

授業科目	解析学 B1	試験日時	6月4日 13:00~15:00	担当教員	野村隆昭
------	--------	------	------------------	------	------

[1]  $f(z) := \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z) \sin z}$  を考える.

(1)  $z = 0$  は  $f(z)$  の 1 位の極であることを示し, 留数を求めよ.

(2)  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) dz$  を求めよ.

[2]  $f(z), g(z)$  は  $z = a \in \mathbb{C}$  の近傍で正則で,  $f(a) \neq 0$  かつ  $z = a$  は  $g(z)$  の 2 位の零点とする. このとき次式を示せ:

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3g''(a)^2}$$

次頁以降にも問題がある

学生番号		氏名		評点	
------	--	----	--	----	--

授業科目	解析学 B1	試験日時	6月4日 13:00~15:00	担当教員	野村隆昭
------	--------	------	------------------	------	------

[3]  $0 < b < a$  とする.  $z = e^{i\theta}$  の積分になおして, 次式を示せ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

[4] 無限遠点での留数を考えて, 次の積分を計算せよ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz$$

次頁にも問題がある

学生番号		氏名		評点	
------	--	----	--	----	--

授業科目	解析学 B1	試験日時	6月4日 13:00~15:00	担当教員	野村隆昭
------	--------	------	------------------	------	------

[5] 方程式  $z^4 - 5z + 1 = 0$  は  $1 < |z| < 2$  をみたす解を何個持つか (重複度を込めて数える).

[6]  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  かつ  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  とし, 行列  $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  に対して, 1 次分数変換  $\varphi_A(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$  を考える.

(1)  $\varphi_A$  は閉単位円板  $|z| \leq 1$  を不変にすることを示せ.

(2)  $A(t) := \begin{pmatrix} 1 + it & -it \\ it & 1 - it \end{pmatrix}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) のとき, 曲線  $C : (-\infty, \infty) \ni t \mapsto \varphi_{A(t)}(0)$  を描け.

$t$  が  $-\infty$  から  $+\infty$  へと動くとき,  $\varphi_{A(t)}(0)$  が  $C$  上をどのように動くか, 矢印で記すこと.

(Hint:  $\varphi_{A(t)}(0) - \frac{1}{2}$  を考えてみよ.)

学生番号		氏名		評点	
------	--	----	--	----	--