hermitian であるとする．すなわち，$Q(u, u')$ は，第 1 変数 u に関して複素線型，第 2 変数 u' に関して複素反線型であり

$$Q(u', u) = Q(u, u')^* \qquad (u, u' \in U)$$

が成り立っている．さらに Q は **Ω-positive** であるとする：

$$Q(u, u) \in \overline{\Omega} \quad (\Omega \text{ の閉包}), \quad \text{かつ} \quad Q(u, u) = 0 \iff u = 0.$$

$V = \mathbb{R}$ で，$\Omega = \mathbb{R}_{>0}$ のときは，Ω-positive であることは，正定値であるということに他ならない．

定義. $D = D(\Omega, Q) := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}$．この領域を **Siegel 領域**と呼ぶ．

$U = \{0\}$ となる場合を排除しない．このときは，$D = \Omega + iV$ となり第 1 種の Siegel 領域である．$U \neq \{0\}$ の場合，D を**第 2 種の Siegel 領域**と呼ぶ．

例 6.6. $V := \mathbb{R}$, $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$，$U = \mathbb{C}^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ とする．$W = \mathbb{C}$ であり，$\alpha > 0$ として，$Q_\alpha(u, u') := \alpha\,(u\,|\,u')_{\mathbb{C}^m}$ とおく．明らかに Q_α は Ω-positive で Hermitian sesqui-linear である．得られる Siegel 領域は

$$D = \left\{(u, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Re}\, w - \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 > 0\right\}.$$

この D は $\mathbb{C}^{m+1}$ の開単位球 $\mathbb{B}^{m+1}$ と正則同相であることを見よう．そのために，次で定義される写像 Φ_α を考える：

$$\Phi_\alpha(u, w) := \left(\frac{\sqrt{2\alpha}\,u}{w+1}, \frac{w-1}{w+1}\right) \qquad ((u, w) \in D).$$

命題 6.7. $\Phi_\alpha(D) = \mathbb{B}^{m+1}$ であって，

$$\Phi_\alpha^{-1}(u,w) = \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,\frac{u}{1-w},\ \frac{1+w}{1-w}\right) \qquad ((u,w) \in \mathbb{B}^{m+1}).$$

証明. $(u,w) \in D$ のとき，$2\alpha\,\|u\|^2 < 4\operatorname{Re} w$ より

$$\|\Phi_\alpha(u,w)\|^2 = \frac{2\alpha\,\|u\|^2}{|w+1|^2} + \frac{|w-1|^2}{|w+1|^2} < \frac{|w+1|^2}{|w+1|^2} = 1.$$

逆に $z = (u_0, w_0) \in \mathbb{B}^{m+1}$ のとき，すなわち，$\|u_0\|^2 + |w_0|^2 < 1$ のとき，

$$w := \frac{1+w_0}{1-w_0}, \quad u := \frac{(1+w)u_0}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,\frac{u_0}{1-w_0}$$

とおくと，$\operatorname{Re} w = \dfrac{1-|w_0|^2}{|1-w_0|^2}$ となるので，

$$\operatorname{Re} w - \frac{\alpha}{2}\,\|u\|^2 = \frac{1-|w_0|^2}{|1-w_0|^2} - \frac{\|u_0\|^2}{|1-u_0|^2} > 0.$$

ゆえに $(u,w) \in D$ であって，$\Phi_\alpha(u,w) = (u_0, w_0) = z$. □

Φ_α と Φ_α^{-1} の正則性は明らかであろう．

例 6.8. $V := \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})$, $\Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$ とする．V には $\mathrm{tr}(xy)$ で内積を入れておく．$W := V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(2,\mathbb{C})$ である．また，$U = \mathbb{C}^2$ とする．

$$Q(u,u') := \begin{pmatrix} 2u_1\overline{u}_1' & u_1\overline{u}_2' + u_2\overline{u}_1' \\ u_1\overline{u}_2' + u_2\overline{u}_1' & 2u_2\overline{u}_2' \end{pmatrix} \in W \qquad (u = (u_1,u_2), u' = (u_1',u_2') \in U)$$

とおくと，明らかに Q は sesqui-linear で Hermitian である．さらに

$$Q(u,u) = 2\begin{pmatrix} |u_1|^2 & \operatorname{Re} u_1\overline{u}_2 \\ \operatorname{Re} u_1\overline{u}_2 & |u_2|^2 \end{pmatrix}$$

であり，$(1,1)$ 成分も $(2,2)$ 成分も非負，かつ

$$\det Q(u,u) = 4(|u_1|^2|u_2|^2 - (\operatorname{Re} u_1\overline{u}_2)^2) \geqq 0$$

であるから，$Q(u,u) \in \overline{\Omega}$．そして,「$Q(u,u) \iff u = 0$」が成り立っているから，$Q$ は Ω-positive である．

定理 6.9 (Piatetski-Shapiro)**.** 任意の Siegel 領域は有界領域に正則同相である．

証明. Ω は regular なので，前節より，V の基底 $e_1, \ldots, e_N$ が存在して

$$\Omega \subset \left\{\sum_{j=1}^{N} x_j e_j\ ;\ x_j > 0 \quad (\forall j = 1,\ldots,N)\right\}. \tag{6.2}$$

（あ）$D=\Omega+iV$（第 1 種 Siegel 領域）のとき：

$$\begin{aligned}\Omega+iV &\subset \left\{\sum_{j=1}^{N}(x_j+iy_j)e_j \;;\; x_j>0 \quad (\forall j=1,\ldots,N)\right\}\\ &\cong \left\{\sum_{j=1}^{N} z_je_j \;;\; |z_j|<1 \quad (\forall j=1,\ldots,N)\right\}\\ &\cong \mathbb{D}^N \qquad (\mathbb{D}\text{ は }\mathbb{C}\text{ の単位円板}).\end{aligned}$$

ゆえに $\Omega+iV$ は有界領域に正則同相である．

（い）$D=D(\Omega,Q)$ が第 2 種 Siegel 領域のとき．$e_1,\ldots,e_N$ は $W=V_{\mathbb{C}}$ の基底でもあるから

$$Q(u,u')=\sum_{j=1}^{N}Q_j(u,u')e_j$$

と表す．ここで，各 Q_j は sesqui-linear な Hermitian form である．Q が Ω-positive であることと (6.2) より，各 Q_j は半正定値である．Hermite 形式 $Q_j(u,u)$ の標準化を考えることにより，各 j において，$q_1^{(j)},\ldots,q_{l_j}^{(j)}\in U^*$ （U の双対空間）が存在して

$$Q_j(u,u)=\sum_{k=1}^{l_j}|q_k^{(j)}(u)|^2.$$

さて $u\neq 0$ ならば，$Q(u,u)\neq 0$ であるから，$\exists j$ s.t. $Q_j(u,u)\neq 0$．従って，$\exists k$ s.t. $q_k^{(j)}(u)\neq 0$．これは

$$\mathrm{Span}\left\langle q_k^{(j)} \;;\; j=1,\ldots,N,\, k=1,\ldots,l_j\right\rangle_{\mathbb{C}}=U^*$$

を意味する．従って，$\{q_k^{(j)}\}$ から U^* の基底になっているものを選べるので，それらを $p_1,\ldots,p_M$ とする．そして

(6.3) $\displaystyle P_j(u,u'):=\sum_k p_k(u)\overline{p_k(u')}$ （和は $p_k=q_{k'}^{(j)}$ for some k' となる k に亘る）

を考える．$f_1,\ldots,f_M$ を U の基底で，$p_1,\ldots,p_M$ に双対なものとする：$p_a(f_b)=\delta_{ab}$．

$$U_j:=\bigoplus_k \mathbb{C}f_k \qquad (\text{和は (6.3) と同じ } k \text{ に亘る})$$

とおくと，$U_j\neq\{0\}$ のとき，P_j を $U_j\times U_j$ 上で考えた Hermitian sesqui-linear form P_j^0 は正定値になっている．基底 $\{f_1,\ldots,f_M\}$ によって定義される射影 $U\to U_j$ を π_j で表し，写像 $\pi: U\times W\to\prod_{j=1}^{N}(U_j\times\mathbb{C})$ を次式で定義する：

(6.4) $$(u,\, w_1e_1+\cdots+w_Ne_N)\mapsto\big((\pi_1(u),w_1),\ldots,(\pi_N(u),w_N)\big)$$

を考える．容易にこの写像 π は単射であることがわかる．さて，$(u,\, w_1e_1+\cdots+w_Ne_N)\in D$ ならば

$$\mathrm{Re}\, w_j-\frac{1}{2}P_j^0(\pi_j(u),\pi_j(u))=\mathrm{Re}\, w_j-\frac{1}{2}P_j(u,u)\geqq \mathrm{Re}\, w_j-\frac{1}{2}Q_j(u,u)>0$$

であるから，写像 (6.4) によって

$$D\subset\prod_{j=1}^{N}D(\mathbb{R}_{>0},P_j^0)$$

となっていることがわかる．ただし，$U_j=\{0\}$ となっている j については，$D(\mathbb{R}_{>0},P_j^0)$ は tube domain $\mathbb{R}_{>0}+i\mathbb{R}$ と見る．命題 6.7 より，$D(\mathbb{R}_{>0},P_j^0)$ は有界領域に正則同相であるから，その正則同相写像の制限により，D も有界領域に正則同相である． □

§7. Siegel 領域の Shilov 境界

V：内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ実ベクトル空間,
$\Omega\subset V$：regular open convex cone,
U：エルミート内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ複素ベクトル空間,
$Q:U\times U\to W:=V_{\mathbb{C}}$：$\Omega$-positive Hermitian sesqui-linear map.
$D=D(\Omega,Q):=\{(u,w)\in U\times W\,;\ w+w^*-Q(u,u)\in\Omega\}$.
（$w\mapsto w^*$ は実型 V に関する W の conjugation）.
V の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を W に複素双線型で拡張しておく．このとき，W には，$(w_1\,|\,w_2):=\langle\, w_1\,|\,w_2^*\rangle$ でエルミート内積が入る.
定義. $A(D):=\{f\in\mathcal{O}(D)\,;\ f$ は $\overline{D}$ で連続で，$f(u,w)\to 0\ (\|u\|^2+\|w\|^2\to\infty)\}$.

定義. D の **Shilov** 境界とは，次の性質を持つ ∂D の最小の閉集合 B のことである：

$$\forall f\in A(D)\text{ に対して，}\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|=\max_{z\in B}|f(z)|$$

例 7.1. $D=\mathbb{R}_{>0}+i\mathbb{R}$ のとき，D の Shilov 境界は $i\mathbb{R}$ である.
なぜなら，$\forall y_0\in\mathbb{R}$ に対して，$f_{y_0}(z):=\dfrac{1}{z+1-iy_0}$ $(z\in D)$ を考えると

$$|f_{y_0}(x+iy)|^2=\frac{1}{(x+1)^2+(y-y_0)^2}\leqq 1\quad(\text{for }\forall x\geqq 0,\ \forall y\in\mathbb{R})$$

であり，等号は $x=0,\ y=y_0$ のときに限る．さらに明らかに $f_{y_0}\in A(D)$ である．$A(D)$ に属する函数で $iy_0\in i\mathbb{R}$ でのみその絶対値が最大値をとる函数が存在するので，D の Shilov 境界は $i\mathbb{R}$ である．

一般の Siegel 領域 $D=D(\Omega,Q)$ については，次の集合 Σ が D の Shilov 境界となることを以下に示そう：

$$\Sigma := \{(u,w)\in U\times W\ ;\ w+w^*=Q(u,u)\}.$$

補題 7.2. $\overline{D}=\{(u,w)\in U\times W\ ;\ w+w^*-Q(u,u)\in\overline{\Omega}\}$.

証明. 「$\overline{D}\subset$（右辺の集合）」は明らか．逆に $(u_0,w_0)\in U\times W$ が，$w_0+w_0^*-Q(u_0,u_0)\in\overline{\Omega}$ をみたすとする．$t_n\in\Omega$ $(n-1,2,\dots)$ をとって，$t_n\to\operatorname{Re}w_0-\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)$ $(n\to\infty)$ とする．このとき，各 n について $(u_0,\,t_n+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i\operatorname{Im}w_0)\in D$ であって，$t_n+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i\operatorname{Im}w_0\to w_0$ ゆえ，$(u_0,w_0)\in\overline{D}$ である． □

補題 7.2 より，$\partial D=\{(u,w)\in U\times W\ ;\ w+w^*-Q(u,u)\in\partial\Omega\}$ がわかるので，Σ は ∂D の閉集合であることがわかる．

補題 7.3. $f\in A(D)$ のとき，$\displaystyle\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|=\max_{z\in\Sigma}|f(z)|$.

証明. 明らかに $f\neq 0$ としてよい．$z_0:=(u_0,w_0)\in\overline{D}$ で $|f(z)|$ が最大値をとったとする．補題7.2 より，$t_0\in\overline{\Omega}$ が存在して，$w_0=t_0+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i\operatorname{Im}w_0$．ゆえに，任意の $\xi>0$ と $\eta\in\mathbb{R}$ に対して

$$\left(u_0,\,\xi t_0+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i(\operatorname{Im}w_0+\eta t_0)\right)\in\overline{D}.$$

$t_n\in\Omega$ $(n=1,2,\dots)$ をとって，$t_n\to t_0$ とし，$\zeta=\xi+i\eta$ $(\xi>0)$ として

$$\alpha_n(\zeta):=\left(u_0,\,\xi t_n+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i(\operatorname{Im}w_0+\eta t_0)\right),$$
$$\alpha_0(\zeta):=\left(u_0,\,\xi t_0+\frac{1}{2}Q(u_0,u_0)+i(\operatorname{Im}w_0+\eta t_0)\right)$$

を考える．明らかに $\alpha_n(\zeta)$ は $\alpha_0(\zeta)$ に広義一様収束するので，$f(\alpha_n(\zeta))$ は $f(\alpha_0(\zeta))$ に広義一様収束する（$f\in A(D)$ は一様連続であることに注意）．$\alpha_n(\mathbb{R}_{>0}+i\mathbb{R})\subset D$ より，$f\circ\alpha_n$ は正則．ゆえに $f\circ\alpha_0$ も正則．そして $|f\circ\alpha_0(\zeta)|$ は $\zeta=1$ で最大値をとる．最大値の原理により $f\circ\alpha_0$ は定数．$f\in A(D)$ は，$\neq 0$ としている以上，定数函数ではあり得ないので，これは α_0 が定値写像であることを意味する．ゆえに $t_0=0$．これは $(u_0,w_0)\in\Sigma$ を意味する． □

定義.　N_Q は次の集合に群演算を導入したものとする：
集合としては，$N_Q := \{n(a,b)\,;\, a \in V,\, b \in U\}$ で，群演算は

$$n(a,b)n(a',b') := n(a + a' - \operatorname{Im} Q(b,b'),\, b + b').$$

単位元は $n(0,0)$ で，$n(a,b)^{-1} = n(-a,-b)$．しかし，$U \neq \{0\}$ ならば N_Q は可換ではない．N_Q の中心 $Z(N_Q)$ は $\{n(a,0)\,;\, a \in V\}$ に等しい．
定義.　N_Q の $U \times W$ への作用を次で定義する：

$$n(a,b)\cdot(u,w) := \left(u + b,\, w + ia + \frac{1}{2}Q(b,b) + Q(u,b)\right).$$

これが実際に作用になっていること，すなわち次式が成り立つことは各自確かめてほしい（明らかに単位元 $n(0,0)$ は恒等写像として作用している）：

$$n(a,b)\cdot\big(n(a',b')\cdot(u,w)\big) = \big(n(a,b)n(a',b')\big)\cdot(u,w)$$

さらにこの作用が効果的，すなわち，恒等写像で作用するのは単位元だけであることは，作用の定義式から明らかであろう．

補題 7.4.　(1) N_Q は Σ に単純推移的に働く．
(2) N_Q は D にも働く．従って N_Q は $\overline{D}$ に働く．

証明.　$(u',w') = n(a,b)\cdot(u,w)$ とおく．定義より

$$u' = u + b, \qquad w' = w + ia + \frac{1}{2}Q(b,b) + Q(u,b).$$

従って

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w' - \frac{1}{2}Q(u',u') &= \operatorname{Re} w + \frac{1}{2}Q(b,b) + \operatorname{Re} Q(u,b) - \frac{1}{2}Q(u+b,u+b) \\ &= \operatorname{Re} w - \frac{1}{2}Q(u,u). \end{aligned} \tag{7.1}$$

よって，$(u,w) \in \Sigma$ ならば $(u',w') \in \Sigma$ であり，$(u,w) \in D$ ならば $(u',w') \in D$ である．さらに，

$$n(a,b)\cdot(0,0) = \left(b,\, \frac{1}{2}Q(b,b) + ia\right)$$

であるから，N_Q の Σ への作用は推移的であり，原点 $(0,0)$ における固定部分群は単位元のみである．　$\square$

定理 7.5.　Siegel 領域 D の Shilov 境界は Σ に一致する．

証明. 補題 7.3 より，Shilov 境界は Σ の部分集合であることがわかる．さて，$z_0 := (u_0, w_0) \in \Sigma$ をとるとき，z_0 でのみ $|f(z)|$ が最大値をとる $f \in A(D)$ が存在することを示せば，定理の証明が終わる．Ω が regular であることを仮定しているので，命題 5.3 より，V の基底 $e_1, \ldots, e_N$ を選んで，

$$\Omega \subset \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \; ; \; x_j > 0 \quad (\forall j = 1, \ldots, N) \right\}$$

とできる．さらに $Q(u, u') = \sum_{j=1}^{N} Q_j(u, u') e_j$ とする．このとき，$(u, w) \in \overline{D}$ ($w = w_1 e_1 + \cdots + w_N e_N$) ならば，

$$\operatorname{Re} w_j \geqq \frac{1}{2} Q_j(u, u) \geqq 0 \tag{7.2}$$

である．函数

$$f_0(u,\, w_1 e_1 + \cdots + w_N e_n) := \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{w_j + 1} \qquad (w_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, N)$$

を考えると，明らかに $f_0 \in A(D)$ で，$|f_0(0,0)| = 1$ は $|f_0(u,w)|$ の $\overline{D}$ における最大値である．さて，$|f(u,w)| = 1$ ($(u,w) \in \overline{D}$) ならば $w = 0$．これと (7.2) より，各 $j = 1, \ldots, N$ について $0 = \operatorname{Re} w_j \geqq \frac{1}{2} Q_j(u,u) \geqq 0$．よって $Q_j(u,u) = 0$ ($\forall j$)．ゆえに $Q(u,u) = 0$ となって $u = 0$ が出る．よって $|f_0(u,w)|$ は，$(u,w) = (0,0)$ においてのみ最大値をとる．

次に補題 7.4 より $n_0 \in N_Q$ を選んで，$(u_0, v_0) = n_0 \cdot (0,0)$ とする．函数

$$f(u,w) := f_0(n_0^{-1} \cdot (u,w)) \qquad ((u,w) \in \overline{D})$$

を考えると，$f \in A(D)$ であり，$|f(u,w)|$ の $\overline{D}$ における最大値は $n_0^{-1} \cdot (u,w) = (0,0)$，すなわち，$(u,v) = n_0 \cdot (0,0) = (u_0, v_0)$ のときにのみとられる． □

§8. Siegel 領域とその Shilov 境界のアフィン同型群

記号は §7 の物を踏襲する：

V：内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ実ベクトル空間,

$\Omega \subset V$：regular open convex cone,

U：エルミート内積 $(\cdot | \cdot)$ を持つ複素ベクトル空間,

$Q : U \times U \to W := V_{\mathbb{C}}$：$\Omega$-positive Hermitian sesqui-linear map.

$D = D(\Omega, Q) := \{(u,w) \in U \times W \; ; \; w + w^* - Q(u,u) \in \Omega\}$.

（$w \mapsto w^*$ は実型 V に関する W の conjugation）．
V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を W に複素双線型で拡張しておく．

Σ を D の Shilov 境界とすると，定理 7.5 より

$$\Sigma = \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* = Q(u, u)\}.$$

定義．　$\mathrm{Aff}(U \times W)$：$Z := U \times W$ 上の可逆で holomorphic な affine 変換 $g(A, c)$ 全体のなす群：

$$g(A, c) : z \mapsto Az + c \qquad (A \in GL(Z),\, c \in Z).$$

積は $g(A, c)g(A', c') = g(AA',\, c + Ac')$ であり，単位元は恒等写像である $g(I, 0)$．そして $g(A, c)^{-1} = g(A^{-1}, -A^{-1}c)$．
定義．　$\mathrm{Aff}(\Sigma) := \{g \in \mathrm{Aff}(U \times W) \,;\, g(\Sigma) = \Sigma\}$.

§7 で $N_Q = \{n(a, b) \,;\, a \in V,\, b \in U\}$ という群を導入した：群演算は

$$n(a, b)n(a', b') := n(a + a' - \operatorname{Im} Q(b, b'),\, b + b').$$

N_Q は次式により $U \times W$ に効果的に作用している：

$$n(a, b) \cdot (u, w) := n(a, b) \cdot (u, w) := \left(u + b,\, w + ia + \frac{1}{2}Q(b, b) + Q(u, b)\right).$$

つまり，N_Q から $\mathrm{Aff}(U \times W)$ への，単射な準同型が与えられたことになる（注：$u \mapsto Q(u, b)$ は U から W への線型変換である）．この単射準同型で $N_Q \subset \mathrm{Aff}(\Sigma)$ とみなせることを補題 7.4 (1) で示した．

定義．　$H_Q := \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(U \oplus W) \,;\, \begin{array}{c} B \in GL(U),\, A \in GL(V) \\ A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu)\ (\forall u \in U) \end{array} \right\}.$
定義．　準同型（表現）ρ を次式で定義する：

$$\rho : H_Q \ni \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto A \in GL(V).$$

補題 8.1．　$\mathrm{Ker}(\rho)$ はコンパクトである．

証明．　$\Omega^* \neq \varnothing$ であるから，$E \in \Omega^*$ をとると，$(u \,|\, u')_E := \langle\, Q(u, u') \,|\, E \,\rangle$ は U にエルミート内積を定める．さて，$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\rho)$ ならば，$A = I$ ゆえ，$B \in GL(U)$ は，$Q(u, u) = Q(Bu, Bu)$ $(\forall u \in U)$ をみたす．従って，B は内積 $(\cdot \,|\, \cdot)_E$ に関するユニタリ群に属する．ゆえに，$\mathrm{Ker}(\rho)$ からそのユニタリ群への単射準同型が得られたことになるので，$\mathrm{Ker}(\rho)$ はコンパクトである．　□

命題 8.2. (1) $H_Q \subset \mathrm{Aff}(\Sigma)$.
(2) $H_Q = \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(\Sigma)$：右辺は $\mathrm{Aff}(\Sigma)$ における $(0,0)$ の固定部分群．従って，$\Sigma \approx \mathrm{Aff}(\Sigma)/H_Q$.
(3) $\mathrm{Aff}(\Sigma) = N_Q \rtimes H_Q$.

証明. (1) $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_Q$ とする．任意の $(u,w) \in \Sigma$ に対して，$(Bu, Aw) \in \Sigma$ を示そう．実際，$A \in GL(V)$ より，$\mathrm{Re}\, Aw = A(\mathrm{Re}\, w)$ であるから

$$\mathrm{Re}(Aw) - \frac{1}{2}Q(Bu,Bu) = A\left(\mathrm{Re}\, w - \frac{1}{2}Q(u,u)\right) = 0.$$

(2) H_Q の元が原点 $(0,0)$ を動かさないことは明らか．$g \in \mathrm{Aff}(\Sigma)$ が原点を固定したら，明らかに g は線型であるから，$g = \begin{pmatrix} B & C \\ D & A \end{pmatrix}$ と書ける．ただし

$$B \in \mathcal{L}(U), \quad C \in \mathcal{L}(W,U), \quad D \in \mathcal{L}(U,W), \quad A \in \mathcal{L}(W).$$

任意の $y \in V$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$(0, ity) \in \Sigma$ ゆえ，$\Sigma \ni g(0,ity) = (itCy, itAy)$. ゆえに

$$\frac{t^2}{2}Q(Cy,Cy) = \mathrm{Re}\, itAy = -t\,\mathrm{Im}\, Ay.$$

これがすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つので，$\mathrm{Im}\, Ay = 0$ かつ $Q(Cy,Cy) = 0$．これより，$A \in \mathcal{L}(V)$ かつ $C|_V = 0$．C は複素線型であるから，$C = 0$.

さらに，任意の $u \in U$ と $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$\left(e^{i\theta}u,\, \frac{1}{2}Q(u,u)\right) \in \Sigma$ であるから，

$$\Sigma \ni g\big(e^{i\theta}u,\, \tfrac{1}{2}Q(u,u)\big) = \left(e^{i\theta}Bu,\, e^{i\theta}Du + \tfrac{1}{2}A\big(Q(u,u)\big)\right).$$

従って

$$\mathrm{Re}\, e^{i\theta}Du + \frac{1}{2}A\big(Q(u,u)\big) = \frac{1}{2}Q(Bu,Bu).$$

ゆえに $\mathrm{Re}\, e^{i\theta}Du$ は $\theta \in \mathbb{R}$ に無関係．これは $Du = 0$ を意味し，従って $A(Q(u,u)) = Q(Bu,Bu)$ も意味する．$C = 0$，$D = 0$ である以上，$B \in GL(U)$ かつ $A \in GL(V)$ である．

$N_Q \subset \mathrm{Aff}(\Sigma)$ がすでに Σ に推移的に作用している（補題 7.4）から，$\mathrm{Aff}(\Sigma)$ は Σ に推移的に働いている．ゆえに $\Sigma \approx \mathrm{Aff}(\Sigma)/H_Q$.
(3) $g \in \mathrm{Aff}(\Sigma)$ をとると，N_Q の推移性から，$g \cdot (0,0) = n(a,b) \cdot (0,0)$ $(a \in V, b \in U)$. ゆえに $n(a,b)^{-1}g \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(\Sigma) = H_Q$．よって $g = nh$ $(n \in N_Q,\, h \in H_Q)$ と書かれる．明らかに $N_Q \cap H_Q = \{\mathrm{Identity}\}$ であるから，この $g = nh$ という表示は一意的である．$N_Q \triangleleft \mathrm{Aff}(\Sigma)$ を示すには，任意の $n \in N_Q, h \in H_Q$ に対して，$hnh^{-1} \in N_Q$

さえ示せばよい．これは次式から従う（演習：$(u,w) \in U \times W$ への作用を見よ）：

$$h_{A,B}n(a,b)h_{A,B}^{-1} = n(Aa,Bb) \qquad \left(h_{A,B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_Q\right).$$

系 8.3. $\mathrm{Aff}(\Sigma)$ は

$$\left\{ g(A,B,a,b)\ ;\ \begin{matrix} A \in GL(V),\ B \in GL(U),\ a \in V,\ b \in U, \\ A(Q(u,u)) = Q(Bu,Bu)\ (\forall u \in U) \end{matrix} \right\}$$

の全体に次式で積を入れたもののなす群と同一視できる：

$$g(A,B,a,b)g(A',B',a',b') := g(AA',BB',\ a+Aa'-\mathrm{Im}\,Q(b,Bb'),\ b+Bb').$$

単位元は $g(I,I,0,0)$ であり，$g(A,B,a,b)^{-1} = g(A^{-1},B^{-1},-A^{-1}a,\ -B^{-1}b)$ である．

証明． $g(A,B,a,b) := n(a,b)h_{A,B}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} g(A,B,a,b)g(A',B',a',b') &= n(a,b)h_{A,B}n(a',b')h_{A',B'} \\ &= n(a,b)h_{A,B}n(a',b')h_{A,B}^{-1}h_{A,B}h_{A',B'} \\ &= n(a,b)n(Aa',Bb')h_{AA',BB'} \\ &= n(a+Aa'-\mathrm{Im}\,Q(b,Bb'),\ b+Bb')h_{AA',BB'} \\ &= g(AA',BB',\ a+Aa'-\mathrm{Im}\,Q(b,Bb'),\ b+Bb'). \quad \square \end{aligned}$$

定義． $\mathrm{Aff}(D) := \{g \in \mathrm{Aff}(U \times W)\ ;\ g(D) = D\}$.

補題 7.4 (2) より，$N_Q \subset \mathrm{Aff}(D)$ とも見ることができる．

補題 8.4. $\mathrm{Aff}(D) \subset \mathrm{Aff}(\Sigma)$.

証明． $g \in \mathrm{Aff}(D)$ とすると，g は $U \times W$ の位相同型でもあるから，$g(\partial D) = \partial D$. さて，$z_0 = (u_0,w_0) \in \Sigma$ とし，$f \in A(D)$ を，定理 7.5 の証明でその存在を示したところの，z_0 でのみ $|f(z)|$ が $\overline{D}$ での最大値をとる函数とする．$f \circ g^{-1}$ を考えると，明らかに $f \circ g^{-1} \in A(D)$ であり，$\overline{D}$ での最大値を $g(u_0,w_0)$ でのみとる．ゆえに $g(u_0,w_0) \in \Sigma$ となって，$g \in \mathrm{Aff}(\Sigma)$ である． $\square$

定理 8.5. (1) $\mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D) = \{h_{A,B} \in H_Q\ ;\ A(\Omega) = \Omega\}$.
(2) $\mathrm{Aff}(D) = \{g(A,B,a,b)\ ;\ A(\Omega) = \Omega\}$.
(3) $\mathrm{Aff}(D) = N_Q \rtimes \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$.
(4) $E \in \Omega$ とすると，$\mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D) \subset \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$.

証明. (1) 補題 8.4 から，$\mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D) \subset \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(\Sigma) = H_Q$ であるから，$h \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$ をとると，$h = h_{A,B}$ の形．さて，任意の $x \in \Omega$ に対して，$(0,x) \in D$ であるから，$(0, Ax) = h(0,x) \in D$．ゆえに，$Ax \in \Omega$．これより $A(\Omega) \subset \Omega$ であるが，h^{-1} を考えると，逆の包含関係が出るので，$A(\Omega) = \Omega$．逆に $h_{A,B} \in H_Q$ において，$A(\Omega) = \Omega$ ならば，任意の $(u,w) \in D$ に対して，$h_{A,B}(u,w) = (Bu, Aw)$ より

$$\mathrm{Re}\, Aw - \frac{1}{2}Q(Bu, Bu) = A\Big(\mathrm{Re}\, w - \frac{1}{2}Q(u,u)\Big) \in A(\Omega) = \Omega.$$

ゆえに $h_{A,B} \in \mathrm{Aff}(D)$．そして原点を動かさないので，$h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$.
(2) $g \in \mathrm{Aff}(D)$ とすると，補題 8.4 から $g \in \mathrm{Aff}(\Sigma)$．そうすると命題 8.2 より，$g = g(A,B,a,b) = n(a,b)h_{A,B}$ の形．よって $h_{A,B} = n(a,b)^{-1}g \in \mathrm{Aff}(D)$．これより，$h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$．ゆえに (1) より $A(\Omega) = \Omega$ となって，包含関係 $\subset$ が示せた．逆向きは明らかであろう．
(3) $g \in \mathrm{Aff}(D)$ ならば，$g \in \mathrm{Aff}(\Sigma)$ なので，$g = nh$ ($n \in N_Q$, $h \in H_Q$) と書かれる．ここで，$h = n^{-1}g \in \mathrm{Aff}(D)$ であるから，$h \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$ である．以下命題 8.2 の (3) と同様.
(4) $g = g(A,B,a,b) \in \mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D)$ とする．(3) により，$g = n(a,b)h_{A,B}$ with $h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$ と表すと

$$\begin{aligned}(0,E) = g\cdot(0,E) &= n(a,b)h_{A,B}\cdot(0,E) = n(a,b)\cdot(0,AE)\\ &= (b, AE + ia + Q(b,b)).\end{aligned}$$

これより，$a = 0$，$b = 0$ が出るので，$g = h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$. □

§9. 等質 Siegel 領域

$D = D(\Omega, Q)$：Siegel 領域
<u>先週の結果</u>：
$\mathrm{Aff}(D) = N_Q \rtimes \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$,
$\mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D) = \left\{ h_{A,B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_Q \,;\, A(\Omega) = \Omega \right\}$,
ただし，
$H_Q := \{h_{A,B} \,;\, B \in GL(U),\, A \in GL(V),\, A(Q(u,u)) = Q(Bu,Bu)\ (\forall u \in U)\}$.
定義. D が **affine homogeneous** $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\mathrm{Aff}(D)$ が D に推移的に作用する.

命題 9.1.　D が affine homogeneous $\iff$ $\mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$ が Ω に推移的に働く．

証明.　$E \in \Omega$ を固定する．

$[\implies]$：任意に $x \in \Omega$ をとると，$(0,x) \in D$ である．このとき，$\exists g \in \mathrm{Aff}(D)$ s.t. $g \cdot (0,E) = (0,x)$．ここで，$g = n(a,b)h_{A,B}$ $(n \in N_Q,\ h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D))$ と表すと

$$g \cdot (0,E) = n(a,b) \cdot (0,AE) = (b, AE + ia + \tfrac{1}{2}Q(b,b))$$

$AE \in \Omega \subset V$ より，最右辺が $(0,x)$ に等しいことから，$b=0,\ a=0,\ AE=x$ を得る．これは $\mathrm{Stab}_{(0,0)}$ が Ω に推移的に働いていることを示す．

$[\impliedby]$：$z=(u,w) \in D$ が与えられたとき，$\mathrm{Re}\,w - \frac{1}{2}Q(u,u) \in \Omega$ であるから，仮定より，$h_{A,B} \in \mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)$ が存在して，

$$h_{A,B} \cdot (0,E) = \big(0,\ \mathrm{Re}\,w - \tfrac{1}{2}Q(u,u)\big).$$

$a := \mathrm{Im}\,w,\ b := u$ とおくと

$$\begin{aligned} n(a,b)h_{A,B} \cdot (0,E) &= n(a,b) \cdot \big(0,\ \mathrm{Re}\,w - \tfrac{1}{2}Q(u,u)\big) \\ &= \big(b,\ \mathrm{Re}\,w - \tfrac{1}{2}Q(u,u) + ia + \tfrac{1}{2}Q(b,b)\big) \\ &= (u,w) \end{aligned}$$

となって，D は affine homogeneous である．

Theorem 9.1. D が homogeneous（$\mathrm{Hol}(D)$ が D に推移的に働く）ならば，D は affine homogeneous である．

補題 9.2.　G を局所コンパクト群で，第２可算（可算個の開集合の基が存在する），かつ局所連結であるとする．G の単位元の連結成分を G° とする．G° は G の正規部分群であり，G の局所連結性から開集合である．G が連結な局所コンパクト空間 M に推移的に働くならば，G° がすでに M に推移的である．

以下，$D = D(\Omega, Q)$ は等質 Siegel 領域とする．定理 9.1 より，$E \in \Omega$ とするとき

$$D \approx \mathrm{Aff}(D)/\mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D) \approx \mathrm{Aff}(D)^\circ/\mathrm{Stab}_{(0,E)}(\mathrm{Aff}(D)^\circ)$$

実は，$\mathrm{Stab}_{(0,E)}(\mathrm{Aff}(D)^\circ) = \big(\mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D)\big)^\circ$ であることが示せるので，

$$D \approx \mathrm{Aff}(D)^\circ/\mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D)^\circ$$

というように，括弧をはずして書いてもよかろう．

　煩雑なので，以下 $K := \mathrm{Stab}_{(0,E)}\mathrm{Aff}(D)^\circ$ とおく．

定理 9.3. （ある条件をみたす）実下三角行列の群として実現できる部分群 H_0 を用いて，$\mathrm{Stab}_{(0,0)}\mathrm{Aff}(D)^\circ = H_0 K$ と表される．

以下 $H := N_Q \rtimes H_0$ とおいて，H を $\mathrm{Hol}(D)$ の岩沢部分群と呼ぼう．

定理 9.4. (1) $\mathrm{Aff}(D)^\circ = HK$.
(2) H は可解であって，D に単純推移的に働く．
(3) $\rho : H_Q \ni h_{A,B} \mapsto A \in GL(V)$ の H_0 への制限は単射であり，これにより H_0 は Ω に単純推移的に働く．

証明． (1) と (2) の単純推移性は明らかであろう．
(3) $\mathrm{Ker}(\rho) \cap H_0$ は実三角行列のなす群のコンパクト部分群と見ることができるが，それは単位元からなるものしかない．$E \in \Omega$ とし，$h_{A,B} \in H_0$ かつ $\rho(h_{A,B})E = E$ ならば，$h_{A,B} \cdot (0, E) = (0, E)$ であるから，$h_{A,B} \in H_0 \cap K = \{\mathrm{Identity}\}$. □

複素ベクトル空間 Z のアフィン変換群を $\mathrm{Aff}(Z)$ とすると，$\mathrm{Aff}(Z)$ は行列のなす群

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \; ; \; A \in GL(Z),\, c \in Z \right\}$$

と同一視される．実際

$$\left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & c' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & Ac' + c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

であるから，アフィン変換 $z \mapsto Az + c$ と行列 $\left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ の対応が，群同型を与えている（§8 の最初を参照のこと）．

$\mathrm{Aff}(Z)$ の Lie 代数を $\mathfrak{aff}(Z)$ で表す．$\mathfrak{aff}(Z)$ は行列のなすベクトル空間

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \; ; \; A \in \mathcal{L}(Z),\, c \in Z \right\}$$

に下記でブラケット積を導入したものであると見ることができる：

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} A' & c' \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c|c} AA' - A'A & Ac' - A'c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\mathrm{Aff}(D)$ は $\mathrm{Aff}(U \times W)$ の部分 Lie 群，従って Lie 代数 $\mathfrak{aff}(D)$ は $\mathfrak{aff}(U \times W)$ の部分 Lie 代数である．実際，対応は

$$h_{A,B} = \left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad n(a,b) = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & b \\ \hline Q(\cdot, b) & I & \frac{1}{2}Q(b,b) + ia \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となっている．簡単な計算で

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot,b) & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\qquad = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot,b) & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q(b,b) \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\qquad = n(a,b)
\end{aligned}
$$

となる．よって，N_Q の Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q := \{X \in \mathrm{Aff}(U \times W)\ ;\ \exp tX \in N_Q\ (\forall t \in \mathbb{R})\}$ は，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{1/2} &:= \left\{\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot,b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \frac{d}{dt}n(0,tb)\Big|_{t=0}\ ;\ b \in U\right\}, \\
\mathfrak{h}_1 &:= \left\{\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \frac{d}{dt}n(ta,0)\Big|_{t=0}\ ;\ a \in V\right\}
\end{aligned}
$$

とおくとき，$\mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_{1/2} + \mathfrak{h}_1$（ベクトル空間としての和）と記述される．また

$$
\left[\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot,b) & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b' \\ \hline Q(\cdot,b') & 0 & ia' \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2i\,\mathrm{Im}\,Q(b,b') \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

より，$[\mathfrak{n}_Q, [\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q]] = \{0\}$ となることがわかる．この事実を，Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は 2-step nilpotent であるという．
以上より，$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}\,H$，$\mathfrak{h}_0 := \mathrm{Lie}(H_0)$ とおくとき，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_{1/2} + \mathfrak{h}_1$．

さて，一般に Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$
D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \big([x,y]\ (x, y \in \mathfrak{g})\ \text{で張られるベクトル空間}\big)
$$

とおくと，$D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであることがわかる（導来イデアルという）．帰納的に，$D^k\mathfrak{g} := D(D^{k-1}\mathfrak{g})$ と定義し，ある k で $D^k\mathfrak{g} = \{0\}$ となるとき，$\mathfrak{g}$ は可解であるあという．

さて，Lie 代数 $\mathfrak{n}$ がべき零であるとは，帰納的に $\mathfrak{n}^k := [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{k-1}]$ と定義するとき，ある k があって，$\mathfrak{n}^k = \{0\}$ となるときをいう．

さて一般に，$\mathfrak{g}$ が可解，$\mathfrak{n}$ がべき零ならば，$\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ は可解である．実際帰納法で容易に $D^k(\mathfrak{g} + \mathfrak{n}) \subset D^k\mathfrak{g} + \mathfrak{n}$ がわかるので，ある k_0 で，$D^{k_0}(\mathfrak{g} + \mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$ がわかる．帰

納法で容易に $D^j\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}^j$ が示せるので，$D^{j+k_0}(\mathfrak{g}+\mathfrak{n}) \subset D^j\mathfrak{n}$ となって，j が十分大きければ右辺は $\{0\}$ である．特に，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{n}_Q$ は可解である．

§10. 正規 j 代数（Piatetski-Shapiro 代数）

$D = D(\Omega, Q)$：等質 Siegel 領域，$E \in \Omega$ を固定し，$(0, E) \in D$ を考える

先週：$\exists H \subset \mathrm{Aff}(D)$ s.t. H は D に単純推移的に働く．
H は可解リー群で，$H = N_Q \rtimes H_0$ と表される．
N_Q：2-step nilpotent，$H_0 \subset H_Q$ は Ω に単純推移的に働く．
以下 $x \in \Omega$ に対して，$\eta_0(x) \in H_0$ を，$\eta_0(x)E = x$ をみたす一意的な元を表すことにする．

そして，H, H_0, N_Q の Lie 代数をそれぞれ対応するドイツ文字で表そう：

$$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H), \quad \mathfrak{h}_0 := \mathrm{Lie}(H_0), \quad \mathfrak{n}_Q := \mathrm{Lie}(N_Q).$$

このとき，前節の記号を用いて $\mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_{1/2} + \mathfrak{h}_1$ with

$$[\mathfrak{h}_{1/2}, \mathfrak{h}_{1/2}] \subset \mathfrak{h}_1, \qquad [\mathfrak{h}_{1/2}, \mathfrak{h}_1] \subset \{0\}, \qquad [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subset \{0\}.$$

さらに，

$$\mathfrak{h}_0 \subset \left\{ h_{A,B} \,;\, \begin{array}{c} B \in \mathcal{L}(U),\ A \in \mathcal{L}(V) \\ A(Q(u,u)) = Q(Bu,u) + Q(u,Bu)\ (\forall u \in U) \end{array} \right\}$$

であることに注意すれば，$[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_k] \subset \mathfrak{h}_k$ $(k = 0, \frac{1}{2}, 1)$ がわかる．実際

$$\left[\left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot, b) & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & Bb \\ \hline Q(\cdot, Bb) & 0 & iAa \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

　さて次に，$\alpha : H \to D$ を $(0, E)$ を通る軌道写像とする：

$$\alpha(n(a,b)h_0) := n(a,b)h_0 \cdot (0, E) \qquad (n(a,b) \in N_Q,\ h_0 \in H_0).$$

N_Q の作用を具体的に書けば (cf. §7)

$$\alpha(n(a,b)h_0) = \bigl(b, h_0E + ia + \tfrac{1}{2}Q(b,b)\bigr).$$

α は H から D の上への微分同相になっているので，$(0, E)$ における微分 α_* は，$\mathfrak{h}$ から $(0, E)$ での D の接空間 $T_{(0,E)}(D)$ の上への線型同型になっている．D は $U + W$

の領域なので，以下では $T_{(0,E)}(D) = U + W$ とみなす．

$$\alpha_*(X) = \frac{d}{dt}\alpha(\exp tX)\Big|_{t=0} \qquad (X \in \mathfrak{h})$$

に従って，実際に計算しよう：

(1) $T \in \mathfrak{h}_0$ のとき： $\alpha_*(T) = \dfrac{d}{dt}\big(0, (\exp tT)E\big)\Big|_{t=0} = (0, TE)$.

(2) $Y \in \mathfrak{h}_{1/2}$ のとき： $Y = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline Q(\cdot, b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ for some $b \in U$ であり，$\exp tY = n(0, tb)$ に注意すると

$$\alpha_*(Y) = \frac{d}{dt}\big(tb, \tfrac{t^2}{2}Q(b,b)\big)\Big|_{t=0} = (b, 0).$$

(3) $X \in \mathfrak{h}_1$ のとき： 同様に $X = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & ia \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ であり，$\exp tX = n(ta, 0)$ より

$$\alpha_*(X) = \frac{d}{dt}(0, ita)\Big|_{t=0} = (0, ia).$$

従って，$\alpha_*(T + Y + X) = b + (TE + ia)$．$H_0$ が Ω に単純推移的に働いているので，$\mathfrak{h}_0 \ni T \mapsto TE \in V$ は線型同型写像であることに注意．この逆写像を ζ_0 で表すと，$v \in V$ に対して，$\zeta_0(v) \in \mathfrak{h}_0$ であって $\zeta_0(v)E = v$ をみたしている．

さて，$Z := U + W$ は複素線型空間なので，自然な複素構造を持つ．すなわち，虚数単位 i を掛ける写像 $j(z) = iz$ $(z \in Z)$ がある．これを α_* で $\mathfrak{h}$ に 引き戻したものを J とする：$J := \alpha_*^{-1} \circ j \circ \alpha_*$．簡単のために，$\mathfrak{h}_{1/2}$ と U，$\mathfrak{h}_1$ と V を，上記の (2), (3) のようにして，Y と b，X と a によって同一視しよう．そうすると

(1) $T \in \mathfrak{h}_0$ のとき，$JT = \alpha_*^{-1}(iTE) = TE$.

(2) $Y \in U \equiv \mathfrak{h}_{1/2}$ のとき，$JY = \alpha_*^{-1}(iY) = iY$.

(3) $X \in V \equiv \mathfrak{h}_1$ のとき，$JX = \alpha_*^{-1}(-X) = -\zeta_0(X)$.

J は $\mathfrak{h}$ 上の実線型写像で，$J^2 = -\mathrm{Id}$ をみたす．J を複素化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型写像に拡張して，

$$\mathfrak{h}^{\pm} := \{Z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\ ;\ JZ = \pm iZ\} \qquad (\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ における } J \text{ の } \pm i \text{ 固有空間})$$

とおく．$\mathfrak{h}^+$ (resp. $\mathfrak{h}^-$) は D 上の正則な（resp. 反正則な）ベクトル場で H の作用と可換なものの全体である．ゆえに $\mathfrak{h}^{\pm}$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 代数になっている．さらに，$\mathfrak{h}^{\pm} = \{X \mp iJX\ ;\ X \in \mathfrak{h}\}$ であることにも注意：

$$J(X \mp iJX) = JX \pm iX = \pm i(X \mp iJX).$$

補題 10.1. J は次の「可積分条件」をみたす：

$$[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] \qquad (\forall X, Y \in \mathfrak{h}).$$

証明. $\mathfrak{h}^-$ が Lie 代数であることを書き換えよう．すなわち，$X, Y \in \mathfrak{h}$ のとき，$X + iJX,\, Y + iJY \in \mathfrak{h}^-$ であるから

$$\mathfrak{h}^- \ni [X + iJX,\, Y + iJY] = \bigl([X, Y] - [JX, JY]\bigr) + i\bigl([JX, Y] + [X, JY]\bigr).$$

ゆえに，$[JX, Y] + [X, JY] = J\bigl([X, Y] - [JX, JY]\bigr)$. □

次に認容線型形式の存在を示そう： これは $\omega \in \mathfrak{h}^*$ で次の条件をみたすもの：

$$\langle\, X \,|\, Y \,\rangle_\omega := \langle\, \omega, [X, JY] \,\rangle \text{ は } \mathfrak{h} \text{ に } J \text{ 不変な内積を定める.}$$

ここで内積が J 不変であるとは，その内積で J が直交変換となることをいう：

$$\langle\, JX \,|\, JY \,\rangle_\omega := \langle\, X \,|\, Y \,\rangle_\omega \qquad (\forall X, Y \in \omega).$$

まず等質 Siegel 領域 D の Bergman 核 $K(z_1, z_2)$ が明示的な表示を持つことを示そう.

命題 10.2. (1) $\Omega + iV$ 上の正則函数 κ が存在して，

$$K(z_1, z_2) = c\,\kappa\Bigl(\frac{1}{2}\bigl(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2)\bigr)\Bigr) \qquad \bigl(z_j = (u_j, w_j) \in D; j = 1, 2\bigr).$$

ただし $c > 0$ は定数.

(2) (1) の κ は，$\kappa(h_0 x) = \chi(h_0)^{-1}\kappa(x)$ ($h_0 \in H_0$, $x \in \Omega$) をみたす．ただし，

$$\chi(h_0) := (\det_V h_0)^2 (\det_{U_\mathbb{R}} h_0) \qquad (h_0 \in H_0).$$

ここで，群 H_0 は U と V を不変にすることに注意．$U_\mathbb{R}$ は複素ベクトル空間 U を実ベクトル空間とみなしたもので，$\det_{U_\mathbb{R}} h_0$，$\det_V h_0$ は実線型写像 $h_0\big|_{U_\mathbb{R}}$，$h_0\big|_V$ の determinant を表す.

注意 10.3. 補題中の κ の中にある変数について

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\bigl(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2))\bigr) &= \mathrm{Re}\, w_1 + \mathrm{Re}\, w_2 - \frac{1}{2}\bigl(Q(u_1, u_2) + Q(u_2, u_1)\bigr) \\ &= \Bigl(\mathrm{Re}\, w_1 - \frac{1}{2}Q(u_1, u_1)\Bigr) + \Bigl(\mathrm{Re}\, w_2 - \frac{1}{2}Q(u_2, u_2)\Bigr) + \frac{1}{2}Q(u_1 - u_2,\, u_1 - u_2) \in \Omega.\end{aligned}$$

証明. 補題 4.4 より，$z_1 = z_2 = z = (u, w)$ のときに補題を示せば十分．命題 9.1 の [$\Longleftarrow$] の証明のようにして，$h_0 \in H_0$ を，$h_0 = \eta_0(\mathrm{Re}\, w - \frac{1}{2}Q(u, u))$ ととり，$a = \mathrm{Im}\, w$，$b = u$ とおけば

$$n(a, b)h_0 \cdot (0, E) = (u, w) = z.$$

ゆえに，$g = n(a,b)h_0$ とおくとき

$$\begin{aligned} K(z,z) &= K(g\cdot(0,E),\, g\cdot(0,E)) \\ &= |\det_{\mathbb{C}} g'(0,E)|^{-2} K((0,E),(0,E)). \end{aligned}$$

h_0 は D に線型に働くので，$h_0'(z) = h_0$ $(\forall z \in D)$ であり，

$$n(a,b) = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & b \\ \hline Q(\cdot,b) & I & \frac{1}{2}Q(b,b)+ia \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

であるから，$\det_{\mathbb{C}} n(a,b)'(z) = I$ $(\forall z \in D)$．ゆえに $g'(z) = h_0$ $(\forall z \in D)$．従って，$c := K\big((0,E),(0,E)\big) > 0$ とおくとき

$$K(z,z) = c\,|\det_{\mathbb{C}} g'(0,E)|^{-2} = c\,(\det_{\mathbb{R}} g'(0,E))^{-1} = c\,(\det_{\mathbb{R}} h_0)^{-1}.$$

ここで，$x \in \Omega$ に対して，$\eta_0(x) = h_{A(x),B(x)}$ $(A(x) \in GL(V),\, B(x) \in GL(U))$ とし，

$$\theta(x) := (\det_V A(x))^2 (\det_{U_{\mathbb{R}}} B(x)) > 0$$

とおくと，$\det_{\mathbb{R}} \eta_0(x) = \theta(x)$ である．以上から，$\kappa(x) := \theta(x)^{-1}$ とおくと

$$K(z,z) = c\,\kappa\big(\mathrm{Re}\, w - \tfrac{1}{2}Q(u,u)\big) = c\,\kappa\Big(\frac{1}{2}(w + w^* - Q(u,u)\Big).$$

次の補題を証明なしで認めよう：そうすると命題の (1) の証明が終わる．

補題 10.4. Ω 上の函数 κ は $\Omega + iV$ 上の正則函数に解析接続される．その解析接続は Ω^* 上のある函数の Laplace 変換で得られる．

命題の (2) の証明に移ろう．定義より $\eta_0(h_0 x) = h_0 \eta_0(x)$ $(h_0 \in H_0\, x \in \Omega)$．ゆえに

$$\theta(h_0 x) = (\det_V \eta_0(h_0 x))^2 (\det_{U_{\mathbb{R}}} \eta_0(h_0 x)) = \chi(h_0)\theta(x).$$

$\kappa(x) = \theta(x)^{-1}$ より，主張が従う． $\square$

定義. $\langle\, \omega_0, v\,\rangle := -\dfrac{d}{dt}\log\kappa(E+tv)\Big|_{t=0} = -D_v \log\kappa(E) \quad (v \in V).$

ここで，$\log\kappa$ は滑らかな函数なので，右辺は v について線型であることに注意．従って，右辺は v について線型形式を定めるので，それを $\omega_0 \in V^*$ で表している．

命題 10.5. 任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，$\langle\, \omega_0, x\,\rangle > 0$.

この命題の証明は本節の終わりに補遺として述べることにして，先に進もう．

補題 10.6. $v_1, v_2 \in V$ のとき，

$$\langle\, \omega_0, [v_1, Jv_2]\,\rangle = D_{v_1} D_{v_2} \log \kappa(E) = \partial_{v_1} \overline{\partial}_{v_2} \log K\big((0,E),\,(0,E)\big).$$

証明. $v_1 = v_2 = v$ のときに証明すればよい．$x \in \Omega$ に対して，

$$\langle\, I(x), v\,\rangle := -D_v \log \kappa(x) \qquad (v \in V) \tag{10.1}$$

とおく．$I(E) = \omega_0$ である．さらに，$h_0 \in H_0$ のとき，$\kappa(h_0 x) = \chi(h_0)^{-1}\kappa(x)$ より

$$\begin{aligned}\langle\, I(h_0 x), v\,\rangle &= -\frac{d}{dt}\log \kappa(h_0 x + tv)\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\log \kappa(x + t h_0^{-1} v)\Big|_{t=0} \\ &= \langle\, I(x), h_0^{-1} v\,\rangle.\end{aligned}$$

さて，$v \in V \equiv \mathfrak{h}_1$ のとき，$Jv = -\zeta_0(v) \in \mathfrak{h}_0$ より

$$(\exp(-t)Jv)E = E - t(Jv)E + O(t^2) = E + t\zeta_0(v)E + O(t^2) = E + tV + O(t^2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}D_v^2 \log \kappa(E) &= -\frac{d}{dt}\langle\, I(E+tv), v\,\rangle\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\langle\, I(\exp(-t)Jv)E), v\,\rangle\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\langle\, I(E), (\exp tJv)v\,\rangle\Big|_{t=0} = -\langle\, I(E), (Jv)v\,\rangle \\ &= -\langle\, \omega_0, [Jv, v]\,\rangle.\end{aligned}$$

定義. $\langle\, \omega,\, X_0 + X_{1/2} + X_1\,\rangle := \langle\, \omega_0, X_0\,\rangle$ $(X_j \in \mathfrak{h}_j; j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ により，$\omega \in \mathfrak{h}^*$ を定義する．

定理 10.7. (1) $x \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のとき，$\langle\, \omega, [x, Jx]\,\rangle > 0$.
(2) $x \in \mathfrak{h}$ のとき，$\langle\, \omega, [Jx, Jy]\,\rangle = \langle\, \omega, [x, y]\,\rangle$.

証明. （あ）$x \in \mathfrak{h}_0 \setminus \{0\}$ のとき．補題 10.6，命題 4.1 と $[x, Jx] \in \mathfrak{h}_1 \equiv V$ より，$\langle\, \omega, [x, Jx]\,\rangle = \langle\, \omega_0, [x, Jx]\,\rangle > 0$.

（い）$x \in \mathfrak{h}_{1/2} \setminus \{0\}$ のとき．$Jx = ix$ ゆえ

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 \supset [\mathfrak{h}_{1/2}, \mathfrak{h}_{1/2}] \ni [x, Jx] &= -2\,\mathrm{Im}\, Q(x, Jx) = -2\,\mathrm{Im}\, Q(x, ix) \\ &= 2\,\mathrm{Im}\, iQ(x, x) = 2Q(x, x) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

ゆえに命題 10.5 より，$\langle\, \omega, [x, Jx]\,\rangle = 2\langle\, \omega_0, Q(x, x)\,\rangle > 0$.

（う）$x \in \mathfrak{h}_1 \setminus \{0\}$ のとき．$y := Jx = -\zeta_0(x) \in \mathfrak{h}_0$ とおくと，$[x, Jx] = -[Jy, y] \in \mathfrak{h}_0$

であり，$y \neq 0$ であるから，(あ) より $\langle\, \omega, [x, Jx]\,\rangle = \langle\, \omega_0, [y, Jy]\,\rangle > 0$.

(え) 一般に $x = x_0 + x_{1/2} + x_1$ $(x_j \in \mathfrak{h}_j)$ と表すとき，

$$[x, Jx] \in [x_0, Jx_0] + [x_{1/2}, Jx_{1/2}] + [x_1, Jx_{1/2}] + \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_{1/2}$$

であるから，

$$\langle\, \omega, [x, Jx]\,\rangle = \langle\, \omega_0, [x_0, Jx_0]\,\rangle + \langle\, \omega_0, [x_{1/2}, Jx_{1/2}]\,\rangle + \langle\, \omega_0, [x_1, Jx_1]\,\rangle > 0.$$

(2) まず，次の補題が必要である．

補題 10.8. (1) $x, y \in \mathfrak{h}_0$ のとき，$\langle\, \omega_0, J[x, y]\,\rangle = 0$.
(2) $x, y \in \mathfrak{h}_0$ のとき，$\langle\, \omega_0, [x, Jy]\,\rangle = \langle\, \omega_0, [y, Jx]\,\rangle$.

証明. (1) $T := [x, y] \in \mathfrak{h}_0$ とおく．$JT = TE$ より，

$$\begin{aligned}\langle\, \omega_0, JT\,\rangle = \langle\, \omega_0, TE\,\rangle &= -\frac{d}{dt}\log\kappa(E + tTE)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\log\kappa\big((I + tT)E\big)\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\log\kappa\big((\exp tT)E\big)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\log\chi(\exp tT)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(2\log(\det{}_V \exp tT) + \log(\det{}_{U_{\mathbb{R}}} \exp tT)\Big)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

ここで，$\log\det\exp tT = \log\exp t\,\mathrm{tr}(T) = t\,\mathrm{tr}(T)$ より

$$\langle\, \omega_0, JT\,\rangle = 2\,\mathrm{tr}_V(T) + \mathrm{tr}_{U_{\mathbb{R}}}(T) = 0.$$

(2) 補題 10.1 の可積分条件より

$$J[Jx, Jy] = J[x, y] - [Jx, y] - [x, Jy].$$

ここで，$[Jx, Jy] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \{0\}$ かつ (1) より $\langle\, \omega_0, J[x, y]\,\rangle = 0$．ゆえに

$$\langle\, \omega_0, [Jx, y]\,\rangle + \langle\, \omega_0, [x, Jy]\,\rangle = 0.$$

これより直ちに (2) が従う． □

定理の (2) の証明を続けよう．

(あ) $x \in \mathfrak{h}_0$, $y \in \mathfrak{h}_1$ のとき． $z \in \mathfrak{h}_0$ をとって，$x = Jz$ とできるので，

$$\begin{aligned}\langle\, \omega, [Jx, Jy]\,\rangle &= -\langle\, \omega, [z, Jy]\,\rangle = -\langle\, \omega_0, [z, Jy]\,\rangle = -\langle\, \omega_0, [y, Jz]\,\rangle \quad (\text{by 補題 } 10.8) \\ &= -\langle\, \omega_0, [y, x]\,\rangle = \langle\, \omega_0, [x, y]\,\rangle.\end{aligned}$$

(い) $x \in \mathfrak{h}_{1/2}$, $y \in \mathfrak{h}_{1/2}$ のとき．$-2\,\mathrm{Im}\,Q(x, y) = [x, y]$ より，$2\,\mathrm{Re}\,Q(x, y) = [x, Jy]$.
ゆえに，

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}\big([x, Jy] - i[x, y]\big).$$

従ってまた

$$Q(Jx, Jy) = \frac{1}{2}\bigl(-[Jx, y] - i[Jx, Jy]\bigr).$$

$Q(Jx, Jy) = Q(x, y)$ であるから，上の 2 個の式の虚部を比べて，$[Jx, Jy] = [x, y]$ を得る．ゆえに $\langle \omega_0, [Jx, Jy] \rangle = \langle \omega_0, [x, y] \rangle$.

（あ）と（い）以外の場合は $\langle \omega_0, [Jx, Jy] \rangle = 0 = \langle \omega_0, [x, y] \rangle$ となって，証明すべき式が成立している． □

系 10.9. $\langle x \,|\, y \rangle_\omega := \langle \omega_0, [x, Jy] \rangle$ は $\mathfrak{h}$ に J 不変な内積を定める．

証明. $\langle y \,|\, x \rangle_\omega = \langle \omega, [y, Jx] \rangle = -\langle \omega, [Jy, x] \rangle = \langle x \,|\, y \rangle_\omega$ より，$\langle x \,|\, y \rangle_\omega$ は対称な双線型形式である．正定値であることを先の補題が保証する．そして

$$\langle Jx \,|\, Jy \rangle_\omega = -\langle \omega, [Jx, y] \rangle = \langle \omega, [x, Jy] \rangle = \langle x \,|\, y \rangle_\omega.$$

ゆえに $\langle x \,|\, y \rangle_\omega$ は J 不変な内積である． □

定理 10.10. $\mathfrak{h}$ は正規 j 代数（Piatetski-Shapiro 代数）の構造を持つ：

(1) $\mathfrak{h}$ は分裂型可解 Lie 代数（下三角行列で実現できる）.

(2) $J^2 = -I$ となる線型写像 J と $\omega \in \mathfrak{h}^*$ が存在して，

(i) $[Jx, Jy] = [x, y] + J[Jx, y] + J[x, Jy]$,

(ii) $\langle x \,|\, y \rangle_\omega := \langle \omega, [x, Jy] \rangle$ は $\mathfrak{h}$ に内積を定める．

補遺：命題 10.5 の証明

記号は本文の通りとする．

補題 10.11. Ω 上の函数 $\log\kappa(x)$ は凸函数である．すなわち，任意の $x, y \in \Omega$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$\log\kappa((1-t)x+ty) \leqq (1-t)\log\kappa(x)+t\log\kappa(y).$$

証明. これは V 上の双線型形式 $D_{v_1}D_{v_2}\log\kappa(x) = \partial_{v_1}\overline{\partial}_{v_2}\log K((0,v_1),(0,v_2))$ が正定値であることによる（命題 4.1）．実際 $f(x) := \log\kappa(x)$ として，$[0,1]$ 上の函数

$$F(t) := f((1-t)x+ty)-(1-t)f(x)-tf(y)$$

の増加減少の様子を微分して調べてみればよいだけのことである（区間 $[0,1]$ のある点でのみ極小値をとる）．詳細は演習. □

補題 10.12. Ω 上の函数 $\kappa(x)$ は凸函数である．

証明. まず，次の不等式に注意する（微分を用いて容易に証明できる）：
$a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $p>0$, $q>0$ で $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ のとき

$$ab \leqq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

さて $\log\kappa$ が凸函数であること（補題 10.11）とこの不等式を用いると，$x, y \in \Omega$, $t \in [0,1]$ のとき

$$\kappa((1-t)x+ty) \leqq \kappa(x)^{1-t}\kappa(y)^t \leqq (1-t)\kappa(x)+t\kappa(y).$$

上の不等式を $a=\kappa(x)^{1-t}$, $b=\kappa(y)^t$, $p=\dfrac{1}{1-t}$, $q=\dfrac{1}{t}$ として用いた. □

先に進む前に，命題 10.2 の証明から，$\kappa(x) = (\det_V A(x))^{-2}(\det_{U_{\mathbb{R}}} B(x))^{-1}$ であることを思い出そう．ここで $\lambda>0$ のとき

$$h_\lambda := h_{\lambda I,\,\lambda^{1/2}I} \in H_Q$$

を考える．この h_λ は $h_\lambda E = \lambda E$ をみたす H_0 の元で一意的に定まるものである．そして $\eta_0(\lambda x) = h_\lambda\eta_0(x)$ であるから，$\delta := 2\dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{C}} U > 0$ とおくとき

$$\kappa(\lambda x) = \bigl(\det_V \lambda A(x)\bigr)^{-2}\bigl(\det_{U_{\mathbb{R}}} \lambda^{1/2}B(x)\bigr)^{-1} = \lambda^{-\delta}\kappa(x) \qquad (x\in\Omega,\ \lambda>0). \tag{10.2}$$

となっていることに注意.

補題 10.13. $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ のとき，$\kappa(x+y) \leqq \kappa(x)$.

証明.　まず補題 5.5 より，$x+y \in \Omega$ であることに注意しておこう．函数 κ が凸であることより，$x, y \in \Omega,\ 0<\lambda<1$ のとき

$$\begin{aligned}\kappa(x+y) &= \kappa\big(\lambda(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)(1-\lambda)^{-1}y\big)\\ &\leqq \lambda\kappa(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)\kappa((1-\lambda)^{-1}y)\\ &= \lambda^{1+\delta}\kappa(x) + (1-\lambda)^{1+\delta}\kappa(y) \qquad (\text{by } (10.2)).\end{aligned}$$

$c>0$ より $\lambda \uparrow 1$ として，$\kappa(x+y) \leqq \kappa(x)$ を得，最後に y を $\overline{\Omega}$ の点に極限移行して，所要の不等式を得る．　□

補題 10.14.　(10.1) で定義される $I(x)$ $(x \in \Omega)$ は，任意の $y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，$\langle\, I(x), y \,\rangle > 0$ をみたす．特に $x = E$ とおいて，命題 10.5 が成り立つ．

証明.　$x \in \Omega,\ y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ とする．$t \in [0,1]$ の函数 $f(t) := \log\kappa(x+ty)$ の Taylor 展開を考えて $t=1$ とおくと

$$\log\kappa(x+y) = \log\kappa(x) - \langle\, I(x), y \,\rangle + \frac{1}{2}D_y^2 \log\kappa(x+\theta y) \qquad (0<\theta<1).$$

ここで，$D_y^2 \log\kappa(x+\theta y) = \partial_y \overline{\partial}_y \log K((0, x+\theta y), (0, x+\theta y)) > 0$ であるから，

$$\log\frac{\kappa(x+y)}{\kappa(x)} > -\langle\, I(x), y \,\rangle.$$

補題 10.13 より，左辺は $\leqq 0$ であるから，証明が終わる．　□

§11. 正規 j 代数からの等質 Siegel 領域の構成

<u>前回</u>：　D：等質 Siegel 領域

　$\Longrightarrow$ $\exists H \subset \mathrm{Aff}(D)$ s.t. H は D に単純推移的に作用する

　$\Longrightarrow$ 正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \omega)$.

(1) $\mathfrak{h}$ は分裂可解 Lie 群.

(2) $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$ $(J^2 = -\mathrm{Id})$，$\omega \in \mathfrak{h}^*$ s.t.

　(a) $[Jx, Jy] = [x,y] + J[Jx,y] + J[x,Jy]$（可積分条件），

　(b) $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_\omega := \langle \omega, [x, Jy] \rangle$ は $\mathfrak{h}$ に J 不変な内積を与える.

以下では，逆に正規 j 代数から出発して，$H := \exp\mathfrak{h}$ がアフィン変換として単純推移的に作用する等質 Siegel 領域を定義しよう．

<u>Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の構造</u>：

$\mathfrak{n} := [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$（$\mathfrak{h}$ の導来イデアル：べき零 Lie 代数になる），

$\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^{\perp}$ （$\mathfrak{n}$ の $\mathfrak{h}$ における直交補空間で，内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\omega}$ に関するもの）．

このとき，$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$（部分空間としての直交直和）．

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{n}$ に注意．

(1) $\mathfrak{a}$ は可換な Lie 代数になり，$\mathfrak{n}$ に $\mathfrak{a} \times \mathfrak{n} \ni (a, x) \mapsto [a, x] \in \mathfrak{n}$ で作用する．この作用は対角化可能である．すなわち，$\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ に対して，

$$\mathfrak{n}_{\alpha} := \{x \in \mathfrak{n}\,;\, [a, x] = \langle\, \alpha, a\,\rangle x \quad (\forall a \in \mathfrak{a})\}$$

とおくとき，$\mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ の有限部分集合 Δ が存在して，$\mathfrak{n}_{\alpha} \neq \{0\} \iff \alpha \in \Delta$ かつ

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_{\alpha}.$$

Δ の元のことを，正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \omega)$ のルートと呼ぶ．

(2) $J\mathfrak{n}_{\alpha} \subset \mathfrak{a}$ となるルート α を，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする．このとき，$\dim \mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ $(k = 1, \ldots, r)$ であり，$r = \dim \mathfrak{a}$ である（正規 j 代数の階数と呼ぶ）．

　さらに，必要ならば，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ の番号をつけかえることによって，Δ は次の形の元からなるようにできる（可能なすべての起きるとは限らない：部分集合であるということ）．

$$\alpha_k \ \ (k = 1, \ldots, r), \qquad \frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k) \quad (1 \leqq k < m \leqq r)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k) \quad (1 \leqq k < m \leqq r), \qquad \frac{1}{2}\alpha_k \quad (k = 1, \ldots, r).$$

(3) 線型作用素 J は次の性質を持つ：

$$J\Bigl(\sum_{k=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_k}\Bigr) = \mathfrak{a}, \qquad J\mathfrak{n}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2} = \mathfrak{n}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2} \quad (1 \leqq k < m \leqq r),$$

$$J\mathfrak{n}_{\alpha_k/2} = \mathfrak{n}_{\alpha_k/2} \quad (k = 1, \ldots, r).$$

(4) 各 $k = 1, \ldots, r$ について，$E_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_k}$ を選んで，$H_k := -JE_k$ とおくとき，$[H_k, E_k] = E_k$ をみたすようにできる．このとき，$H_1, \ldots, H_r$ は $\mathfrak{a}$ の基底をなしていて，$\alpha_k(H_l) = \delta_{kl}$ をみたす．

(5) 以下次のように置く：

$$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{a} + \sum_{1 \leqq k < m \leqq r} \mathfrak{n}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}, \qquad \mathfrak{h}_{1/2} := \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_k/2}, \qquad \mathfrak{h}_1 := \sum_{1 \leqq k \leqq m \leqq r} \mathfrak{n}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}.$$

このとき

(11.1) $\qquad [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ （ただし $\mathfrak{h}_l = \{0\}$ for $l \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ とする）．

これより特に $\mathfrak{h}_0$ は部分 Lie 代数，$\mathfrak{h}_1$ は可換な部分 Lie 代数をなしている．
また，$\mathfrak{n}_Q := \mathfrak{h}_{1/2} + \mathfrak{h}_1$ は[1]べき零な部分 Lie 代数 (2-step) になっている：

$$[\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q] \subset [\mathfrak{h}_{1/2}, \mathfrak{h}_{1/2}] \subset \mathfrak{h}_1, \quad \text{ゆえに} \ [\mathfrak{n}_Q, [\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q]] \subset [\mathfrak{h}_{1/2} + \mathfrak{h}_1,\, \mathfrak{h}_1] = \{0\}.$$

<u>開凸錐の定義</u>：

以下 $V := \mathfrak{h}_1$ とおく．$E := E_1 + \cdots + E_r$ とおくとき，$E \in V$ である．また，$\mathfrak{h}$ は分裂可解 Lie 群なので，指数写像 exp は，$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ を Lie 代数とする単連結で連結な Lie 群 H の上への微分同相になっている．$\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数なので，$\mathfrak{h}_0$ に対応する H の Lie 部分群を H_0 とする．$[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1$，すなわち $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_0)V \subset V$ であるから，

$$(\mathrm{Ad}\,H_0)V = (\mathrm{Ad}\exp\mathfrak{h}_0)V = (\exp\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_0)V \subset V$$

となる．これにより，H_0 は V に線型に作用する．$\Omega := H_0 \cdot E$（E を通る H_0 軌道）とおくと，Ω は regular な open convex cone であることが証明できる．以下その粗筋を示そう．

(1) Cone になっていること：
$a_0 := H_1 + \cdots + H_r \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_0$ とおくと，$j = 0, \frac{1}{2}, 1$ に対して，$\mathfrak{h}_j$ は $\mathrm{ad}\,a_0$ の j 固有空間になっている（これが (11.1) が成り立つ理由である）．そうすると，$x \in V$, $t \in \mathbb{R}$ のとき，

$$(\mathrm{Ad}\exp ta_0)x = (\exp t\,\mathrm{ad}\,a_0)x = e^t x.$$

これより $x \in \Omega, \lambda > 0$ ならば，$\lambda x \in \Omega$ が出る．

(2) 開集合であること：
まず，$X \in \mathfrak{h}_0$ のとき，$JX = [X, E]$ が示せる．このことは軌道写像 $\alpha : H_0 \ni T \mapsto T \cdot E \in \Omega$ の単位元における微分 $\alpha_* : \mathfrak{h}_0 \ni X \mapsto [X, E] \in V$ が線型同型写像であることを示している．これより $E \in \Omega$ は内点．等質性から各 $x \in \Omega$ が内点になって，Ω は開集合である．

(3) 軌道写像 $\alpha : H_0 \ni T \mapsto T \cdot E$ が微分同相であること：
(1),(2) より，Ω は開集合かつ錐体であるので，単連結である．実際 $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(t) \in$

[1]まだ Q は定義していないが前節の記号と整合的にしている．

Ω $(\varphi(0)=\varphi(1))$ を連続なループとし，$\psi(\delta,t):=\delta\varphi(t)$ $(\delta>0)$ とおく．δ が十分小さければ，任意の $t\in[0,1]$ に対して，$\psi(\delta,t)$ はユークリッド空間に同相になっている $\Omega\cap\{v\in V\ ;\ \|v\|_\omega<\varepsilon\}$ に含まれる．そこで連続ループ $[0,1]\ni t\mapsto\psi(\delta,t)\in\Omega$ を 1 点に縮約すれば良い．$H_0/\mathrm{Stab}_E H_0\approx\Omega$（微分同相）において，$H_0$ が連結，Ω が単連結なので，$\mathrm{Stab}_E H_0$ は連結になる[2]．しかし，$\dim\mathfrak{h}_0=\dim\mathfrak{h}_1$ であることから，$\dim\mathrm{Stab}_E H_0\geqq 1$ はあり得ない．ゆえに $\mathrm{Stab}_E H_0$ は単位元のみである．

(4) $\langle\omega,y\rangle>0$ for $\forall y\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ であること：
まず次の (a), (b) に注意する：
(a) $\langle\,\omega,E_k\,\rangle>0$ $(j=k,\dots,r)$.
なぜなら，$[E_k,JE_k]=E_k$ より，

$$\langle\,\omega,E_k\,\rangle=\langle\,\omega,[E_k,JE_k]\,\rangle=\|E_k\|_\omega^2>0.$$

(b) $\alpha\neq\alpha_k$ $(k=1,\dots,r)$ ならば，ω は $\mathfrak{n}_\alpha$ 上で 0 である．（証明略）
(4) の証明は次のような手続きである．かなり明示的な計算と (a), (b) より，

$$\langle\,\omega,\,h\cdot E\,\rangle>0\qquad(\forall h\in H_0)$$

が示される．H_0 は V^* に，$\langle\,h\cdot\xi,\,v\,\rangle:=\langle\,\xi,\,h^{-1}\cdot v\,\rangle$ $(h\in H_0,\xi\in V^*,v\in V)$ で作用する（反傾作用）．$\xi_0:=\omega\big|_V$ とおくと，任意の $x=h_0\cdot E\in\Omega$ に対して

(11.2) $$\langle\,h\cdot\xi_0,\,x\,\rangle=\langle\,\xi_0,\,h^{-1}h_0\cdot E\,\rangle=\langle\,\omega,\,h^{-1}h_0\cdot E\,\rangle>0\qquad(\forall h\in H_0).$$

さらに軌道 $H_0\cdot\xi_0$ は開集合である．なぜなら，軌道写像 $\check{\alpha}:H_0\ni h\mapsto h\cdot\xi_0\in V^*$ の単位元における微分 $\check{\alpha}_*:\mathfrak{h}_0\ni X\mapsto X\cdot\xi_0\in V^*$ は線型同型であるから (2) と同じ議論になる．実際 $X\cdot\xi_0=0$ とすると

$$\begin{aligned}0&=\langle\,X\cdot\xi_0,\,JX\,\rangle=\frac{d}{dt}\langle\,(\exp tX)\cdot\xi_0,\,JX\,\rangle\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\langle\,\xi_0,\,\exp(-tX)\cdot JX\,\rangle\Big|_{t=0}\\&=-\langle\,\xi_0,[X,JX]\,\rangle=-\langle\,\omega,[X,JX]\,\rangle=-\|X\|_\omega^2\end{aligned}$$

より $X=0$ となる．さて，$y\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ のとき，写像 $V^*\ni\xi\mapsto\langle\xi,y\rangle\in\mathbb{R}$ は開写像である．従って，開集合 $H_0\cdot\xi_0$ の像 $\langle\,H_0\cdot\xi_0,\,y\,\rangle$ は，(11.2) より，閉区間 $[0,\infty)$ に含まれる開集合ということになるので，$\langle\,H_0\cdot\xi_0,\,y\,\rangle\subset(0,\infty)$．とくに

$$\langle\,\omega,y\,\rangle=\langle\,\xi_0,y\,\rangle>0.$$

[2] ホモトピー完全系列 $\cdots\to\pi_1(H)\to\pi_1(G)\to\pi_1(G/H)\to\pi_0(H)\to\pi_0(G)\to\pi_0(G/H)\to 1$ による（H は閉部分群）．例えば，横田一郎：群と位相の命題 173 参照.

(5) Ω は凸集合である：
次の集合を導入する：

$$(H_0\cdot\xi_0)^\dagger := \bigl\{x\in V\ ;\ \langle\,\xi,x\,\rangle>0\ \ (\forall\xi\in\bigl(\overline{H_0\cdot\xi_0}\bigr)\setminus\{0\}\bigr\},$$
$$\Omega^\dagger := \{\xi\in V^*\ ;\ \langle\,\xi,y\,\rangle>0\ \ (\forall y\in\overline{\Omega}\setminus\{0\})\}.$$

$H_0\cdot\xi_0$ や Ω の凸性が保証されていないので，* を用いずに † を用いている．$(H_0\cdot\xi_0)^\dagger$ が凸集合であることは明らかで，以下では $\Omega=(H_0\cdot\xi_0)^\dagger$ を示すことで，Ω の凸性を示すのである．また (4) では，$\xi_0\in\Omega^\dagger$ を示したことになっていて，従って $H_0\cdot\xi_0\subset\Omega^\dagger$ でもある（$\Omega^\dagger$ が H_0 不変集合であるから）．ゆえに $(H_0\cdot\xi_0)^\dagger\supset\Omega^{\dagger\dagger}\supset\Omega$.

$(H_0\cdot\xi_0)^\dagger=\Omega$ の証明のために次の函数 $N(x)$ を導入する：

$$N(x):=\int_{H_0\cdot\xi} e^{-\langle\,\xi,x\,\rangle}\,d\xi \qquad (x\in V).$$

$0<N(x)\leqq\infty$ であり，$x\in(H_0\cdot\xi_0)^\dagger$ ならば $N(x)$ は有限値である．また $\log N(x)$ は凸函数である．

$$\Omega\ni x\to x_0\in\partial\Omega \quad \text{のとき} \quad N(x)\to\infty$$

が示せるので（証明略），$(H_0\cdot\xi_0)^\dagger\setminus\Omega=\varnothing$ となって証明終わり．
(6) $\Omega^*=H_0\cdot\xi_0$（証明略）．

Siegel 領域の定義：
$\mathfrak{h}_{1/2}$ は J で不変なので，それによって複素ベクトル空間とみたものを U で表す．

$$Q(u,u'):=\frac{1}{2}\bigl([u,Ju']-i[u,u']\bigr) \qquad (u,u'\in U).$$

補題 11.1. (1) $X\in\mathfrak{h}_0,\ u\in\mathfrak{h}_{1/2}$ のとき，$J[X,u]=[X,Ju]$.
(2) $u,u'\in\mathfrak{h}_{1/2}$ のとき，$[u,u']=[Ju,Ju']$.
証明. (1) 可積分条件

$$[JX,Ju]=[X,u]+J[JX,u]+J[X,Ju]$$

において，$[JX,Ju]\in[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_{1/2}]=\{0\}$．同様に $[JX,u]=0$．ゆえに $J[X,u]=[X,Ju]$ が出る．
(2) 同様に可積分条件

$$[Ju,Ju']=[u,u']+J[Ju,u']+J[u,Ju']$$

において，$[Ju,Ju']\in\mathfrak{h}_1,\ [u,u']\in\mathfrak{h}_1,\ J[Ju,u']\in\mathfrak{h}_0,\ J[u,Ju']\in\mathfrak{h}_0$ であるから，$\mathfrak{h}_1$ 部分を比べて，所要の等式を得る． □

補題 11.1 (1) は，H_0 の $\mathfrak{h}_{1/2}$ への作用が J と可換，すなわち，U 上の複素線型変換であることを示している．さらに H_0 の V への線型作用を，V の複素化 W まで自然に拡張しておく：$h\cdot(v+iv') := h\cdot v + i\,h\cdot v'$ ($h\in H_0,\ v,v'\in V$).

(1) Q は Hermitian sesquilinear であること：

明らかに実双線型である．そして補題 11.1(2) より

$$Q(Ju,u') = \frac{1}{2}([Ju,Ju'] - i[Ju,u']) = \frac{i}{2}([u,Ju'] - i[u,u']) = iQ(u,u').$$

$$Q(u',u) = \frac{1}{2}([u',Ju] - i[u',u]) = \frac{1}{2}([u,Ju'] + i[u,u']) = Q(u,u')^*$$

(2) $Q(h\cdot u,\ h\cdot u') = h\cdot Q(u,u')$ ($u,u'\in H_0$) であること．

定義と補題 11.1(1) から

$$\begin{aligned}Q(h\cdot u,\ h\cdot u') &= \frac{1}{2}([(\mathrm{Ad}\,h)u,\ (\mathrm{Ad}\,h)Ju'] - i[(\mathrm{Ad}\,h)u,\ (\mathrm{Ad}\,h)u'])\\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{Ad}\,h)\big([u,Ju'] - i[u,u']\big) = h\cdot Q(u,u').\end{aligned}$$

(3) Q が Ω-positive であること．

まず，$\xi_0 := \omega\big|_V$ を上の通りとし，$u\in U\setminus\{0\}$ に対して

$$\langle\,\xi_0, Q(u,u)\,\rangle = \frac{1}{2}\langle\,\omega_0, [u,Ju]\,\rangle > 0.$$

従って，任意の $\xi\in H_0\cdot\xi_0 = \Omega^*$ に対して，(2) より $\langle\,\xi, Q(u,u)\,\rangle > 0$．ゆえに

$$Q(u,u)\in\overline{\Omega^{**}} = \overline{\Omega},\quad \text{and}\quad Q(u,u)\neq 0.$$

$N_Q := \exp\mathfrak{n}_Q$ とおく．$H = N_Q \ltimes H_0$ であり，$H_0\subset H_Q$（前節の記号）である．$\Omega = H_0\cdot E$ であったから，$H_0\subset \mathrm{Aff}(D)$ となる．

次に，$x,x'\in\mathfrak{h}_1$ で，$u,u'\in\mathfrak{h}_{1/2}$ のとき

$$[x+u,\ x'+u'] = [u.u'] = -2\,\mathrm{Im}\,Q(u,u').$$

従って，本節の $\mathfrak{n}_Q$ と §9 の $\mathfrak{n}_Q$ とは，Lie 代数として同型である．N_Q の D への作用を §8 の様にして定義すれば，$H\subset\mathrm{Hol}(D)$ の岩沢部分群であり，H は D に単純推移的に作用している．

§12. 等質 Siegel 領域の Cayley 変換 I：管状領域の場合

1変数のとき：

$D := \{w \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\, w > 0\}$：右半平面.

次の変換 $w \mapsto z$ を考えよう（1次分数変換)：

$$C : w \mapsto z := \frac{w-1}{w+1}.$$

$|w-1| \lesseqqgtr |w+1| \iff |z| \lesseqqgtr 1$ であるから，$w \in D \iff |z| < 1$ である.
$C : D \to \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ と見るとき，変換 C を Cayley 変換と呼ぶ．$\mathbb{D}$ は D の Cayley 変換像となっている訳である.

行列変数のとき：(Siegel 右半空間の場合，cf. §6)

$V := \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$：$r \times r$ 実対称行列のなすベクトル空間.

Ω：V に属する行列で正定値なものがなす regular な open convex cone.

$W := V_{\mathbb{C}}$ とおくと，$W = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$：$r \times r$ 複素対称行列のなすベクトル空間.

$D := \Omega + iV = \{x + iy\ ;\ x \in \Omega,\ y \in V\}$：Siegel 右半空間.

$E \in \Omega$ を r 次単位行列として，次の変換を考える：

$$C : w \mapsto z := (w-E)(w+E)^{-1} \quad (w+E \text{ は可逆とする}). \tag{12.1}$$

$w-E$ と $w+E$ は可換であるから，$(w-E)(w+E)^{-1} = (w+E)^{-1}(w-E)$ と書いてもよく，従って，時として $\dfrac{w-E}{w+E}$ とも書かれる.

• D は (12.1) の C の定義域に含まれていて，

$$C(D) = \{z \in W\ ;\ E - z^* z \gg 0\ (\text{正定値})\}.$$

以下では，一般の管状領域に Cayley 変換を拡張しよう.

$$(w-E)(W+E)^{-1} = E - 2(w+E)^{-1}$$

であるから，とりあえずは，逆行列の一般化が必要である.

補題 12.1. $x, v \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ かつ $x \gg 0$ のとき

$$\frac{d}{dt} \log\det(x + tv)\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}(x^{-1}v).$$

証明． $x+tv=x(E+tx^{-1}v)$ と書き直すことにより，

$$\frac{d}{dt}\log\det(E+tv)\Big|_{t=0}=\operatorname{tr}v$$

を示せばよい．これは直交行列 k を用いて v を対角化して

$$v=k\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_r\end{pmatrix}k^{-1}$$

とすることより，$\det(E+tv)=(1+t\lambda_1)\cdots(1+t\lambda_r)$ となることから

$$\log\det(E+tv)=\sum_{j=1}^{r}\log(1+t\lambda_j)$$

となり，容易に結論の式が導かれる．． □

補題 12.2. $x\in\Omega$ のとき

$$\phi(x):=\int_\Omega e^{-\operatorname{tr}(xy)}\,dy$$

とおくと，$\phi(x)=C(\det x)^{-(r+1)/2}$（$C>0$ は定数）．

証明． まず，$\operatorname{tr}(xy)=\operatorname{tr}(x^{1/2}yx^{1/2})$ に注意．$P_xv:=x^{1/2}vx^{1/2}$ $(v\in V:=\operatorname{Sym}(r,\mathbb{R}))$ で，V 上の線型作用素 P_x を定義すると，$P_x(\Omega)=\Omega$ である．従って，$g\in GL(r,\mathbb{R})$ のときの V 上の線型変換 $T_g:v\mapsto gv{}^tg$ の行列式を計算すればよい（$P_x=T_{x^{1/2}}$ である）．

各 $g\in GL(r,\mathbb{R})$ は $g=k_1p$ $(k_1\in O(r,\mathbb{R}),\,p\in\Omega)$ と書かれ，さらに $p=k_2dk_2^{-1}$（$k_2\in O(r,\mathbb{R})$ かつ d は対角成分がすべて正の対角行列）と書かれるので，結局 $g=kdk'$ $(k,k'\in O(r,\mathbb{R}))$ と書けることになる．このとき，$T_g=T_kT_dT_{k'}$ である．さらに，V に $\langle\,x\,|\,y\,\rangle=\operatorname{tr}(xy)$ で内積を入れると，この内積に関して，$T_k,T_{k'}$ は直交変換である．ゆえに

$$|\det T_g|=|\det T_k||\det T_d||\det T_{k'}|=|\det T_d|.$$

$d=\operatorname{diag}[d_1,\ldots,d_r]$ とおくとき，V の基底 E_{ii}, $E_{ij}+E_{ji}$ $(i<j)$ への T_d の作用は容易に，それぞれ d_i^2, d_id_j であることがわかる．ゆえに

$$\det T_d=(d_1^2\cdots d_r^2)\prod_{i<j}(d_id_j)=d_1^{r+1}\cdots d_r^{r+1}=(\det d)^{r+1}.$$

ゆえに $|\det T_g|=(\det d)^{r+1}=|\det g|^{r+1}$．従って，$\det P_x=\det T_{x^{1/2}}=(\det x)^{(r+1)/2}$．よって

$$\phi(x)=\int_\Omega\exp(-\operatorname{tr}(P_xy))\,dy=(\det P_x)^{-1}\int_\Omega e^{-\operatorname{tr}(y)}\,dy$$

となって，計算が終わる． □

補題 12.2 の $\phi(x)$ は，cone Ω の特性函数と呼ばれる．

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\log\det(x+tv)^{-1}\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}(x^{-1}v) = \langle\, x^{-1}\,|\, v\,\rangle, \\ \phi(x) = C(\det x)^{-(r+1)/2} \end{cases}$$

より

$$-D_v \log\phi(x) = \frac{r+1}{2}\cdot\langle\, x^{-1}\,|\, v\,\rangle. \tag{12.2}$$

スカラー倍の $\dfrac{r+1}{2}$ は内積の正規化で対応すればよい．実際，(12.2) の両辺をさらに v 方向に微分すれば

$$-D_v^2\log\phi(E) = -\frac{r+1}{2}\|v\|^2$$

となり，(12.2) の右辺の内積 $\dfrac{r+1}{2}\langle\, v_1\,|\, v_2\,\rangle$ が，$D_{v_1}D_{v_2}\log\phi(E)$ というように，$\phi(x)$ で表されるからである．

一般の場合に移ろう．

V：実ベクトル空間．

Ω：V の regular な open convex cone で homogeneous.

$\Omega^* := \{\lambda\in V^*\,;\,\langle\,\lambda, x\,\rangle > 0\ (\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\})\}$：$\Omega$ の dual cone.

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle\,\lambda,x\,\rangle}\,d\lambda \qquad (\Omega\text{ の特性函数}).$$

$E\in\Omega$ を固定する．このとき，$\langle\, v_1\,|\, v_2\,\rangle_\phi := D_{v_1}D_{v_2}\log\phi(E)$ は V に内積を与えることが証明できる．

定義． $x\in\Omega$ に対して

$$\langle\, I_\phi(x)\,|\, v\,\rangle_\phi := -D_v\log\phi(x) \qquad (v\in V).$$

さて，$\alpha > 0$ のとき

$$\langle\, I_\phi(\alpha x)\,|\, v\,\rangle_\phi = -D_v\log\phi(\alpha x) = -\frac{d}{dt}\log\phi(\alpha x+tv)\Big|_{t=0}.$$

ここで定義より直ちに $\phi(\alpha x) = \alpha^{-\dim V}\phi(x)$ であることがわかるから，$\phi(\alpha x+tv) = \alpha^{-\dim V}\phi(x+t\alpha^{-1}v)$ と書き直すことにより，

$$\langle\, I_\phi(\alpha x)\,|\, v\,\rangle_\phi = -\frac{d}{dt}\log(x+t\alpha^{-1}v)\Big|_{t=0} = \langle\, I_\phi(x)\,|\,\alpha^{-1}v\,\rangle_\phi = \langle\,\alpha^{-1}I_\phi(x)\,|\, v\,\rangle_\phi.$$

ゆえに $I_\phi(\alpha x) = \alpha^{-1}I_\phi(x)$ であり，確かに $I_\phi(x)$ は -1 次斉次である．

命題 12.3. $\Omega^\phi := \{y \in V\ ;\ \langle y \,|\, x \rangle_\phi > 0\ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$ とする．
(1) $I_\phi : \Omega \to \Omega^\phi$ は全単射であって，$I_\phi(E) = E$.
(2) I_ϕ は $W \to W^*$ である有理写像（基底をとると，各成分が有理函数で表される写像）に解析接続されて，逆写像も有理写像である．
(3) I_ϕ は $\Omega + iV$ 上では正則である．

定義. $C_\phi(w) := E - 2I_\phi(w + E) \qquad (w \in \Omega + iV)$.

定理 12.4. (1) C_ϕ は $\Omega + iV$ 上で正則な双有理写像である．逆写像も明示的に与えることができる．
(2) 像 $C_\phi(\Omega + iV)$ は有界である．

注意 12.5. $C_\phi(\Omega + iV)$ が凸集合 $\iff$ $\Omega + iV$ が対称領域．

注意 12.6. 命題 10.2 のようにして，Bergman 核を与える函数 κ からも，ϕ を用いるのと同じようにして I_κ が定義でき，Cayley 変換 C_κ が定義できる（こちらの方がより自然であるように思える）．

§13. 等質 Siegel 領域の Cayley 変換 II：一般の場合

<u>階数 1 の場合</u>：(例 6.6 参照.)
$V = \mathbb{R}$，$\Omega := \mathbb{R}_{>0}$，$U = \mathbb{C}^m$ $(m = 1, 2, \dots)$,
$W := V_\mathbb{C} = \mathbb{C}$，$Q(u, u') := \dfrac{1}{2}(u \,|\, u')_{\mathbb{C}^m}$.
$D := \left\{(u, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\, w - \dfrac{1}{4}\|u\|^2 > 0\right\}$.
このとき
$$\Phi(u, w) := \left(\frac{u}{w + 1}, \frac{w - 1}{w + 1}\right) \qquad ((u, w) \in D)$$
とおくと，Φ は D から $\mathbb{B}^{m+1}$（C^{m+1} の単位球）への全単射となっている．

V：実ベクトル空間.
Ω：V の regular な open convex cone.
$W := V_\mathbb{C}$：V の複素化（$w \mapsto w^*$：実型 V に関する W の conjugation）.
U：複素ベクトル空間.
$Q : U \times U \to W$：Ω-positive な Hermitian sesqui-linear map.

$D := \{(u,w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u,u) \in \Omega\}$.
Siegel 領域 D は等質であると仮定する．このとき，Ω も等質になる．

以下ではこの D の Cayley 変換を考える．
$\Omega^* := \{\lambda \in V^* \,;\, \langle \lambda, x \rangle > 0 \; (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$：$\Omega$ の dual cone.

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \, d\lambda \qquad (\Omega \text{ の特性函数}).$$

$E \in \Omega$ を固定する．このとき，$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_\phi := D_{v_1} D_{v_2} \log \phi(E)$ は V の内積.
これを複素双線型に W 上に拡張する．そうすると

$$(u_1 \,|\, u_2)_\phi := \langle E \,|\, Q(u_1, u_2) \rangle_\phi \qquad (u_1, u_2 \in U)$$

は U にエルミート内積を定義する．次に各 $w \in W$ に対して，U 上の複素線型作用素 $\varphi(w)$ を

$$(\varphi(w) u_1 \,|\, u_2)_\phi = \langle w \,|\, Q(u_1, u_2) \rangle_\phi \qquad (u_1, u_2 \in U)$$

で定める．明らかに $\varphi(E) = \mathrm{Id}$ である．前節の様に，$x \in \Omega$ に対して

$$\langle I_\phi(x) \,|\, v \rangle_\phi := -D_v \log \phi(x) \qquad (v \in V).$$

定義. $\Phi_\phi(u,w) := \big(\varphi(I_\phi(w+E))u, \, C_\phi(w)\big) \qquad ((u,w) \in D)$.

定理 13.1. (1) Φ_ϕ は D 上で正則な双有理写像である．逆写像も明示的に与えることができる．
(2) 像 $\Phi_\phi(D)$ は有界である．

注意 13.2. $\Phi_\phi(D)$ が凸集合 $\iff$ D が対称領域.

例 13.3. （例 6.8 参照）.
$V := \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$, $\Omega := \{x \in V \,;\, x \gg 0\}$ とする．$W := V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{C})$ である．
また，$U = \mathbb{C}^2$ とする．

$$Q(u,u') := \begin{pmatrix} 2u_1\overline{u}'_1 & u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1 \\ u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1 & 2u_2\overline{u}'_2 \end{pmatrix} \in W \qquad (u = (u_1, u_2), u' = (u'_1, u'_2) \in U)$$

とおくと，Q は Ω-positive な hermitian sesqui-linear map である．

$$D := \{(u,w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u,u) \in \Omega\}.$$

この D の Cayley 変換を見てみよう．まず前節より

$$\phi(x) = C(\det x)^{-3/2} \qquad (C > 0)$$

であり，従って $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_\phi = \dfrac{3}{2}\operatorname{tr}(xy)$．よって，$E = I_2$（2 次の単位行列）とするとき

$$(u\,|\,u')_\phi = \langle\, E \,|\, Q(u,u') \,\rangle_\phi = \frac{3}{2}\operatorname{tr}\bigl(Q(u,u')\bigr) = 3\,(u\,|\,u')_{\mathbb{C}^2}.$$

従って，$w \in W$ のとき

$$3\,(\varphi(w)u\,|\,u')_{\mathbb{C}^2} = (\varphi(w)u\,|\,u')_\phi = \langle\, w \,|\, Q(u,u') \,\rangle_\phi = \frac{3}{2}\ \operatorname{tr}\bigl(wQ(u,u')\bigr).$$

ここで，$w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$wQ(u,u') = \begin{pmatrix} 2w_{11}u_1\overline{u}'_1 + w_{21}(u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1) & * \\ * & w_{21}(u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1) + 2w_{22}u_2\overline{u}'_2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\bigl(wQ(u,u')\bigr) &= 2\bigl(w_{11}u_1\overline{u}'_1 + w_{21}(u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1) + w_{22}u_2\overline{u}'_2\bigr) \\ &= 2(w_{11}u_1 + w_{21}u_2)\overline{u}'_1 + 2(w_{21}u_1 + w_{22}u_1)\overline{u}'_2 \\ &= 2(wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

ゆえに $3(\varphi(w)u\,|\,u')_{\mathbb{C}^2} = 3(wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^2}$．これは $\varphi(w)u = wu$ を意味する．

そして $I_\phi(x) = x^{-1}$ であるから，Cayley 変換の式は

$$\Phi_\phi(u,w) = \bigl((w+E)^{-1}u,\,(w-E)(w+E)^{-1}\bigr)\,. \tag{13.1}$$

像 $\Phi_\phi(D)$ が有界であることを示そう．$(u,w) \in D$ ならば，$\operatorname{Re} w \in \frac{1}{2}Q(u,u) + \Omega \subset \Omega$ であるから，(13.1) において，第 2 成分は有界である．第 1 成分も有界であることを示せばよい．

まず $w = x + iy$ とおくと，$x \in \Omega$ であり，従って $x + E \gg 0$ であることに注意すると

$$(w+E)^{-1} = ((x+E)+iy)^{-1} = (x+E)^{-1/2}(E+iy')^{-1}(x+E)^{-1/2}.$$

ただし，$y' := (x+E)^{-1/2}y(x+E)^{-1/2} \in V$．ゆえに

$$\|(w+E)^{-1}u\|_\phi \leqq \|(x+E)^{-1/2}\|\|(E+iy')^{-1}\|\|(x+E)^{-1/2}u\|_\phi.$$

ここでまず

$$\|(x+E)^{-1/2}u\|_\phi^2 = ((x+E)^{-1}u\,|\,u)_\phi = \langle\,(x+E)^{-1} \,|\, Q(u,u)\,\rangle_\phi. \tag{13.2}$$

$(u, x+iy) \in D$ より，$2x - Q(u,u) \gg 0$．これと $(x+E)^{-1} \gg 0$ より

$$\langle\,(x+E)^{-1} \,|\, 2x - Q(u,u)\,\rangle_\phi \geqq 0.$$

よって (13.2) は

$$\|(x+E)^{-1/2}u\|_\phi^2 \leqq 2\langle\,(x+E)^{-1}\,|\,x\,\rangle_\phi = 2\langle\,x(x+E)^{-1}\,|\,E\,\rangle_\phi$$
$$= 2\langle\,E\,|\,E\,\rangle_\phi - 2\langle\,(x+E)^{-1}\,|\,E\,\rangle_\phi \leqq 2\|E\|_\phi^2.$$

あとは，作用素ノルムの評価 $\|(x+E)^{-1/2}\|\|(E+iy')^{-1}\|$ が残っている．まず行列 $E-(x+E)^{-1} = x(x+E)^{-1}$ は正定値であるから

$$((x+E)^{-1}u\,|\,u)_\phi \leqq (u\,|\,u)_\phi.$$

ゆえに

$$\|(x+E)^{-1/2}u\|_\phi^2 = ((x+E)^{-1}u\,|\,u)_\phi \leqq \|u\|_\phi^2$$

となって，$\|(x+E)^{-1/2}\| \leqq 1$ である．次に

$$\|(E+iy')^{-1}u\|_\phi^2 = ((E+{y'}^2)^{-1}u\,|\,u)_\phi \leqq (u\,|\,u)_\phi \quad \text{（先ほどと同じ評価をする）}$$

より，$\|(E+iy')^{-1}\| \leqq 1$ となって，$\Phi_\phi(D)$ の有界性の証明が終わる．