解 析 学 B 1 演 習

§1. 解析学 **A1** の復習　　　2007 年 4 月 12 日出題

[1.1] (1) $u(x,y) := e^x(x\cos y - y\sin y)$ について，$u_{xx} + u_{yy} = 0$ を示せ．
(2) (1) の $u(x,y)$ を実部とする正則函数 $f(z)$ を求めよ．

[1.2] 函数 $f(z)$ は $|z| < R$ $(R > 0)$ で正則であるとする．ある r $(0 < r < R)$ が存在して，次の等式が成り立つとき，$f(z)$ は定数であることを示せ：

$$|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

[1.3] $f(z)$ は $|z| < r$ $(r > 1)$ で正則な函数で $f(0) = 0$ であると仮定する．
$u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ とするとき，次の等式を示せ：

$$\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} v(e^{i\theta})^2\, d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})v(e^{i\theta})\, d\theta = 0$$

[1.4] 函数 $f(z)$ は $|z| < r$ $(r > 1)$ において正則であるとし，$u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ とする．このとき次式を示せ：

$$f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{-i\theta}\, d\theta$$

[1.5] $f(z)$ は整函数であるとする．ある自然数 m と正の定数 A が存在して，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，$|f(z)| \leqq A|z|^m$ が成り立つならば，$f(z)$ は次数が m を越えない多項式であることを示せ．
（Hint: $f^{(m+1)}(z)$ の積分表示を評価して，$f^{(m+1)}(z) \equiv 0$ を示せ．）

[1.6] 函数 $f(z)$ は $|z| < r$ $(r > 1)$ で正則であるとする．$|z| < 1$ のとき次式が成り立つことを示せ：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} f(e^{i\theta})\, d\theta$$

[1.7] 整函数 $f(z)$ が，すべての $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| \leqq |\sin z|$ をみたせば，定数 C が存在して，$f(z) = C\sin z$ となることを示せ．

[1.8] $f(z)$ は整函数で，その値域 $f(\mathbb{C})$ が集合 $\{z = x + iy\ ;\ y > -x\}$ に含まれるという．このとき，$f(z)$ は定数であることを示せ．

[1.9] $f(z)$ は定数ではない整函数とする．値域 $f(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ で稠密であることを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 1 演 習

§2.　孤立特異点　　　　　　　　2007 年 4 月 18 日出題

[**2.1**]　$0 < |z-1| < 2$ のとき，次式を示せ：

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$$

[**2.2**]　$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3(z-2)^2}$ の極における主要部を求めよ．

[**2.3**]　$f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}$ の $z = 1$ における孤立特異点の性質（極であるなら何位の極か）を述べよ．

[**2.4**]　$f(z)$ は $0 < |z| < \infty$ で正則であって，定数 α ($|\alpha| < 1$) に対して，函数方程式 $f(z) = zf(\alpha z)$ をみたすという．$f(z)$ の $z = 0$ での Laurent 展開の定数項が 1 に等しいとき，$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{n(n-1)/2} z^n$ $(0 < |z| < \infty)$ であることを示せ．また $f(-\alpha) = 0$ となることを示せ．

[**2.5**]　$z \in \mathbb{C}$ を固定するとき，$0 < |w| < \infty$ で正則な函数 $\exp \dfrac{z}{2}\left(w - \dfrac{1}{w}\right)$ の孤立特異点 $w = 0$ での Laurent 展開を

$$\exp \frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n$$

とするとき，次式を示せ：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

[**2.6**]　函数 $f(z)$ は $0 < |z| < R$ $(R > 0)$ で正則であって有界であるとする．このとき，実は $z = 0$ は $f(z)$ の正則点であることを，Laurent 展開の負べきの係数を評価することにより示せ．

[**2.7**]　$z = 0$ は函数 $f(z)$ の孤立特異点で，それは真性特異点であるとする．このとき，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，点列 $\{z_n\}$ がとれて，$z_n \to 0$ かつ $f(z_n) \to \alpha$ となることを，背理法により示せ．

[**2.8**]　$f(z)$ は $D := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < |z| < 1\}$ で正則な函数であるとする．広義積分 $\displaystyle\iint_D |f'(x+iy)|^2\, dxdy$ が収束するならば，$z = 0$ は $f(z)$ の正則点（除去可能な特異点）であることを示せ．
（Hint: $f(z)$ の Laurent 展開を用いて $|f'|^2 = f'\overline{f'}$ を $\varepsilon \leqq |z| \leqq r$ で項別積分.）

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 1 演 習

§3. 留数定理の応用　　　　2007年4月25日出題

[3.1] 次の函数の $z=0$ における留数を求めよ：

(1) $\dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{(\sin z - z)\sin z}$　　(2) $z^3 \sin\dfrac{1}{z^2}$

[3.2] 次の積分の値を求めよ：

(1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=2} \tan z\, dz$　　(2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2+z}\, dz$

[3.3] 次の積分の値を求めよ：

(1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz$　　(2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\,\sin\frac{1}{z}\, dz$

[3.4] $z \notin \mathbb{Z}$ とし，n は自然数とする．$\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$ を4頂点とする正方形の周を C_n とする．n を十分大きくとって，z は C_n の内部にあるとするとき，次式を示せ：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\pi\cot\pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \pi\cot\pi z - \left(\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2z}{z^2 - m^2}\right)$$

[3.5] $z = e^{2i\theta}$ の積分になおして，次式を示せ：

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a^2 + \sin^2\theta} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}} \qquad (a>0).$$

[3.6] 留数定理を用いて，定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ を計算せよ．　$\left(\frac{\pi}{3}\right)$

[3.7] 留数定理を用いて，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$ $(a>0)$ を計算せよ．　$\left(\frac{\pi}{ae^a}\right)$

[3.8] $Q(z)$ は実軸上原点を含む正の部分に極を持たない有理函数で，$\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$ をみたしているとする．$0<\alpha<1$ とするとき次式を示せ：

$$\int_0^{\infty} Q(x)x^{\alpha-1}\, dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum_{\beta} \operatorname*{Res}_{z=\beta} Q(z)(-z)^{\alpha-1}\, dz.$$

ただし，$(-z)^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\,\mathrm{Log}(-z)}$.

以上

解 析 学 B 1 演 習

§4.　無限遠点とリーマン球面　　2007 年 5 月 9 日出題

[**4.1**]　複素平面上の点 z, z' が，それぞれリーマン球面上の点 $\mathrm{P}(X, Y, Z)$, $\mathrm{P}'(X', Y', Z')$ に対応するとし（対応のさせ方は講義中のものとする），線分 PP' の長さを $d(z, z')$ で表すとき，次の式を示せ：

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}, \qquad d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

(Hint: $(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2 = 2 - 2(XX' + YY' + ZZ')$ としてから講義中の公式を代入すること.)

[**4.2**]　$z, z' \in \mathbb{C}$ がそれぞれリーマン球面 Σ 上の点 P, P' に対応しているとする．2 点 P, P' が Σ のある直径の両端の点であるための必要十分条件は $z\overline{z'} = -1$ がみたされることである．これを示せ.（[4.1] を用いてもよいし，直接示してもよい.）

[**4.3**]　$z, z' \in \mathbb{C}$ がそれぞれリーマン球面 Σ 上の点 P, P' に対応しているとする. $z\overline{z'} = 1$ がみたされるとき，2 点 P, P' は Σ でどのような位置関係にあるか.

[**4.4**]　$|a| < |b|$ とするとき，函数 $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ の $z = \infty$ の近傍での Laurent 展開を書き下せ.

[**4.5**]　次の各函数の ∞ における性状について述べよ．主要部と留数も求めること.

(1) $\dfrac{\sin z}{z^4}$　　(2) $z \sin\dfrac{1}{z^2}$　　(3) $ze^{\sin(1/z)}$

[**4.6**]　$\varphi(w)$ は原点 $w = 0$ の近傍で正則な函数であるとし，函数 $f(z) := \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を考える．$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz = -\varphi'(0)$ であることを示せ.

[**4.7**]　無限遠点での被積分函数の留数を考えて，次の積分の値を求めよ：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+3)^3(z^3+3)^4}\,dz$$

[**4.8**]　積分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}$ を計算せよ．ただし $C : |z| = 1$ とする.

$\boxed{\text{以上}}$

解析学B1演習

§5.　有理函数　　　　　　　　2007年5月16日出題

[**5.1**]　$z=i$ で1位の極を持ち，留数が -1，さらに $z=\infty$ と $z=-1$ に極を持ち，そこにおける主要部がそれぞれ z^2+z，$-\dfrac{2}{(z+1)^2}+\dfrac{1}{z+1}$ で，これら以外には特異点がなく，しかも $f(0)=i$ となるような函数 $f(z)$ を作れ．

[**5.2**]　$P(z),Q(z)$ を実係数の多項式とし，$f(z):=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ が $z=a\pm ib$ $(a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0)$ で1位の極をもつなら，$\operatorname*{Res}_{z=a+ib} f(z)\,dz$ と $\operatorname*{Res}_{z=a-ib} f(z)\,dz$ は互いに共役な複素数であることを示せ．

[**5.3**]　n は2以上の自然数，$a_1,\ldots,a_n$ は相異なる複素数として，多項式 $P(z):=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ を考える．

(1) 函数 $\dfrac{1}{P(z)}$ の留数を考えて $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P'(a_j)}=0$ を示せ．

(2) $k=0,1,\ldots,n-1$ に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^k}{P'(a_j)}$ を求めよ．

[**5.4**]　(1) 0, 1, ∞ を動かさない，すなわち，$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1,\ \varphi(\infty)=\infty$ をみたす1次分数変換 φ は恒等写像に限ることを示せ．
(2) $\mathbb{P}^1$ の相異なる3点 α,β,γ をこの順に $0,1,\infty$ に写す1次分数変換は一意に定まることを示せ．

[**5.5**]　写像 $w=\dfrac{1}{z}$ により，次の図形はどんな図形に写されるか．

(1) 円 $|z-z_0|=|z_0|>0$　　(2) 直線 $\operatorname{Re} z=a$

[**5.6**]　(1) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{w-1}{w+1}\right)<0 \iff |w|<1$ を示せ．

(2) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)<0 \iff \operatorname{Re} z<0$ を示せ．

(3) $\operatorname{Re} z<0 \iff \left|\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\right|<1$ を示せ．

[**5.7**]　$\alpha\in\mathbb{C},\ |\alpha|<1$ として，1次分数変換 $w=\varphi(z)=\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ を考える．
(1) φ は単位円の内部を不変にすることを示せ．
(2) φ による円 $|z|=r$ $(0<r<1)$ の像はどういう円か．　（アポロニウスの円）
(3) 次の不等式を示せ：$\dfrac{\big||z|-|\alpha|\big|}{1-|\alpha||z|}\leqq\left|\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\right|\leqq\dfrac{|z|+|\alpha|}{1+|\alpha||z|}$

[**5.8**]　$\varphi_1(z):=\dfrac{iz+1}{z+i}$ とし，$n=2,3\ldots$ に対して，$\varphi_n:=\varphi_1\circ\varphi_{n-1}$ とおくとき，閉区間 $[-1,1]$ の像 $\varphi_n([-1,1])$ を調べよ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 1 演 習

§6. 偏角の原理と Rouché の定理　2007 年 5 月 23 日出題

[**6.1**] 方程式 $7z^{11} - 18z^3 + 10 = 0$ の $|z| < 1$ における解の個数を求めよ.

[**6.2**] a は定数で $0 < ae < 1$ をみたすとする. このとき方程式 $z^2 - ae^z = 0$ の $|z| < 1$ における解は 2 個で, それらは符号の異なる実数であることを示せ.

[**6.3**] Rouché の定理を 2 回使って, 方程式 $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ の $1 < |z| < 2$ における解の個数を求めよ.

[**6.4**] $m > 0$ は定数であるとする. $f(z)$ は閉単位円板を含む領域で正則であるとする. $|z| = 1$ のとき $|f(z)| > m$ をみたし, さらに $|f(0)| < m$ をみたすならば, $f(z)$ は $|z| < 1$ に少なくとも 1 個の零点を持つことを示せ.

[**6.5**] Rouché の定理を適用して, 方程式 $e^{-z} + z - 2 = 0$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ にはただ一つの実数解のみ持つことを示せ.

[**6.6**] $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ はそれぞれ定数とする. このとき, 函数 $f(z) := \sin z + \dfrac{1}{z - \alpha}$ は, $|\,\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon$ に無数の零点を持つことを示せ.
Hint: 自然数 m に対して, $\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\pi \pm i\varepsilon$ を 4 頂点とする長方形 R_m を考え, 十分大きな m に対して, Rouché の定理を適用して, R_m の内部での零点を見ればよいことに注意.

[**6.7**] 偏角の原理を適用して, 8 次方程式 $z^8 + 3z^3 + 7z + 5 = 0$ は第 1 象限に丁度 2 個の解を持つことを示せ.

[**6.8**] 偏角の原理を適用して, $\mathrm{Re}\, z > 0$ における方程式 $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$ の解の個数を求めよ.

以上

解 析 学 B 1 演 習

§7.　正則関数列　　　　　　2007 年 5 月 30 日出題

[7.1]　$f(z)$ は $|z| < 1$ で正則な函数で $f(0) = 0$ であるとする．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ は $|z| < 1$ で広義一様収束することを示せ．

[7.2]　領域 D で正則な函数の列 $\{f_n(z)\}$ において，どの $f_n(z)$ も D に零点を持たないとする．今，$\{f_n(z)\}$ がある函数 $f(z)$ に D で広義一様収束するとき，$f(z)$ は恒等的に 0 であるか，さもなければ $f(z)$ も決して零点を持たないことを示せ．

[7.3]　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ で広義一様収束して，有理型函数を表すことを示せ．

[7.4]　$f(z)$ は整数と異なる有限個の点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を除いて $\mathbb{C}$ で正則な函数とする．さらに $R > 0$ が存在して，$|z| \geqq R$ では $|f(z)| \leqq \frac{M}{|z|^2}$（$M > 0$ は定数）が成り立っているとする．このとき，$f(z)\cot \pi z$ を [3.4] の積分路 C_n で積分して $n \to \infty$ とすることにより，次の公式を示せ：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=\alpha_m}\bigl(f(z)\cot \pi z\bigr)\,dz.$$

[7.5]　[7.4] を適当な $f(z)$ に適用して，次の公式を示せ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}(\cot \pi a + \coth \pi a) \qquad (a \notin \mathbb{Z},\, a \notin i\mathbb{Z}).$$

[7.6]　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$ は $z = 0, -1, -2, \ldots$ を含まない任意の有界閉領域で一様収束することを示せ．

[7.7]　(1) 級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束して，$\mathbb{C}$ 上の有理型函数を表すことを示せ．

(2) 講義中に示した $\pi\cot\pi z$ の部分分数分解を使って，(1) の級数が $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ に等しいことを示せ．

[7.8]　$\pi\cot\pi z$ の部分分数展開と同様に，函数 $f(\zeta) := \frac{\pi}{(\zeta - z)\sin\pi\zeta}$ を用いて，次式を示せ：　$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$　$(z \notin \mathbb{Z})$.

以上

解 析 学 B 1 演 習

§8.　無限積と因数分解　　　　2007 年 6 月 13 日出題

[8.1]　$|z| < 1$ のとき，次式を計算せよ：

$(1 + z + z^2 + \cdots + z^9)(1 + z^{10} + z^{20} + \cdots + z^{90})(1 + z^{100} + z^{200} + \cdots + z^{900}) \cdots$

[8.2]　$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ を示せ.

（Hint: $\displaystyle \sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} = 2^2 \sin\frac{z}{2^2}\cos\frac{z}{2^2}\cos\frac{z}{2}$ 等々.）

[8.3]　無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}\right]$ は 0 に発散することを示せ.

[8.4]　(1) $\displaystyle u_{2n-1} := \frac{i}{\sqrt{n}}$,　$\displaystyle u_{2n} := -\frac{i}{\sqrt{n}}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は収束するが，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ は発散することを示せ.

(2) $\displaystyle u_{2n-1} := \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\displaystyle u_{2n} := \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は発散するが，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ は収束することを示せ.

[8.5]　$\displaystyle u_n := \frac{i}{n}$ とすると，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ は（従って $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ も）発散するが，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}|1+u_n|$ は収束することを示せ.

（Hint: 前半では，$|z|$ が十分小のときの $|\operatorname{Log}(1+z) - z| \leqq |z|^2$（要証明）を使う.）

[8.6]　$\displaystyle a_n = \binom{-i}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とする．$\sin \pi z$ の因数分解を利用して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n|a_n| = \sqrt{\frac{\sinh\pi}{\pi}}$ となることを示せ.

[8.7]　$0 \leqq u_n < 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ とするとき，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ とは，同時に収束または発散することを示せ.

[8.8]　複素数列 $\{a_n\}$ は $0 < |a_n| < 1$ $(n = 1, 2, \dots)$，及び $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$ をみたしているとする．このとき

$$B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_n}{|a_n|}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z}$$

は $|z| < 1$ で広義一様に絶対収束することを示せ．従って $B(z)$ は $|z| < 1$ で正則な函数である.（Hint: 一般項を $1 + u_n(z)$ という形にして考察する.）

以上

解 析 学 B 1 演 習

§9. ガンマ函数　　　　2007 年 6 月 20 日出題

[9.1] $\alpha > 0$ のとき，定積分 $I_\alpha := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx$ を Γ 函数を用いて表し，次に $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha$ を求めよ．

[9.2] $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ における Γ 函数の留数を次の二通りの方法により求めよ．

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を使う．　　(2) 相補公式を使う．

[9.3] 無限積の公式 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)e^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\gamma/2}$ を示せ．ただし $\gamma > 0$ は Euler の定数である．

[9.4] Γ 函数の特徴付け定理の系として講義で示した $\Gamma(x)$ の表示式（の複素変数版）を使って，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1$ となることを示せ．

[9.5] 次の公式 (1), (2) を導け．

(1) $\displaystyle\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$

[9.6] $\psi(z) := \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ とおく（ディ・ガンマ函数と呼ばれる）．

(1) $\psi(z+1) = \psi(z) + \dfrac{1}{z}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \psi(n+1) + \gamma$ を示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \psi'(n+1)$ を示せ．($\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$ に注意.)

[9.7] (1) $\sin\pi z$ の因数分解を利用して，次の Wallis の公式を導け：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,4^n}{(2n)!\,\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(2) 次の公式（倍数公式）を，[9.4] と同様に $\Gamma(z)$ の表示式から直接導け：

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\pi^{-1/2}\,\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

裏面にも問題がある

[9.8]　次の無限積は $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ で広義一様に絶対収束して，有理型函数になることを示せ：

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1 - \frac{z}{n}}{1 + \frac{z}{n}} \right)^{n} e^{2z} \right)$$

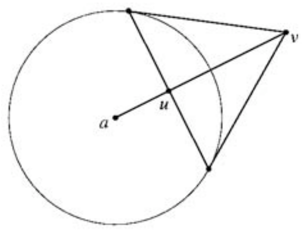
Hint: まず $|z|$ が小さいとき，$|\operatorname{Log}(1-z) - \operatorname{Log}(1+z) + 2z| \leqq |z|^3$ となることを示す.

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 1 演 習

§10.　写像としての正則函数　　2007年6月27日出題

[**10.1**]　下図は2点uとvが円$|z-a|=R$に関して鏡像の位置にある時の図である．これを説明し，円の内部に$u \neq a$が与えられたとき，vを作図する方法を述べよ．



[**10.2**]　(1) $w=e^z$による実軸に平行な直線と，虚軸に平行な直線の像を求めよ．
(2) (1)で求めた曲線族の$\zeta = \dfrac{w+1}{w-1}$による像を考えることにより，2定点$(\pm 1, 0)$を通る円の族と，2定点$(\pm 1, 0)$からの距離の比が一定な点の軌跡（アポロニウスの円）の族が直交することを，等角性の観点から説明せよ．

[**10.3**]　写像$z \mapsto z + \dfrac{1}{z}$による次の集合の像を求めよ．
(1) 円周$|z|=r$ $(r>0)$,　　(2) 半直線$\arg z = \alpha$,　　(3) 開単位円板$\mathbb{D}$
またこれより，$w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$による$\mathbb{D}$の像を求めよ．この写像が単射かどうかも調べよ．　　(Hint: $\dfrac{1}{w}$を考えてみる．)

[**10.4**]　(1) $f(z) := \dfrac{\tan \frac{\pi}{2}|z|}{|z|} \cdot z$は，開単位円板$\mathbb{D}$から$\mathbb{C}$の上への微分同相（逆も$C^\infty$である全単射$C^\infty$写像）であることを示せ．
(2) $\mathbb{D}$から$\mathbb{C}$の上への正則同相（逆も正則である全単射な正則写像）は存在しないことを示せ．

[**10.5**]　A, Bは次で与えられる閉領域とする：

$$A := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 \leqq |z| \leqq 4\}, \qquad B := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 \leqq |z| \leqq 2\}.$$

C_rで原点を中心とする半径rの円周を表すことにする．正則函数$f(z)$で，$f(A)=B$, $f(C_1)=C_1$, $f(C_4)=C_2$となるものは存在しないことを示せ．
Hint: $F(z) := \dfrac{f(z)^2}{z}$とおいて，$F(z)$および$\dfrac{1}{F(z)}$を考えると$C_1 \cup C_4$上ではどうなるか．

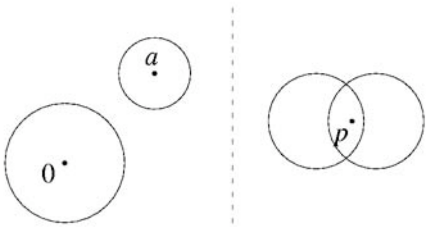
裏面にも問題がある

[**10.6**] D は開単位円板から原点を取り除いた領域 $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < |z| < 1\}$ とし，A は円環領域 $A := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 < |z| < 2\}$ とする．D で定義された正則かつ単葉な函数 $f(z)$ で，$f(D) = A$ となるものが存在したと仮定しよう．

(1) $z = 0$ は $f(z)$ の正則点（除去可能な特異点）であることを示せ．

(2) $p := \lim_{z \to 0} f(z)$ とする．明らかに p は A の閉包に属するが，$p \in \partial A$ とはならないことを示せ．

(3) (2) より $p \in A$ であるので，$a \in D$ が存在して，$f(a) = p$ となる．これより矛盾を導くことによって（下図参照），問題にいうような $f(z)$ は存在しないことを示せ．



[**10.7**] $f(z)$ は閉円板 $|z - \alpha| \leqq r$ を含む領域で正則であるとし，円周 $C : |z - \alpha| = r$ 上では $f(z)$ は単射かつ微分係数は 0 にならないとする（従って像曲線 $f(C)$ もレギュラーな単純閉曲線である）．このとき，C の内部では，$f(z)$ は $f(C)$ の外部の点を値として決して取らず，$f(C)$ の内部の点を値として丁度 1 回とることを示せ．

Hint: $\forall \alpha \notin f(C)$ に対して，$\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\, dz$ を考察する．

[**10.8**] 開単位円板 $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}$ の上に写す正則写像であるような 1 次分数変換の一般形を次の手順で求めよ．

(1) そのような 1 次分数変換は，単位円周 S を S の上に写すことを示せ．

(2) $a \in \mathbb{D}$ が 0 に写れば，$\dfrac{1}{\overline{a}}$ は ∞ に写ることを示せ．

(3) (2) より求める 1 次分数変換は $w = c \cdot \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$ $(|c| = 1)$ となることを示せ．これはまた，$w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}$ $(|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$ とも書けることを示せ．

以上