数学特論8 (学部) / 表現論大意 (大学院) レポート問題

出題：2006 年 7 月 7 日　　　　（担当：野村隆昭）

＊ (1)〜(7) のすべてに解答すること．
＊ A4 レポート用紙にて数理事務室（理学部本館 4 階）に提出のこと．

提出期限：2006 年 7 月 28 日 (金) 17 時　厳守

---

n 次の実対称行列のなすベクトル空間を V とする．E_{ij} で，(i,j) 成分のみが 1，その他の成分すべてが 0 である行列を表すものとし（行列単位），

$$f_{ii} := E_{ii} \quad (i=1,\dots,n), \qquad f_{ij} := E_{ij}+E_{ji} \quad (1 \leqq i < j \leqq 1)$$

とおく．明らかに $\{f_{ij}\,;\,1 \leqq i \leqq j \leqq n\}$ はベクトル空間 V の基底をなしている．
以下の各問に答えよ．

(1) 次で定義される V 上の線型写像 T_i $(i=1,\dots,n)$ の固有値と固有空間をすべて求めよ：

$$T_i x := \frac{1}{2}(f_{ii}x + xf_{ii}) \qquad (x \in V).$$

(2) n 個の実数 $t_1,\dots,t_n$ に対して，$T := \sum_{i=1}^{n} t_i T_i$ とおくとき，線型写像 T の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(3) 対角成分がすべて正の n 次の下三角行列からなる群を H とする：

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \smash{\text{\Large 0}} \\ & a_2 & \\ \text{\Large $*$} & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1>0, a_2>0, \dots, a_n>0 \right\}.$$

また，Ω は V の正定値なものからなる開凸錐とする：

$$\Omega := \{x \in V \mid x \gg 0\}.$$

このとき，H は Ω に $H \times \Omega \ni (h,x) \mapsto hx{}^t h \in \Omega$ によって単純推移的に作用することを示せ．

裏面に続く

(4) H の Lie 代数は，下三角行列全体からなる集合 $\mathfrak{h}$ である（証明不要）：

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} * & & 0 & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \huge{*} & & & * \end{pmatrix}$$

各 $x = (x_{ji}) \in V$ に対して，$\underline{x} \in \mathfrak{h}$ を次式で定義する：

$$\underline{x} := \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{\frac12 x_{11}} & \phantom{\frac12 x_{22}} & i & & \phantom{\frac12 x_{nn}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & & \\ & \frac{1}{2}x_{22} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & x_{ji} & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2}x_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (i < j).$$

また V 上の線型写像 L_x を，$L_x y = \underline{x}\,y + y\,{}^t\underline{x}$ $(y \in V)$ で定義する．V の基底 $\{f_{ij}\,;\,1 \leqq i \leqq j \leqq n\}$ に辞書的順序を入れるとき，すなわち，

$$f_{11}, \ldots, f_{1n}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots, f_{nn}$$

というように順序をつけるとき，その順序づけられた基底で線型写像 $L_{f_{ij}}$ $(i < j)$ を行列で表すと，真に下三角な（つまり対角成分がすべて 0 である下三角）行列で表されることを示せ．

(5) (4) にいう順序づけられた V の基底で V 上の線型写像を行列表示をするとき，すべての $x \in V$ に対して，L_x は下三角行列であることを示せ（$L_{f_{ii}}$ は (1) の T_i に等しいことに注意）．

(6) 線型写像 L_x $(x \in V)$ のトレースは，$\dfrac{n+1}{2}\operatorname{tr} x$ に等しいことを示せ．

(7) $x \triangle y := L_x y$ $(x, y \in V)$ とおく．線型写像 $L_{x\triangle y}$ のトレースをとることで得られる双線型形式 $\tau(x, y) := \operatorname{tr} L_{x\triangle y}$ は，V に内積を定めていることを示せ．

以上