Faculty of Mathematics
Kyushu University

Faculté de Mathématiques
Université de Kyushu

数　学　特　論　講　義　ノ　ー　ト

(2006 年度前期)

対称錐・等質開凸錐

野　村　隆　昭

目　　　次

§1．開凸錐の双対性

V：有限次元実ベクトル空間で，ノルム $\|\cdot\|$ が定義されている．
K：V の凸部分集合．すなわち

$$x, y \in K \implies \alpha x + (1-\alpha) y \in K \quad (\forall \alpha \ \text{s.t.}\ 0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

以下，K は内点を持つとする．すなわち $\mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$ と仮定する．
各 $a \in \mathrm{Int}(K)$ に対して

$$\varphi_a(x) := \inf\left\{\alpha > 0\ ;\ \frac{x}{\alpha} \in K - a\right\} \qquad (x \in V)$$

とおく．ただし $K - a := \{k - a\ ;\ k \in K\}$．
φ_a は原点を内点とする凸体[1]$K - a$ の **Minkowski** 汎函数である．
原点が $K - a$ の内点になっているので，$\alpha > 0$ が十分大きければ，$\alpha^{-1} x \in K - a$ となることに注意．
明らかに

$$\begin{cases} 0 \leqq \varphi_a(x) < \infty, \quad \varphi_a(0) = 0, \\ \varphi_a(\alpha x) = \alpha \varphi_a(x) \quad (\alpha \geqq 0,\ x \in V). \end{cases}$$

補題 1.1． (1) （劣加法性）$\varphi_a(x+y) \leqq \varphi_a(x) + \varphi_a(y) \quad (x, y \in V)$．
(2) $\exists M > 0$ s.t. $|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| \leqq M\|x - y\| \quad (x, y \in V)$．
(3) $\mathrm{Int}(K) = \{x \in V\ ;\ \varphi_a(x-a) < 1\} \subset K \subset \{x \in V\ ;\ \varphi_a(x-a) \leqq 1\} = \overline{K}$．
(4) $x \in \mathrm{Int}(K),\ y \in \overline{K},\ 0 \leqq \alpha < 1 \implies (1-\alpha)x + \alpha y \in \mathrm{Int}(K)$．
(5) K が開集合 $\implies K = \mathrm{Int}(\overline{K})$．すなわち K は regular open．
（一般の開集合ではかならずしもこうはなっていない：例を考えてみよ．）

証明． (1) $\varepsilon > 0$：given．Then $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$ s.t.

$$\varphi_a(x) + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha, \quad \varphi_a(y) + \frac{\varepsilon}{2} > \beta, \quad \frac{x}{\alpha} \in K - a, \quad \frac{y}{\beta} \in K - a.$$

このとき，$\dfrac{x+y}{\alpha+\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\,\dfrac{y}{\beta} \in K - a$．ゆえに

$$\varphi_a(x+y) \leqq \alpha + \beta < \varphi_a(x) + \varphi_a(y) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから，(1) が出る．
(2) Take $\delta > 0$ s.t. $\overline{B(0,\delta)} \subset K - a$．このとき，任意の $x \in V$ $(x \neq 0)$ に対して

[1] 内点を持つ凸集合を凸体 (convex body) という．多くの本では，K 自体が原点を内点として含むと仮定して一般性を失わない，として議論を進めるが，ここでは凸錐体への応用を考えているので，そのような仮定は置かない．

$\delta\,\dfrac{x}{\|x\|} \in K-a$ となるので，$\varphi_a(x) \leqq \dfrac{\|x\|}{\delta}$（この不等式は $x=0$ でも成立）．
さて (1) の劣加法性を用いると，任意の $x, y \in V$ に対して

$$\varphi_a(x) \leqq \varphi_a(x-y) + \varphi_a(y).$$

x, y を入れ替えたものも成り立つので，結局

$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| \leqq \max\{\varphi_a(x-y), \varphi_a(y-x)\} \leqq \frac{1}{\delta}\|x-y\|.$$

(3)(a) まず $x \in \mathrm{Int}(K)$ とし，$\delta > 0$ をとって，$\overline{B(x,\delta)} \subset K$ とする．
$x=a$ ならば，$\varphi_a(a-a) = 0 < 1$ なので，$x \neq a$ とする．$y := x + \delta\,\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ を考えると，δ の定め方から $y \in K$．そうすると

$$K-a \ni y-a = \left(1 + \frac{\delta}{\|x-a\|}\right)(x-a).$$

ゆえに $\varphi_a(x-a) \leqq \left(1 + \dfrac{\delta}{\|x-a\|}\right)^{-1} < 1$．以上で次の包含関係が示せた：

$$\mathrm{Int}(K) \subset \{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) < 1\}.$$

(b) 逆に $\varphi_a(x-a) < 1$ とすると，定義から，$0 < \exists\alpha < 1$ s.t. $\alpha^{-1}(x-a) \in K-a$．
ゆえに

$$x-a \in \alpha(K-a) \subset K-a \quad (\because K-a \text{ は原点を含む凸集合}).$$

これより $x \in K$ となるので，$\{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) < 1\} \subset K$．(2) より φ_a は連続であるから，左辺は開集合．ゆえに

$$\{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) < 1\} \subset \mathrm{Int}(K).$$

(c) $x \in K$ とすると，$x-a \in K-a$ であるから，$\varphi_a(x-a) \leqq 1$ となる．ゆえに $K \subset \{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) \leqq 1\}$．再び φ_a の連続性から，右辺は閉集合．ゆえに

$$\overline{K} \subset \{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) \leqq 1\}.$$

(d) $\varphi_a(x-a) = 1$ とすると，$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \downarrow 1$ となる列 $\{\alpha_n\}$ があって，$\alpha_n^{-1}(x-a) \in K-a$ $(\forall n)$．ここで $n \to \infty$ として，$x-a \in \overline{K}-a$．(b) の結論とあわせて

$$\{x \in V \,;\, \varphi_a(x-a) \leqq 1\} \subset \overline{K}.$$

以上 (a),(b),(c),(d) より，(3) が示された．
(4) $\varphi_a((1-\alpha)x + \alpha y - a) \leqq (1-\alpha)\varphi_a(x-a) + \alpha\varphi_a(y-a)$ と (3) より．

(5) $x \in \mathrm{Int}(\overline{K})$ $(x \neq a)$ として，(3) と同様，$\delta > 0$ をとって，$\overline{B(x,\delta)} \subset \overline{K}$ とする．そして，$y := x + \delta \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ を考えると，$y \in \overline{K}$．ゆえに (3) より

$$1 \geqq \varphi_a(y-a) = \varphi_a\biggl(\Bigl(1 + \frac{\delta}{\|x-a\|}\Bigr)(x-a)\biggr).$$

よって $\varphi_a(x-a) \leqq \bigl(1 + \frac{\delta}{\|x-a\|}\bigr)^{-1} < 1$ となって，再び (3) より，$x \in \mathrm{Int}(K) = K$ である．以上より，$\mathrm{Int}(\overline{K}) \subset K$ であるが，逆向きの包含関係は明らかであろう． □

系 1.2. Ω：V の凸錐（凸集合であると共に，「$x \in \Omega$ かつ $\alpha > 0 \implies \alpha x \in \Omega$」をみたす）で，$\mathrm{Int}(\Omega) \neq \varnothing$ とする．

(1) $\mathrm{Int}(\Omega) + \overline{\Omega} = \mathrm{Int}(\Omega)$.

(2) $\varphi_a(x) = \inf\{\alpha > 0\ ;\ x + \alpha a \in \Omega\}$.

従って，$x + \varphi_a(x)a \in \overline{\Omega}$ for $\forall a \in \mathrm{Int}(\Omega)$, $x \in V$.

(3) $\overline{\Omega} = \{x \in V\ ;\ \varphi_a(x) = 0\}$ for $\forall a \in \mathrm{Int}(\Omega)$.

証明. (1) $x \in \mathrm{Int}(\Omega)$, $y \in \overline{\Omega}$ とする．補題 1.1(4) より $\frac{1}{2}(x+y) \in \mathrm{Int}(\Omega)$．2 倍するのは位相同型なので，$x + y \in \mathrm{Int}(\Omega)$．よって $\mathrm{Int}(\Omega) + \overline{\Omega} \subset \mathrm{Int}(\Omega)$．逆向きの包含関係は $0 \in \overline{\Omega}$ より明らか．

(2) Ω が凸錐であることより．

(3) 補題 1.1(3) より $\overline{\Omega} = \{x \in V\ ;\ \varphi_a(x-a) \leqq 1\}$．さて $x \in \overline{\Omega}$ とする．任意の $\alpha > 0$ に対して $\alpha x \in \overline{\Omega}$ であるから，$\varphi_a(\alpha x - a) \leqq 1$．これより，$\varphi_a\Bigl(x - \dfrac{a}{\alpha}\Bigr) \leqq \dfrac{1}{\alpha}$．$\alpha \to \infty$ として $\varphi_a(x) = 0$ を得る．逆に $\varphi_a(x) = 0$ ならば，(2) より $x \in \overline{\Omega}$． □

以下 Ω は凸錐で，$\mathrm{Int}(\Omega) \neq \varnothing$ とする．

V^*：V の双対ベクトル空間．

問 1. (1) V の任意の二つのノルムは同値であることを示せ．つまり，$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ を V の二つのノルムとするとき，定数 $m > 0$, $M > 0$ が存在して，$m\|x\|_2 \leqq \|x\|_1 \leqq M\|x\|_2$ $(\forall x \in V)$ が成り立つことを示せ．

ヒント： 基底 $e_1, \ldots, e_n$ を一つ固定して，$\|x\|_1$ は ℓ^1 ノルム，つまり $x = \sum x_i e_i$ と表すときの $\|x\|_1 := \sum |x_i|$ としてよい．このとき $m^{-1} := \max_i \|e_i\|_2$ とせよ．そうすると，$x \mapsto \|x\|_2$ は $(V, \|\cdot\|_1)$ のコンパクト集合 $\{x \in V\ ;\ \|x\|_1 = 1\}$ 上の正値連続函数であるから，$M^{-1} := \min_{\|x\|_1 = 1} \|x\|_2$ とすればよい．

(2) 任意の $\lambda \in V^*$ は V 上連続であることを示せ．

ヒント： (1) より，V にどのようにノルムを入れても，結局 V での収束は，基底を固定するときの座標毎の収束ということになる． $\square$

V^* には次式でノルムを入れる：

$$\|\lambda\| := \max_{\|x\| \leqq 1} |\langle\, \lambda, x \,\rangle|.$$

これは，V^* を単位球 $B := \{x \in V\ ;\ \|x\| \leqq 1\}$ 上の連続函数のなす Banach 空間 $C(B)$ の閉部分空間として埋め込んでいることになる．

定義． $\Omega^* := \{\lambda \in V^*\ ;\ \langle\, \lambda, x \,\rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}$.

明らかに，Ω^* は（空集合でないなら）凸錐である．Ω^* を Ω の双対凸錐と呼ぶ．

補題 1.3. 次は同値である：

(1) $\overline{\Omega}$ は正次元の V の部分空間を含まない．

(2) $\Omega^* \neq \varnothing$.

証明． (1) を否定すると，$\pm x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ となる x が存在することになるので，Ω^* の定義より (2) が否定される．ゆえに (2) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2) を示そう．各 $b \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，$-b \notin \overline{\Omega}$ なので，$\exists \lambda_b \in V^*$ s.t.

$$\langle\, \lambda_b, -b \,\rangle < 0, \quad \text{かつ} \quad \langle\, \lambda_b, x \,\rangle \geqq 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega}).$$

（閉凸集合の分離定理による：補遺を参照のこと．）

λ_b の連続性から，b の近傍 N_b が存在して，$\langle\, \lambda_b, y \,\rangle > 0$ $(\forall y \in N_b)$．V の単位球面を S とするとき $(S := \{x \in V\ ;\ \|x\| = 1\})$，$\bigcup_{a \in S \cap \overline{\Omega}} N_b \supset S \cap \overline{\Omega}$ となっている．集合 $S \cap \overline{\Omega}$ はコンパクトゆえ

$$\exists b_1, \ldots, b_k \in S \cap \overline{\Omega} \ \text{ s.t. } \bigcup_{k=1}^{j} N_{b_k} \supset S \cap \overline{\Omega}.$$

$\lambda := \sum_{k=1}^{j} \lambda_{b_k} \in V^*$ とおくと $\lambda \in \Omega^*$ である．なぜなら，任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, \lambda, x \,\rangle = \|x\| \sum_{k=1}^{j} \left\langle\, \lambda_{b_k}, \frac{x}{\|x\|} \,\right\rangle > 0. \quad \square$$

定義． $\Omega^* \neq \varnothing$ のとき，Ω は正則 **(regular)** であるという[2]．

[2]**proper** という用語もよく使われる．

系 1.4.　Ω：正則開凸錐．このとき
Ω：正則 $\iff$ Ω は (affine) line を含まない．

証明．　$a \in V,\ 0 \neq x_0 \in V$ として，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$a + tx_0 \in \Omega$ とする．
$t > 0$ のとき，$x_0 + t^{-1}a \in \Omega$ より，$t \to \infty$ として，$x_0 \in \overline{\Omega}$．
$t < 0$ のとき，$-x_0 - t^{-1}a \in \Omega$ より，$t \to -\infty$ として，$-x_0 \in \overline{\Omega}$．
ゆえに $\Omega^* = \varnothing$ となって，Ω は正則ではない．
逆に Ω が正則でなければ，補題 1.3 より，$\exists x_1 \in \overline{\Omega}$ s.t. $tx_1 \in \overline{\Omega}$ for $\forall t \in \mathbb{R}$．
$a \in \Omega$ をとって，$a + tx_1$ を考えると，系 1.2(1) より，これらはすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，Ω に属する．　□

補題 1.5.　Ω：正則開凸錐．このとき，次の集合 A, B, C はすべて $\overline{\Omega^*}$ に等しい：
(1) $A := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \Omega\} \bigcup \{0\}$,
(2) $B := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle \geqq 0 \quad \text{for } \forall x \in \Omega\}$,
(3) $C := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle \geqq 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega}\}$.

証明．　$A \subset B = C$ は明らかであろう．また，$\overline{\Omega^*} \subset C$ も明らか．
さて，$\lambda \in B \setminus \{0\}$ ならば，λ は開写像であるから，Ω の像 $\lambda(\Omega)$ は開区間 $(0, \infty)$ に含まれることがわかる．ゆえに $A = B$ である．さらに，明らかに $C + \Omega^* \subset \Omega^*$ であることに注意すると，$\lambda_0 \in \Omega^*$ を固定したとき，任意の $\lambda \in C$ に対して，$\lambda + \alpha\lambda_0 \in \Omega^*$ for $\forall \alpha > 0$．ゆえに $\lambda = \lim_{\alpha \downarrow 0}(\lambda + \alpha\lambda_0) \in \overline{\Omega^*}$．これより $C \subset \overline{\Omega^*}$．　□

定理 1.6.　Ω：正則開凸錐．
(1) Ω^* は V^* の正則開凸錐になる．
(2) ノルム空間としての自然な同一視 $V^{**} = V$ のもとで，$\Omega^{**} = \Omega$ となる．

証明．　Ω^* が開集合であることをまず示そう．$\lambda_0 \in \Omega^*$ とし，$\varepsilon := \min_{x \in S \cap \overline{\Omega}} \langle \lambda_0, x \rangle > 0$ とする．$\|\lambda\| < \varepsilon/2$ のとき，$\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle \lambda_0 + \lambda,\, x \rangle \geqq \|x\| \left(\left\langle \lambda_0,\, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \left| \left\langle \lambda,\, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \right) > \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\| > 0.$$

ゆえに $\lambda_0 + \lambda \in \Omega^*$ となって，Ω^* は開集合である．
　さて，補題 1.5 より，$\overline{\Omega^*} = A$（補題 1.5 の記号で）．これは，$\overline{\Omega^*}$ が V の正次元の部分空間を含まないことを示している．補題 1.3 より，$\Omega^{**} \neq \varnothing$．以上で Ω^* が正則開凸錐であることがわかった．
(2) ノルム空間として $V^{**} = V$ とみなせることは，函数解析の教科書の Hahn–Banach

の定理のところを参照してほしい（$\|x\| = \max_{\|\lambda\| \leqq 1} |\langle \lambda, x \rangle|$ となることによる）．さて $\iota : V \to V^{**}$ を標準写像とする．$x \in \Omega$ ならば

$$\langle \iota(x), \lambda \rangle = \langle \lambda, x \rangle > 0 \quad \text{for } \forall \lambda \in \Omega^*.$$

補題 1.5 より，$\iota(x) \in \overline{\Omega^{**}}$．ゆえに $\iota(\Omega) \subset \overline{\Omega^{**}}$ となるが，ι は明らかに開写像なので，$\iota(\Omega) \subset \mathrm{Int}(\overline{\Omega^{**}}) = \Omega^{**}$（補題 1.1(5) を用いた）．

逆の包含関係を示すために，$x \notin \overline{\Omega}$ としよう．このとき

$$\exists \lambda \in V^* \text{ s.t. } \langle \lambda, x \rangle < 0 \quad \text{かつ} \quad \langle \lambda, y \rangle \geqq 0 \quad \text{for } \forall y \in \overline{\Omega}.$$

補題 1.5 より，$\lambda \in \overline{\Omega^*} \setminus \{0\}$．このとき，$\langle \iota(x), \lambda \rangle = \langle \lambda, x \rangle < 0$ ゆえ，$\iota(x) \notin \Omega^{**}$．よって $\Omega^{**} \subset \iota(\overline{\Omega}) = \overline{\iota(\Omega)}$ が示されたことになるが，Ω^{**} は開集合なので，$\Omega^{**} \subset \mathrm{Int}(\overline{\iota(\Omega)}) = \iota(\Omega)$ （再び補題 1.1(5) を用いた）． □

補遺： 大袈裟ではあるが，函数解析のほとんどの教科書に載っている Hahn–Banach の定理から，補題 1.3 で使った $\lambda_b \in V^*$ の存在を示しておこう：

$a \in \mathrm{Int}(\Omega)$ を固定する．系 1.2(3) より，$x \in \overline{\Omega} \implies \varphi_a(x) = 0$ であり，$-b \notin \overline{\Omega}$ より，$\varphi_a(-b) > 0$ である．$y_0 := -b$ とおき，1 次元部分空間 $\mathbb{R}y_0$ 上の線型形式 f_0 を，$\langle f_0, ty_0 \rangle := t\varphi_a(y_0)$ $(t \in \mathbb{R})$ で定義する．そうすると

$$\begin{cases} t \geqq 0 \implies \langle f_0, ty_0 \rangle = \varphi_a(ty_0), \\ t < 0 \implies \langle f_0, ty_0 \rangle = t\varphi_a(y_0) < 0 \leqq \varphi_a(ty_0), \end{cases}$$

となっているので，$\langle f_0, x \rangle \leqq \varphi_a(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}y_0)$ である．Hahn–Banach の定理により，$\langle f, x \rangle \leqq \varphi_a(x)$ $(\forall x \in V)$ をみたしたまま f_0 が $f \in V^*$ に拡張される．このとき

$$\begin{cases} x \in \overline{\Omega} \implies \langle f, x \rangle \leqq \varphi_a(x) = 0, \\ \langle f, -b \rangle = \langle f_0, y_0 \rangle = \varphi_a(-b) > 0. \end{cases}$$

ゆえに，$\lambda_b := -f$ が求める V^* の元である． □

§2. 開凸錐の線型自己同型群

以下，Ω は有限次元ノルム空間 V の正則開凸錐とする．

定義. $G(\Omega) := \{g \in GL(V) \,;\, g(\Omega) = \Omega\}$.

$G(\Omega)$ を Ω の自己同型群（あるいは線型自己同型群）と呼ぶ[3]．

[3] $GL(\Omega)$ と書く方が適切かもしれない．

明らかに $G(\Omega)$ は線型 Lie 群 $GL(V)$ の閉部分群である．従って，$G(\Omega)$ 自身 Lie 群になっている．

定義． Ω が等質 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G(\Omega)$ が Ω に推移的に働く．すなわち

$$\forall x, y \in \Omega, \quad \exists g \in G(\Omega) \ \text{ s.t. } \ gx = y.$$

V 上の線型写像（線型作用素）の全体を $\mathcal{L}(V)$ で表す．
$T \in \mathcal{L}(V)$ と $\lambda \in V^*$ に対して，$V \ni x \to \langle\,\lambda, Tx\,\rangle$ は V^* の元であるから，これを $T^*\lambda$ で表す．明らかに，$T^* : V^* \ni \lambda \mapsto T^*\lambda \in V^*$ は線型である．$T^* \in \mathcal{L}(V^*)$ を T の共役作用素と呼ぶ．定義より

$$\langle\,T^*\lambda, x\,\rangle = \langle\,\lambda, Tx\,\rangle \qquad (\lambda \in V^*,\, x \in V).$$

また，部分集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(V)$ に対して，$\mathcal{F}^* := \{T^* \,;\, T \in \mathcal{F}\}$ とする．

命題 2.1. $G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$.

証明． $g \in G(\Omega), \lambda \in \Omega^*$ とする．任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，$gx \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから，$\langle\,g^*\lambda, x\,\rangle = \langle\,\lambda, gx\,\rangle > 0$．ゆえに $g^*\lambda \in \Omega^*$ となって，$g^*(\Omega^*) \subset \Omega^*$ が示せた．g の代わりに g^{-1} を用いることにより，$g^*(\Omega^*) = \Omega^*$ がわかるので，$g^* \in G(\Omega^*)$．すなわち，$G(\Omega)^* \subset G(\Omega^*)$．以上の議論を Ω^* に適用して，$G(\Omega^*)^* \subset G(\Omega^{**}) = G(\Omega)$．これは $G(\Omega^*) \subset G(\Omega)^*$ を意味する．よって，$G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$． □

$a \in \Omega$ での固定部分群を $G(\Omega)_a$ で表す：$G(\Omega)_a := \{g \in G(\Omega) \,;\, ga = a\}$.
$\mathcal{L}(V)$ は，$\|T\| := \max\limits_{\|x\| \leqq 1} \|Tx\|$ でノルム空間になっている．

命題 2.2. $G(\Omega)_a$ は $G(\Omega)$ のコンパクト部分群である．

証明には次の補題が必要である．

補題 2.3. $a \in \Omega$ とするとき，$\Omega \cap (a - \Omega)$ は空でない有界な開集合である．

証明． $\frac{1}{2}a \in \Omega \cap (a - \Omega)$ ゆえ，$\Omega \cap (a - \Omega) \neq \varnothing$ である．$\lambda \in \Omega^*$ を固定するとき，容易に

$$\Omega \cap (a - \Omega) \subset \{x \in \Omega \,;\, \langle\,\lambda, x\,\rangle < \langle\,\lambda, a\,\rangle\}.$$

$\varepsilon := \min\limits_{x \in \overline{\Omega} \cap S} \langle\,\lambda, x\,\rangle > 0$ とおくと，$\langle\,\lambda, x\,\rangle \geqq \varepsilon\|x\|$ が，任意の $x \in \overline{\Omega}$ で成り立っている（$x = 0$ でも OK）．ゆえに，$x \in \Omega \cap (a - \Omega)$ ならば，

$$\|x\| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\langle\,\lambda, x\,\rangle < \frac{1}{\varepsilon}\langle\,\lambda, a\,\rangle. \quad \square$$

命題 2.3 の証明. $C := \Omega \cap (a - \Omega)$ とおくと，C は空でない有界開集合である．そして，$G(\Omega)_a$ は C を不変にする．そこで，$x_0 \in C$ を固定し，$r_0 > 0,\ R_0 > 0$ をとって，$\overline{B(x_0, r_0)} \subset C \subset B(0, R_0)$ としておくと

$$G(\Omega)_a\bigl(\overline{B(x_0, r_0)}\bigr) \subset B(0, R_0).$$

任意に $g \in G(\Omega)_a$ をとる．任意の $x \in V$ $(\|x\| \leqq 1)$ に対して，$x_0 + r_0 x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ であるから，$\|gx_0 + r_0 gx\| \leqq R_0$．そして $\|gx_0\| \leqq R_0$ でもあるから

$$r_0\|gx\| \leqq \|r_0 gx + gx_0\| + \|gx_0\| \leqq R_0 + R_0 = 2R_0.$$

よって，$\|gx\| \leqq 2r_0^{-1}R_0$ となるので，$\|g\| \leqq 2r_0^{-1}R_0$. これは $G(\Omega)_a$ が有界集合であることを示している．閉集合であることは明らか． □

例 2.4 (Lorentz 錐). $n \geqq 2$ とする．

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_1 > 0\}.$$

明らかに Ω は開凸錐で，Ω を **Lorentz 錐**（光錐とも呼ばれる）という．

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [x, y] := {}^t x J y \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

とおくと，$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ [x, x] > 0,\ x_1 > 0\}$ と書ける．

$$O(1, n-1) := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \ ;\ [gx, gy] = [x, y]\ (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\}$$

を考える．明らかに，$O(1, n-1) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \ ;\ {}^t g J g = J\}$ でもある．

補題 2.5. ${}^t g J g = J \iff g J {}^t g = J$.

証明. $J^2 = I$ より，${}^t g J g = J \implies {}^t g J g J = I$．ゆえに，${}^t g J = (gJ)^{-1}$．よって，$g J {}^t g J = I$，両辺に右から J をかけて，$g J {}^t g = J$．逆向きも同様． □

$O(1, n-1)$ は連結成分を 4 個持つ．例えば，山内恭彦・杉浦光夫 [16] や平井武 [2, II, 15 章] 参照．単位元の連結成分を $SO_0(1, n-1)$ とすると（再び上述の書物を参照）

$$SO_0(1, n-1) = \{g \in O(1, n-1) \ ;\ \det g = 1,\ g_{11} > 1\}.$$

補題 2.6. $SO_0(1, n-1) \subset G(\Omega)$.

証明. $g \in SO_0(1,n-1)$ とする．補題 2.5 より，$gJ^tg = J$ である．両辺の $(1,1)$ 成分を比べると $g_{11}^2 - \sum_{k=2}^n g_{1k}^2 = 1$．さて $x \in \Omega$ とする．gx の第 1 成分 $(gx)_1$ は

$$(gx)_1 = \sum_{k=1}^n g_{1k}x_k = g_{11}x_1 + \sum_{k=2}^n g_{1k}x_k$$

であるが，Schwarz の不等式から

$$\left|\sum_{k=2}^n g_{1k}x_k\right| \leqq \left(\sum_{k=2}^n g_{1k}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=2}^n x_k^2\right)^{1/2} < \sqrt{g_{11}^2 - 1}\cdot x_1 < g_{11}x_1$$

がわかるので，$(gx)_1 > 0$ である．ゆえに $g(\Omega) \subset \Omega$．そして g^{-1} を考えれば，$g(\Omega) = \Omega$ を得るので，$g \in G(\Omega)$ である． □

$G := \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(1,n-1)$ とおく．ただし，$\mathbb{R}_{>0}$ は正数倍という演算で Ω に働くものとする．明らかに $G \subset G(\Omega)$．次の行列 u, h_t は，いずれも $SO_0(1,n-1)$ に属する：

$$u := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{u} \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，}\widetilde{u} \in SO(n-1,\mathbb{R}))\,,$$

$$h_t := \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，}t \in \mathbb{R})\,.$$

(1) G は Ω に推移的に働く．

証明. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega$ を考えて，任意に $x \in \Omega$ が与えられたとき，$g \in G$ を見つけて，$x = ge_1$ とできればよい．まず，$[x,x] > 0$ であるから，$\lambda := \sqrt{[x,x]}$ とおくと，$x = \lambda y$ with $[y,y] = 1$ である．次に，$r := \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ とおくと，$\widetilde{u} \in SO(n-1,\mathbb{R})$ を見つけてきて，

$$\widetilde{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

とできる．$y_1^2 - r^2 = [y,y] = 1$，$y_1 > 0$ より，$\exists t \geqq 0$ s.t. $y_1 = \cosh t,\ r = \sinh t$．このとき，$x = \lambda u h_t e_1$ となっている． □

(2) $\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ とみなすとき，

$$\Omega^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n\,;\, \langle\, y \,|\, x\,\rangle > 0 \ \text{ for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}$$

となるが，実は $\Omega^* = \Omega$ である．

証明. （ア）$\Omega \subset \Omega^*$ であること： $y \in \Omega$ とする．任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}\langle y \,|\, x \rangle &= y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n \\ &\geqq y_1x_1 - \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ &> 0.\end{aligned}$$

補題 1.5 より，$y \in \overline{\Omega^*}$．ゆえに $\Omega \subset \overline{\Omega^*}$，よって，$\Omega \subset \mathrm{Int}(\overline{\Omega^*}) = \Omega^*$．

（イ）$\Omega^* \subset \Omega$ であること： $y \in \Omega^*$ とする．$y_2 = \cdots = y_n = 0$ であるとき，$y_1 = \langle y \,|\, e_1 \rangle > 0$ より，$y \in \Omega$ となって OK．従って，$y_2, \ldots, y_n$ に 0 でないものがあるとする．

$$x_1 := \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}, \quad x_j := -y_j \ \ (j = 2, \ldots, n)$$

とおいて，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を考えると，$x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$．ゆえに

$$0 < \langle y \,|\, x \rangle = y_1\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2} - (y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

これより，$y_1 > \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ が出るので，$y \in \Omega$ である． □

注意 2.7. 一般に正則開凸錐 $\Omega \subset V$ が，V の適当な内積によって $V^* = V$ とみるときに $\Omega^* = \Omega$ となるならば，Ω は自己双対であるという．Lorentz 錐は自己双対である．

例 **2.8.** <u>正定値実対称行列のなす開凸錐</u>

$V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$：$n$ 次実対称行列のなすベクトル空間.

$\Omega := \{x \in V \,;\, x \gg 0\}$．すなわち，$\Omega$ は正定値実対称行列のなす開凸錐.

ここで，$x \in V$ について，($\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積)

$$x \in \Omega \iff x \text{ の固有値はすべて正} \iff \langle x\xi \,|\, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0 \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

各 $g \in GL(n, \mathbb{R})$ に対して，$\rho(g)x = gx{}^tg \ (x \in V)$ とおく．明らかに $\rho(g) \in G(\Omega)$.

(1) Ω は等質である.

証明. 任意の $x \in V$ が，適当な $g \in GL(n, \mathbb{R})$ を用いて，$x = g{}^tg = \rho(g)I_n$（I_n は n 次単位行列）と書ければよい．2 次形式

$$Q_x(\xi) := \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}\xi_i\xi_j = \langle x\xi \,|\, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

を考える．これを ξ_1 の 2 次式と見て書き直すと

$$Q_x(\xi) = x_{11}\xi_1^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_{1j}\xi_j\xi_1 + Q'(\xi').$$

ただし $Q'(\xi')$ は $\xi' := {}^t(\xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ の 2 次形式．$x_{11} = \langle\, xe_1 \,|\, e_1 \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ であるから，

$$Q_x(\xi) = \left(\sqrt{x_1}\xi_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}\xi_j\right)^2 + Q_1'(\xi').$$

$Q_1'(\xi')$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の正定値の 2 次形式になる．Q_1' の行列を y とすると，これは x が次のように書かれることを意味する：

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\beta \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

ただし，$\alpha := \sqrt{x_{11}}$, $\beta_j := \dfrac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}$ $(j = 2, \ldots, n)$ である．n に関する帰納法で，下三角行列 $T \in GL(n, \mathbb{R})$ を見つけてこれて，$x = T\,{}^tT = \rho(T)I_n$ となることがわかる． □

(2) V に内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ を入れることで $V^* = V$ と見なすとき，$\Omega^* = \Omega$ である．すなわち，$\Omega^* = \{y \in V\ ;\ \mathrm{tr}(xy) > 0\ \ (\text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$ とするとき，$\Omega^* = \Omega$ となる．従って Ω は自己双対である．

証明． $y \in \Omega^*$ とする．任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して，$x = \xi{}^t\xi$ とおくと，容易に $\langle\, x\eta \,|\, \eta \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle\, \xi \,|\, \eta \,\rangle_{\mathbb{R}^n}^2$ がわかるから，$x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$．ゆえに

$$0 < \langle\, y \,|\, x \,\rangle = \mathrm{tr}(y\xi{}^t\xi) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\xi_j\xi_i = \langle\, y\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

これは $y \in \Omega$ を意味するので，$\Omega^* \subset \Omega$ が示せた．

逆に $x \in \Omega$ とする．(1) により $x = g{}^tg$ $(g \in GL(n, \mathbb{R}))$ と表す．このとき，任意の $y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(g{}^tgy) = \mathrm{tr}({}^tgyg).$$

${}^tgyg \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから，固有値はすべて非負であり，そのすべてが 0 というわけではない．ゆえに $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}({}^tgyg) > 0$．これは $x \in \Omega^*$ を意味する． □

§3．開凸錐の特性函数

V：有限次元実ノルム空間，　Ω：V の正則開凸錐，　$\Omega^* \neq \varnothing$：$\Omega$ の双対凸錐 $\subset V^*$.

定義. $x \in \Omega$ に対して

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \, d\lambda.$$

ただし $d\lambda$ は有限次元ベクトル空間 V^* 上の Lebesgue 測度とする．Ω 上の函数 ϕ を Ω の特性函数と呼ぶ.

注意 3.1. 有限次元実ベクトル空間 W は，基底を固定するごとに $\mathbb{R}^{\dim W}$ と同一視されるので，$\mathbb{R}^{\dim W}$ 上の Lebesgue 測度で以て，W 上の Lebegue 測度ということにする．基底を取り替えて新たにそれにより W を $\mathbb{R}^{\dim W}$ と同一視しても W 上の Lebesgue 測度が得られるが，それは基底の取り替えが引き起こす $\mathbb{R}^{\dim W}$ 上の線型変換の行列式の絶対値だけ（あるいはその逆数）しか違わない.

命題 3.2. $\phi(x)$ を定義する積分は，x が Ω のコンパクト集合にとどまるとき，一様に絶対収束する．さらに ϕ は C^∞ であって，

$$\phi(gx) = |\det g|^{-1} \phi(x) \qquad (x \in \Omega,\ g \in G(\Omega))$$

をみたす．従って，$\phi(x)\,dx$（dx は V 上の Lebesgue 測度）は $G(\Omega)$ 不変測度になっている：$\phi(gx)\,d(gx) = \phi(x)\,dx$.

証明. K：Ω のコンパクト部分集合.

$$\varepsilon := \min\{\langle \lambda, x \rangle \,;\, x \in K,\ \lambda \in \overline{\Omega^*},\ \|\lambda\| = 1\} > 0.$$

そうすると，$x \in K, \lambda \in \Omega^*$ のとき，$\langle \lambda, x \rangle \geqq \varepsilon\|\lambda\|$．ゆえに $0 < e^{-\langle \lambda, x \rangle} \leqq e^{-\varepsilon\|\lambda\|}$ となるから，積分は $x \in K$ に関して一様に絶対収束する．函数 ϕ が C^∞ であることもほぼ同様に示される（積分記号下の微分：詳細略）．そして $x \in \Omega, g \in G(\Omega)$ のとき

$$\begin{aligned}
\phi(gx) &= \int_{\Omega^*} e^{-\langle \lambda, gx \rangle} \, d\lambda = \int_{\Omega^*} e^{-\langle g^*\lambda, x \rangle} \, d\lambda \\
&= \int_{\Omega^*} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \, |\det g^*|^{-1} \, d\lambda \\
&= |\det g|^{-1} \, \phi(x). \quad \square
\end{aligned}$$

例 3.3. Ω を例 2.4 で扱った Lorentz 錐とする：そこでの記号をそのまま使って，

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, [x, x] > 0,\ x_1 > 0\}.$$

$\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を用いて，Ω の特性函数 ϕ を定義する．Ω が自己双対であることにも注意すると

$$\phi(x) = \int_{\Omega} e^{-\langle y \,|\, x \rangle} \, dy \qquad (x \in \Omega). \tag{3.1}$$

例 2.4 より，$x \in \Omega$ は $x = \lambda u h_t e_1$ ($\lambda := \sqrt{[x,x]}$) と表され，$\det u = 1$, $\det h_t = 1$ であるから，

$$\phi(x) = |\det \lambda I|^{-1}\phi(e_1) = [x,x]^{-n/2}\phi(e_1) = \phi(e_1)(x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^{-n/2}.$$

例 3.4. 例 2.8 の Ω を考える：

$$\Omega := \{x \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\ ;\ x \gg 0\}.$$

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \mathrm{tr}(xy)$ を用いて，式 3.1 の形で，Ω の特性函数 ϕ を定義する．任意の $x \in \Omega$ は $x = \rho(g)I_n = g\,{}^t g$ ($g \in GL(n,\mathbb{R})$) となるのであるから，$\phi(x) = |\det \rho(g)|^{-1}\phi(I_n)$．さて $\det x = (\det g)^2$ であり，$|\det \rho(g)| = |\det g|^{n+1}$ である[4]から，$|\det \rho(g)| = (\det x)^{(n+1)/2}$ である．ゆえに $\phi(x) = \phi(I_n)(\det x)^{-(n+1)/2}$.

以下，滑らかな函数に対して，D_u ($u \in v$) は，その u 方向の微分を表す：

$$D_u f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tu)\Big|_{t=0}.$$

命題 3.5. 各 $x \in \Omega$ に対して，

$$\sigma_x(u,v) := D_u D_v \log \phi(x) \qquad (u, v \in V)$$

とおくとき，$(u,v) \mapsto \sigma_x(u,v)$ は正定値な対称双一次形式で，$G(\Omega)$ 不変になっている：$\sigma_{gx}(gu,gv) = \sigma_x(u,v)$ $(g \in G(\Omega))$.

証明. $\sigma_x(u,v)$ が対称な双一次形式であることは明らか．正定値であることを示そう．$v \in V$ のとき

$$D_v \log \phi(x) = \frac{D_v \phi(x)}{\phi(x)} = -\frac{1}{\phi(x)} \int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle} \langle\, \lambda, v \,\rangle\, d\lambda.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
D_v^2 \log \phi(x) &= -\frac{1}{\phi(x)^2}\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle}\langle\, \lambda, v \,\rangle\, d\lambda\right)^2 + \frac{1}{\phi(x)}\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle}\langle\, \lambda, v \,\rangle^2\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\phi(x)^2}\left\{\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle}\, d\lambda\right)\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle}\langle\, \lambda, v \,\rangle^2\, d\lambda\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x \,\rangle}\langle\, \lambda, v \,\rangle\, d\lambda\right)^2\right\} \\
&\geqq 0 \qquad \text{(Schwarz の不等式による)}.
\end{aligned}$$

[4]たとえば，$g = u_1 d u_2$ with $u_j \in O(n,\mathbb{R})$, $d = \mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]$ としてみよ．補遺参照

ここで $v \neq 0$ のとき，2 個の函数 $\lambda \mapsto e^{-\langle \lambda, x \rangle/2}$ と $\lambda \mapsto e^{-\langle \lambda, x \rangle/2}\langle \lambda, v \rangle$ とは比例しない．従って Schwarz の不等式で等号が成立しない．よって

$$\sigma_x(v, v) = D_v^2 \log \phi(x) > 0 \quad \text{if } v \neq 0.$$

さて $g \in G(\Omega)$ は線型に作用しているから，f が滑らかな函数であるとき，$(D_{gv}f) \circ g = D_v(f \circ g)$．従って $(D_{gu}D_{gv}f) \circ g = D_u D_v(f \circ g)$．ゆえに

$$\begin{aligned} \sigma_{gx}(gu, gv) &= (D_{gu}D_{gv} \log \phi)(gx) = D_u D_v((\log \phi) \circ g)(x) \\ &= D_u D_v \log \phi(x) \qquad (\because \phi(gx) = |\det g|^{-1}\phi(x)) \\ &= \sigma_x(u, v). \quad \square \end{aligned}$$

命題3.5 より，$\Omega \ni x \mapsto \sigma_x$ は Ω に Riemann metric を与え，これにより Ω が Riemann 多様体になる．Ω の等長写像とは，微分同相 $h : \Omega \to \Omega$ で，

$$\sigma_{h(x)}(D_u h(x), D_v h(x)) = \sigma_x(u, v) \qquad (u, v \in V)$$

をみたすものをいう．各 $g \in G(\Omega)$ は Ω に線型に作用していて，$D_u g(x) = gu \ (\forall x \in \Omega)$ となるので，命題 3.5 の最後の主張から，Ω の等長写像になっている．

補遺：$u \in O(n, \mathbb{R})$ のとき，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ 上の線型変換 $\rho(u) = ux{}^t u$ は直交変換である：

$$\langle \rho(u)x \,|\, \rho(u)y \rangle = \mathrm{tr}\big((ux{}^t u)(uy{}^t u)\big) = \mathrm{tr}(uxy{}^t u) = \mathrm{tr}(xy) = \langle x \,|\, y \rangle.$$

さらに d が対角行列 $\mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_n]$ なら，$\rho(d)x = dxd$ の (i, j) 成分は $d_i d_j x_{ij}$ である．ゆえに，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ の標準的な基底 E_{ii}, $E_{ij} + E_{ji}$ $(i < j)$ （E_{ij} は行列単位：(i, j) 成分のみ 1 で他は 0 である行列）に関する線型変換 $\rho(d)$ の表現行列は「対角行列」であって，どの d_i も $(n + 1)$ 個現れる．ゆえに

$$\det \rho(d) = (d_1 \cdots d_n)^{n+1} = (\det d)^{n+1}.$$

従って，脚注 4 のように $g = u_1 d u_2$ と表されていれば，$g \mapsto \rho(g)$ が群準同型になっていることに注意すると

$$\begin{aligned} |\det \rho(g)| &= |\det \rho(u_1) \det \rho(d) \det \rho(u_2)| \\ &= |\det \rho(d)| = |\det d\,|^{n+1} \\ &= |\det g|^{n+1}. \end{aligned}$$

§4. 対称錐と Jordan 代数

以下 V は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間．
Ω は V の開凸錐で，等質であるとする．
さらに，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関して Ω は自己双対であると仮定する．すなわち

$$\Omega = \bigl\{y \in V\ ;\ \langle\, y \,|\, x \,\rangle > 0 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\bigr\} \tag{4.1}$$

が成り立っているとする．等質な自己双対開凸錐を対称錐と呼ぶ．
$G(\Omega)$ の単位元の連結成分を G とする：$G := G(\Omega)^{\circ}$．
G は $G(\Omega)$ の開かつ閉な正規部分群である．
（位相群・リー群の基本事項は．村上信吾 [6] 等参照．）

問 2. G 自身 Ω に推移的に作用していることを示せ．
概要： $\Omega = \bigsqcup Ga$ というように，Ω を G 軌道の disjoint union に表す．各 $a \in \Omega$ について，$G(\Omega)/G(\Omega)_a \approx \Omega$ (diffeo) より，$\Phi_a : G(\Omega) \ni g \mapsto ga \in \Omega$ は開写像なので，$Ga = \Phi_a(G)$ は開集合．そして Ω は連結ゆえ，先の disjoint union は 1 個の G 軌道だけ．

内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する作用素の転置を $T \mapsto {}^tT$ で表す：$\langle\, {}^tTx \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, Ty \,\rangle$．
Ω は自己双対であると仮定しているので，${}^tG(\Omega) = G(\Omega)$．従ってまた，${}^tG = G$．
$\theta(g) := {}^tg^{-1}$ とおくと，$\theta \in \mathrm{Aut}(G(\Omega))$．以下

$$K := \{g \in G\ ;\ \theta(g) = g\} = G \cap O(V).$$

ここで $O(V)$ は，今取り扱っている内積に関する V の直交群である．明らかに K は G のコンパクト部分群になっている．

定理 4.1. 元 $c \in \Omega$ が存在して，$K = G_c := \{g \in G\ ;\ gc = c\}$ となる．そして，K は G の極大なコンパクト部分群であり，連結である．

証明. L：K を含む G のコンパクト部分群．そして $x_0 \in \Omega$ を固定する．
L の正規化された Haar 測度[5]を dl で表して

$$c := \int_L l x_0 \, dl$$

[5]一般に，局所コンパクト位相群上に，正数倍を除いて一意に存在する左不変測度：$d(x_0 x) = dx$．コンパクト群だと，左不変 Haar 測度は右不変でもある．そしてコンパクト群の Haar 測度による全体積は有限値で，普通は全体積が 1 であるというように正規化する．

とおく．まず任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して，(4.1) より

$$\langle\, c \,|\, x \,\rangle = \int_L \langle\, lx_0 \,|\, x \,\rangle \, dl > 0.$$

再び (4.1) より $c \in \Omega$．さらに任意の $l' \in L$ に対して，

$$l'c = \int_L l'lx_0 \, dl = \int_L lx_0 \, dl = c$$

となるから，$L \subset G_c$ である．ここで，$G/G_c \approx \Omega$ (diffeo) であり，Ω は単連結である（Ω が凸集合であることより出る）から，G_c は連結[6]である．

$\mathfrak{g}_c := \mathrm{Lie}(G_c)$，$\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$：それぞれ G_c, K の Lie 代数[7]．

さて，$\mathfrak{g}_c \subset \mathfrak{k}$ がわかると，$G_c \subset K^\circ \subset K$ がわかって（K° は K の単位元の連結成分），先の $(K \subset)L \subset G_c$ と合わせると，$G_c = K = K^\circ = L$ となって，定理の証明が終わる．

θ を G の単位元 e において微分して得られる $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ の自己同型も（伝統に従って $d_e\theta$ と書かずに）θ で表すと，$\theta X = -{}^tX$．明らかに θ の固有値は ± 1 のみで，K の定義より $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \,;\, \theta X = X\}$ であり，

$$\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \,;\, \theta X = -X\}$$

とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ である（θ の固有空間分解）．

さて，$X \in \mathfrak{g}_c$ とし，$X = U + Z$ ($U \in \mathfrak{k}$, $Z \in \mathfrak{p}$) と表す．ここで $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_c$ であるから，$Z = X - U \in \mathfrak{g}_c$．ゆえに $\exp tZ \in G_c$ ($\forall t \in \mathbb{R}$)．命題2.2 より G_c はコンパクトゆえ，$\exists C > 0$ s.t. $\|\exp tZ\| \leqq C$ ($\forall t \in \mathbb{R}$)．一方 $Z \in \mathfrak{p}$ なので，${}^tZ = Z$．従って，Z の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ はすべて実数．さらに V の適当な正規直交基底をとると，線型作用素 Z は対角行列 $\mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_j]$ で表されるので，$\|\exp tZ\| = \max_{k=1,\ldots,j} e^{t\lambda_k}$．これが $t \in \mathbb{R}$ に無関係な定数で押さえられるので，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_j = 0$ となって，$Z = 0$ である．よって $X = U \in \mathfrak{k}$ となって証明が終わる． □

点 $c \in \Omega$ を定理4.1 のようにとって $K = G_c$ としておき，軌道写像 $\alpha : G \ni g \mapsto gc \in \Omega$ を考える．G の単位元 e における微分 $d\alpha_e$ は，$d_e\alpha(X) = \dfrac{d}{dt}(\exp tX)c\Big|_{t=0} = Xc$ ($X \in \mathfrak{g}$)．ここで $G/K \approx \Omega$ (diffeo) であるから，$d_e\alpha$ は線型同型 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_c(\Omega)\ (\equiv V)$ を導く．一方 $K = G_c$ となっているので，$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \,;\, Xc = 0\}$ である．さらに $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ であるので，$d_e\alpha$ を $\mathfrak{p}$ に制限することにより，線型同型 $\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} V$ を得る．こ

[6] ホモトピー完全系列 $\cdots \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to \pi_0(H) \to \pi_0(G) \to \pi_0(G/H) \to 1$ による（H は閉部分群）．例えば，横田一郎 [17, 命題 173] 参照．

[7] 線型 Lie 群の Lie 代数については，山内恭彦・杉浦光夫 [16, III 章] 参照．先の村上信吾 [6, 4.5 節例題 2] が，一般論での Lie 群・Lie 代数の関係の理解への橋渡しになろう．

れの逆写像を L とする．すなわち，各 $x \in V$ に対して，$L(x) \in \mathfrak{p}$ は $L(x)c = x$ をみたす一意的に定まる元である．

定義． $xy := L(x)y$ によって，V に双線型な積を定義する．ここで結合法則の成立は要求していない[8]．

定理 4.2． 上の定義における積 $xy = L(x)y$ によって V は Euclid 型の Jordan 代数になっていて，c は単位元であり，$\overline{\Omega} = \{x^2 \ ; \ x \in V\}$ となっている．従って，$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2 \ ; \ x \in V\}$ である．

定義． A：双線型な積 $(x, y) \mapsto xy$ を持つ実または複素ベクトル空間．
A が **Jordan** 代数であるとは，任意の $x, y \in V$ に対して，次の (1),(2) がみたされることである：
(1) $xy = yx$,
(2) $x(x^2y) = x^2(xy)$.

注意 4.3． (1) のもとで (2) は $x(yx^2) = (xy)x^2$ と書かれるから，(2) は特別な 3 元 x, y, x^2 に対しては積が結合的であることを意味している．

定義． A：Jordan 代数．
A が **Euclid** 型 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ A に結合的な内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ が存在する，すなわち

$$\langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, yz \,\rangle \quad (\forall x, y, z \in A). \tag{4.2}$$

注意 4.4． 元 y をかける作用素を $L(y)$ で表す．つまり $L(y)x = yx$ とすると，(4.2) は，$\langle\, L(y)x \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, L(y)z \,\rangle$ と書き直せるので，結合的内積とは，かけ算作用素がつねに自己共役となる内積のことである．

定理 4.2 の証明． (1) $xy = xy$ $(\forall x, y \in V)$ である．
$\because$ $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(V) := \mathcal{L}(V)$ の部分 Lie 代数である．すなわち，$\mathfrak{gl}(V)$ は，$[X, Y] := XY - XY$ で Lie 代数[9]をなしていて，「$X, Y \in \mathfrak{g} \implies [X, Y] \in \mathfrak{g}$」をみたしている．
θ は $\mathfrak{g}$ の自己同型であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ において，$\mathfrak{k}$（resp. $\mathfrak{p}$）は $+1$（resp. -1）固有空間であるから，次の関係が成り立つ：

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

[8]つまり，双線型写像 $V \times V \to V$ が与えられただけで，V に積が定義されたと言うのである．
[9](1) $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ は双線型，(2) $[Y, X] = -[X, Y]$, (3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, X, Y]] = 0$. (3) を Jacobi 恒等式という．

さて，$x,y\in V$ とする．$L(x),L(y)\in\mathfrak{p}$ より，$[L(x),L(y)]\in\mathfrak{k}=\mathfrak{g}_c$．ゆえに

$$\begin{aligned}0&=[L(x),L(y)]c=L(x)L(y)c-L(y)L(x)c\\&=L(x)y-L(y)x=xy-yx.\end{aligned}$$

ゆえに $xy=yx$ である．//

(2) c は単位元である．

$\because$ $cx=xc=L(x)c=x$．//

(3) 内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は結合的である．

$\because$ 任意の $x\in V$ に対して，$L(x)\in\mathfrak{p}$ より，${}^tL(x)=L(x)$．//

(4) $x^2(yx)=(x^2y)x$ $(\forall x,y\in V)$ である．

$\because$ 結合子 (associator)$[x,y,z]$ を導入しておこう：

$$[x,y,z]:=x(yz)-(xy)z.$$

積が可換であることに注意すると，$[x,y,z]=[L(x),L(z)]y$ と書ける．証明すべきは，$[x^2,y,x]=0$ である．まず次のことに注意：

$$[z,y,x]=-[x,y,z] \tag{4.3}$$

さて，$[[L(x),L(y)],L(z)]\in[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$ であって

$$\begin{aligned}[[L(x),L(y)],L(z)]c&=[L(x),L(y)]z-L(z)[L(x),L(y)]c\\&=[x,z,y]\qquad(\because\ [L(x),L(y)]c=0).\end{aligned}$$

ゆえに $[[L(x),L(y)],L(z)]=L([x,z,y])$．この作用素等式を元 z に作用させると

$$[L(x),L(y)]z^2-L(z)[L(x),L(y)]z=[x,z,y]z.$$

これの左辺は，$[x,z^2,y]-L(z)[x,z,y]$ に等しいから，結局次式を得る：

$$[x,z^2,y]=2[x,z,y]z. \tag{4.4}$$

$[x^2,y,x]=0$ を示すために，$\forall z\in V$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\,[x^2,y,x]\,|\,z\,\rangle&=\langle\,x^2(yx)\,|\,z\,\rangle-\langle\,(x^2y)x\,|\,z\,\rangle\\&=\langle\,x^2\,|\,(xy)z-y(xz)\,\rangle\\&=\langle\,x^2\,|\,[z,x,y]\,\rangle.\end{aligned} \tag{4.5}$$

一方，別の仕方で変形をすると

$$\begin{aligned}\langle\, [x^2,y,x] \,|\, z \,\rangle &= \langle\, x \,|\, y(x^2z)-(x^2y)z \,\rangle \\ &= \langle\, x \,|\, [y,x^2,z] \,\rangle \\ &\overset{(4.4)}{=} 2\,\langle\, x \,|\, [y,x,z]x \,\rangle \\ &\overset{(4.3)}{=} -2\,\langle\, x^2 \,|\, [z,x,y] \,\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに $\langle\, x^2 \,|\, [z,x,y] \,\rangle = -2\,\langle\, x^2 \,|\, [z,x,y] \,\rangle$．これは $\langle\, x^2 \,|\, [z,x,y] \,\rangle = 0$ を意味する．そうすると (4.5) より，$\langle\, [x^2,y,x] \,|\, z \,\rangle = 0$ となり，$z \in V$ は任意だから，$[x^2,y,x]=0$ である．//

以上で，V は Euclid 型の Jordan 代数であることが示せた．//

(5) $\Omega_0 := \mathrm{Int}\{x^2\,;\,x \in V\}$ とおく．

Ω_0 が自己双対な開凸錐であって，$\Omega_0 = (\exp\mathfrak{p})c = \{(\exp L(x))c\,;\,x \in V\}$ となることをここでは認めて議論を続けよう（定理 5.6 参照）．

そうすると，明らかに $\Omega_0 \subset Gc = \Omega$．両辺の双対錐を考えて，$\Omega_0 \supset \Omega$ ともなるから，結局 $\Omega_0 = \Omega$ である． □

例 4.5. $V = \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$，$\Omega = \{x \in V\,;\,x \gg 0\}$．

$GL(n,\mathbb{R})$ は，$\rho(g)x := gx{}^tg$ で作用．つまり，準同型 $\rho : GL(n,\mathbb{R}) \to G(\Omega)$ を考えていることになる[10]．先の記号に合わせて，単位行列を Ω の元と見るとき c と書き，$GL(n,\mathbb{R})$ の元と見るとき e と書くことにする．そうすると，$d_e\rho(Y)x = Yx + x{}^tY$ である．

$$d_e\rho(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) = d_e\rho(\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})) + d_e\rho(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$$

であるから，軌道写像 $\alpha(\rho(g)) = \rho(g)c = g{}^tg$ の $g=e$ における微分 $d\alpha_{\rho(e)}(d_e\rho(X)) = X + {}^tX$ は線型同型 $d_e\rho(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} V : d_e\rho(X) \mapsto 2X$ を導く．これの逆写像を L とするのであるから，$L(x) = \frac{1}{2}d_e\rho(x)$．すなわち，$L(x)y = \frac{1}{2}(xy+yx)$ となる[11]．従って 2 乗に関しては，Jordan 積も通常の行列の積も同じ．ゆえに

$$\{x^2\,;\,x \in V\} = \{y \in V\,;\,y \text{ は半正定値}\} = \overline{\Omega}.$$

逆に $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ は積 $\frac{1}{2}(xy+yx)$ によって Jordan 代数であり，内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ は結合的である：$\langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, y \,|\, zx \,\rangle$ に注意．

---

[10] 実は $G(\Omega)^\circ = \rho(GL(n,\mathbb{R})^+)$．

[11] 一般に結合的代数（結合法則が成り立つ代数）から，$x \circ y := \frac{1}{2}(xy+yx)$ で新たに積を導入すると，それは Jordan 代数になる．

例 4.6. $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_1 > 0\}$（Lorentz 錐）.
この場合，$G(\Omega)^\circ = \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(1, n-1)$ となる（詳細略）．以下この右辺を G（例 2.4 での記号と同じ）とする．$\mathfrak{g} = \mathbb{R}I + \mathfrak{o}(1, n-1)$[12]で,

$$\mathfrak{k} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{o}(n-1, \mathbb{R}) \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{p} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & {}^tY \\ Y & \alpha I_{n-1} \end{pmatrix}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R},\, Y \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{e_1}$ となっている．軌道写像 $\alpha : g \mapsto ge_1$ の $g = I_n$ における微分 $d_{I_n}\alpha$ は $d_{I_n}\alpha(X) = Xe_1 = {}^t(X_{11}, \ldots, X_{n1})$ となるので，$\mathfrak{p}$ に制限すると，線型同型 $\mathfrak{p} \ni \begin{pmatrix} \alpha & {}^tY \\ Y & \alpha I_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto {}^t(\alpha, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ を与える．ゆえに，$x = {}^t(x_1, x') \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_1 & {}^tx' \\ x' & x_1 I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

従って，$L(x)y = {}^t(x_1y_1 + x' \cdot y',\, x_1y' + y_1x')$.

逆に，W を有限次元実ベクトル空間，B を W 上の正定値対称双線型形式（内積）とし，$V := \mathbb{R}e \oplus W$（$e$ はシンボル）として，次式で V に積を入れる：

$$(\lambda e + w)(\lambda' e + w') = \bigl(\lambda\lambda' + B(w, w')\bigr)e + (\lambda w' + \lambda' w).$$

V に内積

$$\langle\, \lambda e + w \,|\, \lambda' e + w' \,\rangle := \lambda\lambda' + B(w, w')$$

を入れることにより，V は Euclid 型の Jordan 代数になる．実際 e は単位元であり，

$$\begin{aligned}(\lambda e + w)^2 &= \bigl(\lambda^2 + B(w, w)\bigr)e + 2\lambda w \\ &= 2\lambda(\lambda e + w) + \bigl(B(w, w) - \lambda^2\bigr)e\end{aligned}$$

より，$x = \lambda e + w$ に対して，$L(x)^2 = 2\lambda L(x) + (B(w, w) - \lambda^2)I$ となるから，$L(x)$ と $L(x^2)$ は可換である．積の可換性は明らかゆえ，V は Jordan 代数である．さらに

$$\langle\, (\lambda e + w)(\lambda' e + w') \,|\, \lambda'' e + w'' \,\rangle = \lambda\lambda'\lambda'' + \lambda'' B(w, w') + \lambda B(w', w'') + \lambda' B(w'', w)$$

から，内積の結合性も読み取れよう．

$y = (\lambda e + w)^2 = \mu e + v$ とおくと，$\mu = \lambda^2 + B(w, w)$，$v = 2\lambda w$ であるから

$$\begin{aligned}\mu^2 - B(v, v) &= \bigl(\lambda^2 + B(w, w)\bigr)^2 - 4\lambda^2 B(w, w) \\ &= \bigl(\lambda^2 - B(w, w)\bigr)^2 \\ &\geqq 0.\end{aligned}$$

[12]例 2.4 の記号をそのまま使うと，$\mathfrak{o}(1, n-1) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})\ ;\ {}^tXJ + JX = 0\}$ である．

ゆえに，$\{x^2\,;\,x\in V\}=\{y=\mu e+v\,;\,\mu \geqq \sqrt{B(v,v)}\}$.

§5. Euclid 型 Jordan 代数の対称錐

以下 V は Euclid 型 Jordan 代数で，結合的内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す.
V の単位元は，前節とは違って，e で表すことにする[13].
次の事実は本講義では証明はしない．Faraut-Korányi [1]，あるいは佐武一郎 [10, 付録 1] を参照.

事実. (1) Jordan 代数はべき結合的 (**power-associative**) である．すなわち，帰納的に $x^n := xx^{n-1}$ で x^n $(n=2,3,\dots)$ を定義するとき，指数法則 $x^{m+n}=x^mx^n$ が成立する．ゆえに，$e,x,x^2,\dots$ で生成される部分代数を $\mathbb{R}[x]$ で表すと，$\mathbb{R}[x]$ は結合法則が成立する代数 (associative algebra) で，もちろん可換である.
(2) $n=1,2,\dots$ について，$L(x^n)\in\langle L(x),L(x^2)\rangle$：$L(x)$ と $L(x^2)$ で生成される $\mathcal{L}(V)$ の可換な部分代数.（実はこれを (1) の証明に使う.）

定義. (1) $c\in V$ がべき等元 (**idempotent**) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $c^2=c$.
(2) 2 個のべき等元 c,d が直交する (**orthogonal**) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $cd=0$.
（このとき，$\langle c\,|\,d\rangle=\langle c\,|\,cd\rangle=0$ である．実は逆も言える（命題 5.4 参照）.）
(3) べき等元 $c_1,\dots,c_k$ が直交べき等元の完全系(**complete system** of orthogoal idempotents: CSOI) である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $c_i\neq 0$ $(\forall i)$，$c_ic_j=\delta_{ij}c_i$ $(\forall i,j)$，$c_1+\cdots+c_k=e$.

定理 5.1. $\forall x\in V$, $\exists 1\, c_1,\dots,c_k$：CSOI，$\exists 1\,\lambda_1<\cdots<\lambda_k$：実数 s.t.

$$x=\sum_{j=1}^{k}\lambda_jc_j \qquad (x\text{ のスペクトル分解}).$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_k$ を x の固有値という.

証明. 各 $y\in\mathbb{R}[x]$ に対して，$L_0(y):=L(y)\big|_{\mathbb{R}[x]}$ とおく．$L_0(y)$ は $\mathbb{R}[x]$ 上の自己共役作用素である.

$$L_0(x)=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_kP_k$$

を作用素 $L_0(x)$ のスペクトル分解とする．$P_1,\dots,P_k$ はそれぞれ，固有値 $\lambda_,\dots,\lambda_k$ の固有空間への射影作用素で，$\lambda_1<\cdots<\lambda_k$ とする.

$$L_0(x)^m=\lambda_1^mP_1+\cdots+\lambda_k^mP_k \qquad (m=0,1,\dots,k-1)$$

[13] ここでは単位元を持つと仮定して話を進めるが，実は単位元の存在を示すことができる.

となるから，Vandermonde 行列式 $(\neq 0)$ を用いて $P_1,\dots,P_k$ が解けて，$P_j = p_j(L_0(x))$ for some $p_j(t) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ となっている．そこで $c_j := p_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ とおくと

$$L_0(c_j) = L_0(p_j(x)) = p_j(L_0(x)) = P_j. \tag{5.1}$$

ゆえに

$$L_0(x) = \lambda_1 L_0(c_1) + \cdots + \lambda_k L_0(c_k) = L_0(\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k),$$
$$I = L_0(c_1) + \cdots + L_k(c_k) = L_0(c_1 + \cdots + c_k).$$

同様にまた

$$\begin{aligned} L_0(c_i c_j) &= L_0(p_i(x)p_j(x)) = p_i(L_0(x))p_j(L_0(x)) \\ &= P_i P_j = \delta_{ij} P_j = \delta_{ij} L_0(c_j). \end{aligned}$$

これらの作用素等式を単位元 e に作用させて

$$x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k, \qquad e = c_1 + \cdots + c_k, \qquad c_i c_j = \delta_{ij} c_j$$

を得る．$P_j \neq 0$ であるから，(5.1) より $c_j \neq 0$ である．

さらに $x = \sum \mu_j d_j$ も x のスペクトル分解であるとすると，再び Vandermonde 行列式を使って各 d_j が解けるので，$d_j \in \mathbb{R}[x]$ がわかる．このとき，$L_0(x) = \sum \mu_j L_0(d_j)$ であるが，作用素 $L_0(x)$ のスペクトル分解の一意性より，固有値，べき等元の一意性がわかる． □

命題 5.2. べき等元 c に対して，$L(c)$ の固有値は高々 $0, \frac{1}{2}, 1$ である．

証明は Faraut-Korányi [1]，または佐武一郎 [10] 参照（難しくはない）．
作用素 $L(c)$ の j 固有空間を $V_j(c)$ $(j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ で表して得られる V の直交直和分解 $V = V_0(c) \oplus V_{1/2}(c) \oplus V_1(c)$ を，べき等元 c に関する V の **Peirce** 分解と呼ぶ．

例 5.3. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ with $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.
典型的なべき等元は，I_k を k 次の単位行列とするときの

$$c = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

であり，それに関する V の Peirce 空間 $V_j(c)$ はそれぞれ

$$V_0(c) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right), \qquad V_{1/2}(c) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array}\right), \qquad V_1(c) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

命題 5.4. べき等元 c, d に対して，$cd = 0 \iff \langle\, c \,|\, d \,\rangle = 0$.

証明. $\Longleftarrow$ のみ問題. d を c に関して Peirce 分解して，$d = d_0 + d_{1/2} + d_1$ $(d_j \in V_j(c))$ とする．このとき $cd = \frac{1}{2}d_{1/2} + d_1$ であるから

$$\langle\, c \,|\, d \,\rangle = \langle\, cd \,|\, d \,\rangle = \frac{1}{2}\|d_{1/2}\|^2 + \|d_1\|^2.$$

ゆえに $\langle\, c \,|\, d \,\rangle = 0$ ならば，$d_{1/2} = d_1 = 0$ となるので，$cd = 0$ である． $\square$

定義. $x \in V$ が可逆 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists y \in \mathbb{R}[x]$ s.t. $xy = e$.
この y は明らかに一意的で x^{-1} で表す．また可逆元の全体を $V^\times$ で表す.

注意 5.5. $y \in \mathbb{R}[x]$ という要請がなければ，$xy = e$ となる y の一意性は言えない. 実際，$\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ において $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるとき，$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) = I$ となる $y \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ は，$y = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix}$ （$b \in \mathbb{R}$ は任意）で与えられる．もちろん $y \in \mathbb{R}[x]$ となるのは $b = 0$ のときのみである.

定理 5.6. $Q := \{x^2\ ;\ x \in V\}$ とおき，$\Omega := \mathrm{Int}\, Q$ とすると，Ω は自己双対な開凸錐で，$V^\times$ の e を含む連結成分 $(V^\times)^\circ$ に一致する．さらに

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in V\ ;\ L(x) \text{ は正定値}\,\} \\ &= \{x \in V\ ;\ x \text{ の固有値はすべて正}\,\} \\ &= \{\exp x\ ;\ x \in V\}. \end{aligned}$$

ここで，$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}[x]$ であり，$\exp x = (\exp L(x))e$ でもある.

証明. (1) $Q = \{x \in V\ ;\ L(x) \text{ は半正定値}\,\}$ （$\Longrightarrow$ Q は閉集合）
$\qquad = \{x \in V\ ;\ x \text{ の固有値はすべて非負}\,\}$.
(a) $x \in Q$ とする．定義から $x = y^2$ for some $y \in V$．ここで $y = \sum \lambda_j c_j$ を y のスペクトル分解とすると，$x = y^2 = \sum \lambda_j^2 c_j$ が x のスペクトル分解となるので，x の固有値はすべて非負である.
(b) $x \in V$ の固有値はすべて非負であるとする．すなわち，x のスペクトル分解を $x = \sum \lambda_j c_j$ とするとき，$\lambda_j \geqq 0$ $(\forall j)$ と仮定する．命題 5.2 より，各 $L(c_j)$ は半正定値であるから，$L(x) = \sum \lambda_j L(c_j)$ も半正定値である：

$$\langle\, L(x)v \,|\, v \,\rangle = \sum \lambda_j \langle\, L(c_j)v \,|\, v \,\rangle \geqq 0.$$

(c) 作用素 $L(x)$ が半正定値であると仮定し，$x=\sum\lambda_j c_j$ を x のスペクトル分解とする．このとき，$\langle\, x \,|\, c_j \,\rangle = \lambda_j \|c_j\|^2$ であるから

$$\lambda_j = \frac{1}{\|c_j\|^2}\langle\, x \,|\, c_j \,\rangle = \frac{1}{\|c_j\|^2}\langle\, L(x)c_j \,|\, c_j \,\rangle \geqq 0. \tag{5.2}$$

そこで $y=\sum\sqrt{\lambda_j}\,c_j$ とおくと，$x=y^2$ となり，$x\in Q$ が示せた．

(2) $\Omega=\{x\in V\ ;\ L(x)$ は正定値$\,\}$ （$\Longrightarrow$ Ω は開凸錐であって，$\overline{\Omega}=Q$.）
　　$=\{x\in V\ ;\ x$ の固有値はすべて正$\,\}$.

(a) 各 $y\in V\setminus\{0\}$ に対して，線型形式 $l_y := \langle\,\cdot\,|\, y^2 \,\rangle$ を考える．$l_y(e)=\langle\, e \,|\, y^2 \,\rangle = \|y\|^2 \neq 0$ より，$l_y\neq 0$．ゆえに l_y は開写像である．一方 $x\in\Omega$ ならば，(1) より

$$l_y(x)=\langle\, x \,|\, y^2 \,\rangle = \langle\, L(x)y \,|\, y \,\rangle \geqq 0$$

であるから，$l_y(\Omega)\subset[0,\infty)$．ここで $l_y(\Omega)$ は開集合であるから，$l_y(\Omega)\subset(0,\infty)$．すなわち，$x\in\Omega$ ならば，$\langle\, L(x)y \,|\, y \,\rangle>0$ となり，$y\neq 0$ は任意であるから，作用素 $L(x)$ は正定値である．

(b) 作用素 $L(x)$ が正定値であると仮定し，$x=\sum\lambda_j c_j$ を x のスペクトル分解とする．(5.2) と同じ式変形をして，$\lambda_j>0$ $(\forall j)$ がわかる．

(c) $\{x\in V\ ;\ x$ の固有値はすべて正$\,\}$ は開集合で，Q に含まれる．ゆえに $\operatorname{Int}Q=\Omega$ にも含まれる．

(3) $\Omega=\exp V$ である．

なぜなら，$x=\sum\lambda_j c_j$ のとき，$\exp x=\sum e^{\lambda_j}c_j$ であるから．

(4) $\Omega=(V^\times)^\circ$ である．

$\because$ 明らかに,「$x\in V^\times \iff L_0(x)$ が可逆」であるから，$V^\times$ は開集合であり，

$$V^\times=\{x\in V\ ;\ x \text{ の固有値はすべて non-zero}\}.$$

そうするとただちに $\overline{\Omega}\cap V^\times=\Omega$ がわかり，これは Ω が $V^\times$ で閉じていることを示している．もともと Ω は開集合であるから，e の連結成分 $(V^\times)^\circ$ に一致する．

(5) $\Omega^*=\Omega$ である．

(a) $x\in\Omega$ とする．任意の $y\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}=Q\setminus\{0\}$ に対して，$y=z^2$ $(z\in V\setminus\{0\})$ と表すと

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, z^2 \,\rangle = \langle\, L(x)z \,|\, z \,\rangle > 0.$$

ゆえに $x\in\Omega^*$ である．

(b) $x\in\Omega^*$ とする．任意の $z\in V\setminus\{0\}$ に対して，$y=z^2$ とおくと，$y\in Q=\overline{\Omega}$，か

つ $\langle\, y \,|\, e \,\rangle = \|z\|^2 \neq 0$ より $y \neq 0$．そして

$$\langle\, L(x)z \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, z^2 \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0$$

となるので，$x \in \Omega$ である． □

§6. Riemann 対称空間としての対称錐

V：Euclid 型 Jordan 代数，e：V の単位元，$\langle \cdot | \cdot \rangle$：結合的内積．
$L(x)y := xy$ $(x, y \in V)$，$\Omega := \mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x \in V\}$．

定義． $P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2)$ $(x \in V)$．
quadratic operators (quadratic representation).

• 明らかに $P(x) \in \langle L(x), L(x^2) \rangle$ である．特に，§5 の最初に述べた事実より，$L(x^n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ と可換になる．

例 **6.1.** $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ with $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx) = L(x)y$.
この場合は

$$\begin{aligned} 2L(x)^2 y &= \tfrac{1}{2}(x^2 y + 2xyx + yx^2), \\ L(x^2)y &= \tfrac{1}{2}(x^2 y + yx^2) \end{aligned}$$

より，$P(x)y = xyx$．従ってまた，$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ である．
一般には $P(x \circ y) \neq P(x)P(y)$ であることも，この例から理解できよう．

命題 **6.2.** (1) $x \in V^{\times} \iff P(x)$：可逆．
このとき，$P(x)^{-1} = P(x^{-1})$，$P(x)x^{-1} = x$，$P(x)^{-1}x = x^{-1}$．
(2) 任意の $x, y \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} &P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x) \quad (\textbf{fundamental formula}), \\ &P(x^n) = P(x)^n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

注意を 2 つ述べるにとどめて，証明は Faraut-Korányi の §II.3 参照．

注意 **6.3.** $L(x)$ が可逆ならば $x \in V^{\times}$ であるが，逆は正しくない．
実際，$L(x)^{-1}$ が存在するなら，$L_0(x) := L(x)|_{\mathbb{R}[x]}$ も可逆で，$y := L_0(x)^{-1}e \in \mathbb{R}[x]$ とおくと，明らかに $xy = e$．

$x \in V^\times$ であるが，$L(x)$ が可逆でない例は，$V = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ with $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ において，$x = \mathrm{diag}[1, -1]$ を考えると，x 自身は可逆で，$x^{-1} = x$ であるが，

$$\mathrm{Ker}\, L(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \; ; \; b \in \mathbb{R} \right\}$$

となるので，作用素 $L(x)$ は可逆ではない．つまり，Jordan 代数は非結合的な代数なので，かけ算作用素が代数構造をうまく反映しているわけではない．

注意 6.4. 命題 6.2 の諸公式はすべて fundamental formula から導くことができる．実際，fundamental formula から，$P(P(x^n)y) = P(x^n)P(y)P(x^n)$．ここで，$y = e, x$ と置くことで

$$P(x^{2n}) = P(x^n)^2, \qquad P(x^{2n+1}) = P(x^n)P(x)P(x^n).$$

これより帰納法で容易に $P(x^n) = P(x)^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ を得る．次に $x \in V^\times$ ならば，$\mathbb{R}[x]$ での計算で $P(x)x^{-2} = e$．ゆえに

$$I = P(P(x)x^{-2}) = P(x)P(x^{-2})P(x).$$

これより $\det P(x) \neq 0$．逆に $P(x)$ が可逆なら，$y := P(x)^{-1}x \in \mathbb{R}[x]$ とおくと，

$$xy = L(x)P(x)^{-1}x = P(x)^{-1}x^2 = P(x)^{-1}P(x)e = e.$$

最後に $x \in V^\times$ なら $x = P(x)x^{-1}$ より

$$P(x) = P(P(x)x^{-1}) = P(x)P(x^{-1})P(x).$$

ゆえに $P(x^{-1}) = P(x)^{-1}$．

Fundamental formula 自身は，より一般な Jordan 3 重系で成り立つ（Satake [9, §6, Ecercise 1 and Remark] 参照）．

命題 6.5. (1) $x \in V^\times \implies P(x) \in G(\Omega)$．
(2) $P(\exp x) = \exp 2L(x)$．特に，$x \in \Omega \implies P(x) \in G := G(\Omega)^\circ$．

証明. (1) $x \in V^\times$ であるから，$P(x) \in GL(V)$ である，さて，$x, y \in V^\times$ のとき，$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ は可逆であるから，$P(x)y \in V^\times$．これより $P(x)(\Omega) \subset V^\times$．しかるに $P(x)(\Omega)$ は連結であり，$P(x)e = x^2 \in \Omega$ を含むので，$P(x)(\Omega) \subset \Omega$．よって $P(x)(\Omega) = \Omega$ となり，$P(x) \in G(\Omega)$ である．
(2) $F(t) = P(\exp tx)$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと，$\exp tx \in \mathbb{R}[x]$ より，$P(\exp tx) \in \langle L(x), L(x^2) \rangle$．

$s, t \in \mathbb{R}$ とすると，$\mathbb{R}[x]$ での計算であるから，$P(\exp \frac{t}{2}x)(\exp sx) = \exp(t+s)x$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} F(t+s) &= P(\exp(t+s)x) \\ &= P\big(P(\exp \tfrac{t}{2}x) \exp sx\big) \\ &= P(\exp \tfrac{t}{2}x)P(\exp sx)P(\exp \tfrac{t}{2}x) \\ &= F(\tfrac{t}{2})F(s)F(\tfrac{t}{2}) \\ &= F(\tfrac{t}{2})^2 F(s). \end{aligned}$$

ここで $s = 0$ とおくと，$F(0) = I$ より，$F(t) = F(\frac{t}{2})^2$ を得るので，$F(t+s) = F(t)F(s)$．そして

$$\begin{aligned} P(\exp tx) &= 2L(e + tx + O(t^2))^2 - L(\exp 2tx) \\ &= 2(I + tL(x) + O(t^2))^2 - (I + 2tL(x) + O(t^2)) \\ &= I + 2tL(x) + O(t^2) \end{aligned}$$

より，$F'(0) = 2L(x)$．ゆえに $F(t) = \exp 2tL(x)$． □

$G := G(\Omega)^\circ$（単位元の連結成分）で，$K := G \cap O(V)$ とおくと，$K = G_e = (G(\Omega)_e)^\circ$ であったことを思い出しておこう．

定理 6.6. $K = \mathrm{Aut}(V)^\circ$ であり，各 $g \in G$ は一意的に $g = P(x)k$ $(x \in \Omega,\ k \in K)$ と表される．

証明． (1) $K = \mathrm{Aut}(V)^\circ$ である．
$\because$ $k \in \mathrm{Aut}(V)$ ならば，スペクトル分解を考えて，$k(\Omega) \subset \Omega$．従って $k(\Omega) = \Omega$ が出るから $k \in G(\Omega)$．そして $ke = e$ ゆえ，$k \in G(\Omega)_e$．ゆえに $\mathrm{Aut}(V) \subset G(\Omega)_e$．単位元の連結成分を考えて，$\mathrm{Aut}(V)^\circ \subset K$．

逆に $k \in K$ として，$k \in \mathrm{Aut}(V)$ を示せば (1) の証明が終わる．簡単な補題を用意する．$k \in K = G_e$ より，$ke = e$ に注意．

補題 6.7. $Te = e$ をみたす $T \in GL(V)$ について，

$$T \in \mathrm{Aut}(V) \iff T^{-1}L(Tx)T = L(x)\ (\forall x).$$

証明． $T(xy) = (Tx)(Ty) \iff TL(x) = L(Tx)T.$ □

従って，$k^{-1}L(kx)k = L(x)$ を示せばよい．まず $k \in G_e$ より，$(k^{-1}L(kx)k)e = x$. 従って，$k^{-1}L(kx)k \in \mathfrak{p}$ ならばOK (Recall $\mathfrak{p} = \{L(y)\ ;\ y \in V\}$)．まず

$$\exp(k^{-1}L(kx)k) = k^{-1}(\exp L(kx))k \in G$$

より，$k^{-1}L(kx)k \in \mathfrak{g}$. そして，$k \in O(V)$ であり，$L(kx) \in \mathfrak{p}$ は自己共役なので，$k^{-1}L(kx)k$ も自己共役．よって $k^{-1}L(kx)k \in \mathfrak{p}$. //
(2) $g \in G$ とする．$ge \in \Omega$ であるから，スペクトル分解を考えれば，$x \in \Omega$ が存在して，$ge = x^2 = P(x)e$. ここで $k := P(x)^{-1}g$ とおくと，$k \in G_e = K$ であり，$g = P(x)k$ となる．作用素 $P(x)$ は正定値な自己共役作用素，k は直交作用素であるから，$g = P(x)k$ は作用素 g の極分解に他ならない．定理の主張にいう一意性はこれより出る．($x, y \in \Omega$ のとき，$P(x) = P(y) \implies x^2 = P(x)e = P(y)e = y^2 \implies x = y$.) $\square$

定理 6.8. (1) $\sigma_x(u,v) := \langle\, P(x)^{-1}u \,|\, v \,\rangle$ $(x \in \Omega,\, u, v \in V)$ は Ω に G 不変な Riemann 構造を定義する．
(2) $s_e : x \mapsto x^{-1}$ は e を固定点とする involutive な $(s_e^2 = \mathrm{Id})$ isometry である．
(3) $\theta(g)x = (gx^{-1})^{-1}$ $(g \in G,\, x \in \Omega)$. (Recall $\theta(g) = {}^t g^{-1}$.)

証明. (1) 明らかに各 $x \in \Omega$ について，σ_x は V 上の正定値な対称双線型形式である．G 不変性を示すために，定理 6.6 のように，$g \in G$ を $g = P(y)k$ $(y \in \Omega,\, k \in K)$ と表すと，命題6.2 の (2) と補題6.7 より

$$P(gx) = P(P(y)kx) = P(y)P(kx)P(y) = P(y)kP(x)k^{-1}P(y).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sigma_{gx}(gu, gv) &= \langle\, P(gx)^{-1}P(y)ku \,|\, P(y)kv \,\rangle \\ &= \langle\, P(y)^{-1}kP(x)^{-1}k^{-1}P(y)^{-1}P(y)ku \,|\, P(y)kv \,\rangle \\ &= \sigma_x(u,v).\end{aligned}$$

(2) $s_e^2 = \mathrm{Id}$ は明らかで，$s_e(x) = x$ から $x = e$ が出ることも，スペクトル分解を考えれば明らかであろう．$\sigma_{s_e(x)}(s_e'(x)u, s_e'(x)v) = \sigma_x(u,v)$ を示すために，次の補題が必要である．

補題 6.9. $D_u(x^{-1}) = -P(x)^{-1}u$ $(u \in V)$. 言い換えると，$s_e'(x) = -P(x)^{-1}$.

証明． 等式 $x = P(x)x^{-1}$ を u 方向に微分すると，

$$u = D_u(P(x)x^{-1}) = (D_uP(x))x^{-1} + P(x)D_u(x^{-1}). \tag{6.1}$$

ここで

$$D_uP(x) = \frac{d}{dt}P(x+tu)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(2L(x+tu)^2 - L((x+tu)^2)\big)\Big|_{t=0}.$$

$L(x+tu)^2 = L(x)^2 + tL(x)L(u) + tL(u)L(x) + t^2L(u)$，及び $L((x+tu)^2) = L(x^2) + 2tL(xu) + t^2L(u^2)$ より

$$D_uP(x) = 2\big(L(x)L(u) + L(u)L(x) - L(xu)\big).$$

よって

$$\begin{aligned}(D_uP(x))x^{-1} &= 2L(x)(ux^{-1}) + 2L(u)e - 2L(x^{-1})(xu)\\ &= 2L(x)L(x^{-1})u + 2u - 2L(x^{-1})L(x)u\\ &= 2u.\end{aligned}$$

最後の等号は，$x^{-1} \in \mathbb{R}[x]$ より，$L(x^{-1}) \in \langle L(x), L(x^2)\rangle$ となって，$L(x)$ と $L(x^{-1})$ が可換であることを用いている．以上と (6.1) より，$P(x)D_u(x^{-1}) = -u$ が出て，補題の証明が終わる． □

定理の証明を続けよう．今の補題と命題 6.2 の (1) より，

$$\begin{aligned}\sigma_{x^{-1}}(s'_e(x)u, s'_e(x)v) &= \langle\, P(x^{-1})^{-1}P(x)^{-1}u \,|\, P(x)^{-1}v \,\rangle\\ &= \langle\, P(x)^{-1}u \,|\, v \,\rangle = \sigma_x(u,v).\end{aligned}$$

(3) $g = P(y)k$ ($y \in \Omega$, $k \in K$) とおくと，命題 6.2 より

$$\begin{aligned}(gx)^{-1} &= (P(y)kx)^{-1} = P(P(y)kx)^{-1}P(y)kx\\ &= P(y)^{-1}P(kx)^{-1}P(y)^{-1}P(y)kx.\end{aligned}$$

補題 6.7 より $P(kx) = kP(x)k^{-1}$ であるから

$$(gx)^{-1} = P(y)^{-1}kP(x)^{-1}x = \theta(P(y)k)x^{-1} = \theta(g)x^{-1}.$$

以上で証明が完成する． □

定義． 一般に Riemann 多様体 X において，次の条件がみたされとき，X は **Riemann** 対称空間であるという： 各 $y \in X$ に対して，involutive な isometry s_y が存在して，y は s_y の孤立固定点になっている．

Ω に戻ろう．スペクトル分解を考えれば，$y \in \Omega$ に対して一意的に $x \in \Omega$ が存在して，$x^2 = e$ となることがわかることに注意．この x を $y^{1/2}$ と表せば，$P(y^{1/2})e = x^2 = y$．そこで，$s_y := P(y^{1/2}) \circ s_e \circ P(y^{1/2})^{-1}$ とおけば，s_y は y を固定点とする involutive な isometry であることがわかる．ゆえに Ω は Riemann 対称空間である．

§7. 対称錐の分類

定義. Jordan 代数 V が単純 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ideal は $\{0\}$ か V のみ.

命題 7.1. Euclid 型 Jordan 代数は単純 ideal の直和で書けて，それは番号付けを除いて一意的である.

証明. V：Euclid 型 Jordan 代数，I：V の ideal.
このとき，$I^\perp$（I の直交補空間）も V の ideal である．実際，$x \in V, y \in I^\perp$ のとき，任意の $z \in I$ に対して，$\langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, y \,|\, xz \,\rangle = 0$ となって，$xy \in I^\perp$ となる.

このとき，直交直和 $V = I \oplus I^\perp$ において，$II^\perp \subset I \cap I^\perp = \{0\}$ であるから，V は I と $I^\perp$ の algebra としての直和になっている.

これを続けると，$\dim V < \infty$ より，有限回の操作の後に，単純 ideals の直和に行き着く．一意性を示すために

$$V = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k = J_1 \oplus \cdots \oplus J_l$$

を V の単純 ideals の直和分解とする．このとき，$I_i \cap J_1$ は ideal なので，$\{0\}$ か $I_i = J_1$．ここで，すべての i について，$I_i \cap J_1 = \{0\}$ とはなり得ない．もしそうなら，$I_i J_1 \subset I_i \cap J_1 = \{0\}$ $(\forall i)$ なので，$VJ_1 = \{0\}$．ゆえに $J_1 = eJ_1 = \{0\}$ となって矛盾．従って，ただ一つの i に対して $J_1 = I_i$．以下，$J_2, J_3, \ldots$ に対して同じ議論を続ける. □

命題 7.2. V：Jordan 代数．Then
V：Euclid 型 $\iff$ $\operatorname{tr} L(xy)$：正定値.
このとき，$\operatorname{tr} L(xy)$ は結合的内積になっている.

証明. $[\Longrightarrow]$ $x = \sum \lambda_j c_j$：$x \in V$ のスペクトル分解．そうすると $x^2 = \sum \lambda_j^2 c_j$ であるから

$$\operatorname{tr} L(x^2) = \sum \lambda_j^2 \operatorname{tr} L(c_j) \geqq 0. \tag{7.1}$$

ここで $c_j \neq 0$ より，$L(c_j)$ の可能な固有値 $0, \frac{1}{2}, 1$ のうち，1 は必ず起こるので，$\operatorname{tr} L(c_j) > 0$．ゆえに (7.1) の「$\geqq 0$」において，$= 0$ となるのは，$\lambda_j = 0$ $(\forall j)$ のときで，それは $x = 0$ のときである．
[$\Longleftarrow$] $\operatorname{tr} L(xy)$ が結合的であればよい．一般に Jordan 代数では

$$L([x,y,z]) = [[L(x), L(z)], L(y)] \qquad ([x,y,z] := x(yz) - (xy)z)$$

が成立する[14]．そうすると両辺の trace を考えて

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} L(x(yz) - (xy)z) &= \operatorname{tr}([A, L(y)]) \qquad (A := [L(x), L(y)]) \\ &= \operatorname{tr}(AL(y) - L(y)A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

となって，証明終わり． □

命題 7.3. 単純な Euclid 型 Jordan 代数では，結合的内積は正の定数倍を除いて一意的である．

証明. $\langle x \,|\, y \rangle_0 := \operatorname{tr} L(xy)$ $(x, y \in V)$ とおく．$\langle \cdot | \cdot \rangle$ を任意の結合的内積とすると，正定値自己共役作用素 T を用いて，$\langle x \,|\, y \rangle = \langle Tx \,|\, y \rangle_0$ と書ける．
$\lambda > 0$ を T の一つの固有値とし，$x_0 \neq 0$ を対応する固有ベクトルとして，$B(x, y) := \langle Tx - \lambda x \,|\, y \rangle_0$ を考える．$B(x, y) = \langle x \,|\, y \rangle - \lambda \langle x \,|\, y \rangle_0$ であるから，B は結合的な対称双線型形式である．そして，$B(x_0, y) = 0$ より

$$\operatorname{Ker} B := \{x \in V \,;\, B(x, y) = 0 \quad (\forall y \in V)\}$$

とするとき，$\operatorname{Ker} B$ は $\{0\}$ と異なる ideal である．ゆえに $\operatorname{Ker} B = V$ である．これは $\langle x \,|\, y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle_0$ を意味する． □

注意 7.4. 単純な Euclid 型 Jordan 代数の標準的な結合的内積は，Jordan 代数の trace 函数 tr を用いて，$\operatorname{tr}(xy)$ で与えられるものである．

さて，Ω は，内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持った Euclid 型ベクトル空間 V の等質開凸錐で，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して自己双対であるとする．定理 4.1 に従って，$c \in \Omega$ をとって，$K = G_c$ とす

[14]実は次の補題が成立する：V を有限次元の可換な代数（結合法則は仮定しない）で，結合的な内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ があると仮定する．このとき， V は Jordan 代数 $\Longleftrightarrow$ $L([x,y,z]) = [[L(x), L(z)], L(y)]$.
$\Longleftarrow$ を定理 4.2 の証明 (4) で示していることになる．$\Longrightarrow$ は結合的内積の存在の仮定なしで出る．

る．V には c を単位元とする Euclid 型 Jordan 代数の構造が入って，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ は結合的な内積になっている．そして

$$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x \in V\} = \{x^2\ ;\ x \in V^\times\}.$$

$V = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$ を単純 ideals への V の直和分解，$\Omega_j := \{x^2\ ;\ x \in I_j^\times\}$ を I_j の対称錐とすると，$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k$ なる．

結局 Ω は単純な Euclid 型 Jordan 代数の対称錐の直積になっている．

補題 7.5. V：Jordan 代数，単位元 e を持つ．Then
V：Euclid 型 $\iff$ V：形式的実 ($x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$).

証明. [$\Longrightarrow$] $x^2 + y^2 = 0 \implies 0 = \langle\, x^2 + y^2 \,|\, e\,\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
[$\Longleftarrow$] 佐竹一郎 [10, 付録] では，形式的実 Jordan 代数でのスペクトル分解が書いてある．それを使えば，命題 7.2 と同様にして，$\mathrm{tr}\, L(xy)$ が正定値であることが出る（命題 7.2 の証明にあるように，それはつねに結合的な対称双線型形式である）．

□

形式的実な Jordan 代数の分類は，佐竹一郎 [10, 付録] 参照[15]．元々は，1934 年の，P. Jordan, von Neumann, Wigner の論文 [4] でなされた仕事．

(1) $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ with $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$.
結合的な内積は $\langle\, x \,|\, y\,\rangle := \mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(x \circ y)$ で与えられる．ここで，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ が単純なことを primitive に見てみよう．E_{ij} を行列単位とする（(i, j) 成分のみ 1 でそれ以外はすべて 0 である行列）とき，

$$c_i := E_{ii} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad f_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \quad (1 \leqq i < j \leqq n)$$

は，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ のベクトル空間としての直交基底である（内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関して）．ここで次のことに注意する：

$$\mathbb{R}c_i \text{ への直交射影：}\quad Q_i := P(c_i) = 2L(c_i)^2 - L(c_i),$$
$$\mathbb{R}f_{ij} \text{ への直交射影：}\quad Q_{ij} := 4L(c_i)L(c_j).$$

注意すべきは，Q_i も Q_{ij} も Jordan 代数のかけ算作用素で書けていることである．さて，I を $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ の $\{0\}$ でない ideal とし，$0 \neq x = (x_{ij}) \in I$ とする．どれかの $x_{ij} \neq 0$ であるが，$i < j$ ならば，$x_{ij} f_{ij} = Q_{ij} x \in I$ となるから，$f_{ij} \in I$．そして

[15] Faraut-Korányi [1] の分類論の所 (Chap. V §3) は添え字のミスプリントが目立つので，あまりおすすめできない．

$I \ni f_{ij}^2 = c_i + c_j$ より，$c_i = Q_i f_{ij}^2 \in I$ となるから，結局適当な c_i が I に属することになる．そのとき，$y = f_{ik}$ $(i < k)$ や $y = f_{hi}$ $(h < i)$ に対して，$I \ni c_i \circ y = \frac{1}{2} y$ なので，結局 $f_{ik} \in I$ かつ $f_{hi} \in I$．再び $Q_k f_{ik}^2$ 及び $Q_h f_{hi}^2$ を考えると，任意の k について，$c_k \in I$ が言える．そうするとそれらの和である単位行列が I に属することになって，$I = V$ が言える．//

この場合は，$\Omega = \{$ 正定値行列 in $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})\}$ である．

(2) $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$ with $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$.
(1) と同じく，結合的内積は $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(x \circ y)$ で与えられる．単純性の証明も (1) と同様である．

(3) $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{H})$ with $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$.
ここで $\mathbb{H}$ は 4 元数 (quaternions) のなす algebra である．つまり

$$\begin{aligned}\mathbb{H} :=& \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \quad \text{with} \\ & \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k = -ji, \;\; jk = i = -kj, \;\; ki = j = -ij. \end{cases}\end{aligned}$$

そして 1 を単位元とする．$\mathbb{H}$ は非可換であるが，結合的である．
$\alpha := a + bi + cj + dk$ に対して，$\overline{\alpha} := a - bi - cj - dk$ とする．$\mathrm{Re}(\alpha) := a$ とする．

$$\mathrm{Herm}(n, \mathbb{H}) := \{x = (x_{ij}) \;;\; x_{ij} \in \mathbb{H},\, x_{ji} = \overline{x}_{ij}\}.$$

結合的内積は $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(x \circ y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(xy)$.

(4) $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{O})$.
$\mathbb{O}$ は Cayley 数 (octonions) のなす algebra であり，積は非可換で非結合的である．
事実として，$\mathrm{Herm}(n, \mathbb{O})$ が Jordan 代数をなすならば，$n \leqq 3$ であることが示される．

(5) 正定値 2 次形式に付随する Jordan 代数：$V := \mathbb{R}e \oplus W$．ここで，$W$ は正定値 2 次形式 B を持つ実ベクトル空間で，V の Jordan 積は次で与えられる：

$$(\lambda e + w)(\lambda' e + w') = \big(\lambda\lambda' + B(w, w')\big)e + (\lambda w' + \lambda' w).$$

例 4.6 を参照のこと．$\dim W \geqq 2$ のとき V は単純であり，$W = \mathbb{R} = \mathbb{R}1$ のときは，V は単純 ideals の直和として，$V = \mathbb{R}(e + 1) \oplus \mathbb{R}(e - 1)$ となっている．

§8. 自己双対でない開凸錐の例

与えられた内積で自己双対にならない等質開凸錐の例を与えるのは易しい．

例 8.1. $\mathbb{R}^n$ において一つの基底 $e_1,\dots,e_n$（必ずしも正規直交ではない）をとり

$$\Omega(e_1,\dots,e_n) := \Bigl\{\sum_{j=1}^{n} t_j e_j\ ;\ t_j > 0\ (j=1,\dots,n)\Bigr\}$$

とおく（第１象限）．明らかに開凸錐で，半直線 $\mathbb{R}_{>0}$ の直積になっている．

(1) $f_1,\dots,f_n$ を $e_1,\dots,e_n$ に双対な基底，つまり $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表すとき，$\langle f_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{ij}$ をみたすものとすると

$$\Omega(e_1,\dots,e_n)^* = \Omega(f_1,\dots,f_n) \tag{8.1}$$

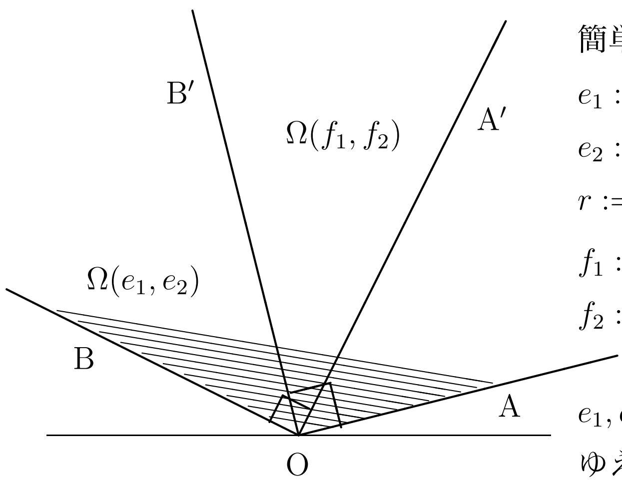
である．明らかに

$$\overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)} = \Bigl\{\sum_{j=1}^{n} t_j e_j\ ;\ t_j \geqq 0\ (j=1,\dots,n)\Bigr\}$$

であることに注意．さて $y \in \Omega(e_1,\dots,e_n)^*$ とし，$y = \sum \lambda_j f_j$ と表すと，$e_k \in \overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)}$ $(\forall k)$ であるから，$0 < \langle y \,|\, e_k\rangle = \lambda_k$ $(\forall k)$ となって，$y \in \Omega(f_1,\dots,f_n)$．逆に $y = \sum \lambda_j f_j \in \Omega(f_1,\dots,f_n)$ ならば，$\forall x = \sum t_j e_j \in \overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)} \setminus \{0\}$ に対し，$\langle y \,|\, x\rangle = \sum \lambda_j t_j$．ここで，各 $j = 1,\dots,n$ に対して，$\lambda_j > 0$，$t_j \geqq 0$ であって，$t_1 = \cdots = t_n = 0$ ではないので $\langle y \,|\, x\rangle > 0$ となる．よって $y \in \Omega(e_1,\dots,e_n)^*$．//

(2) (1) より，$e_1,\dots,e_n$ が正規直交基底であれば，$\Omega(e_1,\dots.e_n)$ は自己双対である．逆に，$e_1,\dots,e_n$ を正規直交基底とするような内積を $\mathbb{R}^n$ に入れると，その新たに導入した内積に関して $\Omega(e_1,\dots,e_n)$ は，自己双対になる．

(3) $\mathbb{R}^2$ でより詳しく見てみよう．



簡単のため，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする．

$e_1 := \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$e_2 := \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\cos\beta, \sin\beta)$

$r := \sin(\beta - \alpha) > 0$

$f_1 := \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = r^{-1}\bigl(\cos\bigl(\beta - \frac{\pi}{2}\bigr), \sin\bigl(\beta - \frac{\pi}{2}\bigr)\bigr)$

$f_2 := \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = r^{-1}\bigl(\cos\bigl(\alpha + \frac{\pi}{2}\bigr), \sin\bigl(\alpha + \frac{\pi}{2}\bigr)\bigr)$

e_1, e_2 と f_1, f_2 は互いに双対な基底．

ゆえに $\Omega(e_1,e_2)^* = \Omega(f_1,f_2)$．

特に $\alpha = \frac{\pi}{4}$，$\beta = \frac{3\pi}{4}$ のとき，$\Omega(e_1, e_2)$ は自己双対である．

例 8.2. 自己双対でない等質開凸錐，すなわち，どのように内積を定義しても，その内積に関して自己双対にならない等質開凸錐の例（1960 年に Vinberg が [13] 挙げた開凸錐で，最低次元の 5 次元のもの[16]）．

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \\ v_2 & v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \;;\; v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, 5) \right\} \cong \mathbb{R}^5.$$

$V \subset \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ であるから，V には $\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ からの内積を入れる：

$$\langle\, v \,|\, v' \,\rangle := \mathrm{tr}(vv') \qquad (v, v' \in V).$$

考える開凸錐は

$$\Omega := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \;;\; x_1 > 0,\, x_1x_3 - x_2^2 > 0,\, x_1x_5 - x_4^2 > 0 \right\}.$$

この Ω を **Vinberg 錐**と呼ぶ．Vinberg の理論を使えば，この開凸錐が自己双対ではないことが直ちにわかるが，ここでは Faraut–Korányi [1, Exercise I.10] に沿って直接的に考察しよう．

(1) Ω は等質である．

実際，$x \in V$ に対して，$x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$，$x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ とおき，$i = 1, 2$ に対して，$g_i := \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ とするとき，$g \in GL(V)$ を，$(gx)^{(i)} := g_i x^{(i)}\,{}^t g_i$ $(i = 1, 2)$ で定義する．直接の計算で

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

の $(1, 1)$ 成分はともに a^2x_1 であることがわかるから，g は well-defined で，

$$x \in \Omega \implies x^{(1)} \gg 0,\, x^{(2)} \gg 0 \implies (gx)^{(1)} \gg 0,\, (gx)^{(2)} \gg 0$$

であるから，$g \in G(\Omega)$ である．推移性については

$$g_i\,{}^t g_i = \begin{pmatrix} a^2 & ab_i \\ ab_i & b_i^2 + c_i^2 \end{pmatrix}$$

より，$y \in \Omega$ が与えられたとき，$g_i\,{}^t g_i = y^{(i)}$ から g_i $(i = 1, 2)$ が一意的に解けることによりわかる．

[16] 後年，Vinberg の理論 [15] により，11 次元以上では，互いに線型同値ではない非自己双対な等質開凸錐は連続濃度あることが示されている．

(2) $\Omega^* := \bigl\{y \in V\ ;\ \langle y \,|\, x\rangle > 0\ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\bigr\}$ とおくとき

$$\Omega^* = \{y \in V\ ;\ y \gg 0\}.$$

となることを示そう．以下，補助的に次の集合 C_0 を考える：

$$C_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}\ ;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \tag{8.2}$$

明らかに $C_0 \subset \overline{\Omega}$ である．

（あ）$\Gamma := \{y \in V\ ;\ y \gg 0\}$ とおく．まず，$\Omega^* \subset \overline{\Gamma}$（ゆえに $\Omega^* \subset \Gamma$）を示そう．
$y \in \Omega^*$ とすると，任意の $z \in C_0$ にたいして $\mathrm{tr}(yz) \geqq 0$ である．z を C_0 の定義 (8.2) にある行列で表して直接計算をすると：

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathrm{tr}(yz) &= \alpha^2 y_1 + 2\alpha\beta y_2 + \beta^2 y_3 + 2\alpha\gamma y_4 + \gamma^2 y_5 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに y は半正定値行列となって，$y \in \overline{\Gamma}$ である．

逆向きの包含関係を示すのに次の補題が必要である．

補題 8.3. $\overline{\Omega} = C_0 + C_0$.

証明. 「$\supset$」は明らかなので,「$\subset$」を示そう．すなわち，$x \in \overline{\Omega}$ が与えられたとき，$x = z_1 + z_2$ となる $y_j \in C_0\ (j = 1, 2)$ が求まればよいが，これは次の連立方程式が解けるかどうかということである：

$$\begin{aligned} &x_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, && x_2 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, && x_3 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \\ &x_4 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2, && x_5 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \end{aligned}$$

「$x \in \overline{\Omega} \iff x^{(i)}$ は半正定値 $(i = 1, 2)$」なので，$x_1 = 0$ のときは，$x_2 = x_4 = 0$ であることに注意．この場合は容易なので，$x_1 \neq 0$ のときを扱えばよく，そのときは $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{x_1/2}$ と取れる．そうすると $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ の存在は初等的に示せる． □

（い）$\Gamma \subset \Omega^*$ を示そう．
実際 $y \in \Gamma$ とする．任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ を補題 8.3 によって $x = z + z'\ (z, z' \in C_0)$ と表すとき，$\mathrm{tr}(yx) = \mathrm{tr}(yz) + \mathrm{tr}(yz')$ であるが,（あ）での計算と同様に，z を (8.2)

の C_0 の定義中の行列で表すと

$$\mathrm{tr}(yz) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$y \in \Gamma$ であるから，この右辺は $\geqq 0$ で，等号成立は $\alpha = \beta = \gamma = 0$，すなわち，$z = 0$ のときに限る．ゆえに $\mathrm{tr}(yz) \geqq 0$．同様に $\mathrm{tr}(yz') \geqq 0$ であり，$x \neq 0$ より，$z = z' = 0$ とはならないので，$\mathrm{tr}(yx) > 0$．ゆえに $y \in \Omega^*$．

(3) V にどのように内積を入れても，Ω は自己双対にならないことを示そう．
もし適当な内積で Ω が自己双対になるのであれば，Ω と (2) で定義した Ω^* とは線型同値（$\varphi \in GL(V)$ が存在して，$\varphi(\Omega) = \Omega^*$）となっている．以下，これを仮定して矛盾を出そう．次で定義される集合 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ が必要になる：

$$\Gamma_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a \geqq 0 \right\},$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a_1 \geqq 0,\ c_1 \geqq 0,\ a_1 c_1 = b_1^2 \right\},$$

$$\Gamma_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \ ; \ a_2 \geqq 0,\ c_2 \geqq 0,\ a_2 c_2 = b_2^2 \right\}.$$

明らかに $\Gamma_j \subset \overline{\Omega^*}$ $(j = 0, 1, 2)$．補題 8.3 の対応物として

補題 8.4. $\overline{\Omega^*} = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$.

証明. 「$\supset$」は明らかなので,「$\subset$」を示そう．$x \in \overline{\Omega^*}$ のとき，$x_1 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_5 \geqq 0$ である．$x_1 > 0,\ x_3 > 0,\ x_5 > 0$ のときは

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\det x}{x_3 x_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{x_2^2}{x_3} & x_2 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{x_4^2}{x_5} & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$$

より補題がわかる．$x_3 = 0$ のとき，$x_2 = 0$ であることに注意すると，$x_5 \neq 0$ であれば，x が Γ_0 の元と Γ_2 の元の和になることがわかる．以下場合分けの詳細略． $\square$

C を閉凸錐とする．各 $x \in \partial C \setminus \{0\}$ に対して，半直線 $\ell_x := \{\lambda x \ ; \ \lambda > 0\}$ のことを，x を通る母線と呼ぶことにする．x を通る母線が **extremal** であるとは，$u \in \ell_x$ が $u = v + w$ $(v, w \in C)$ と表されるならば，$v, w \in \ell_x$ となるときをいう．

命題 8.5. (1) $\alpha \neq 0$ である C_0 の元の全体を C_0' で表す．C_0' を通る母線はすべて extremal である[17]．
(2) $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ の元を通る母線はすべて extremal である．

次の補題を使う（不等式もその証明も面白いので，あえてここで使うことにした[18]．）

補題 8.6. A, B：半正定値な n 次実対称行列 $\Longrightarrow$

$$\bigl(\det(A+B)\bigr)^{1/n} \geqq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}.$$

ここで等号は，$A = cB$ $(c \geqq 0)$ のときに限る．

証明. 極限移行により，A は正定値であると仮定してよい．そして，

$$A + B = A^{1/2}(I + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

であり，$A^{-1/2}BA^{-1/2}$ も半正定値であるから，補題を $A = I$ のときに証明すれば十分である．$0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ を B の固有値とすると，証明すべき不等式は

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j) \geqq \bigl(1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n}\,\bigr)^n.$$

両辺共展開すると

$$1 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \geqq 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{j/n} \tag{8.3}$$

となる．ただし，$\sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の j 次基本対称式である．ここで（算術平均）$\geqq$（幾何平均）より（$\sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ に各 λ_k が $\binom{n-1}{j-1}$ 回ずつ現れるので）

$$\frac{\sigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\binom{n}{j}} \geqq \sqrt[\binom{n}{j}]{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{\binom{n-1}{j-1}}}$$

であり，$\displaystyle\binom{n-1}{j-1}\binom{n}{j}^{-1} = \frac{j}{n}$ であるから，(8.3) は示された．等号成立は，λ_j がすべて等しいとき，すなわち $B = cI$ のときである．元の A, B の関係で言えば，$A^{-1/2}BA^{-1/2} = cI$，すなわち，$B = cA$ のときである． □

---

[17] $\alpha = 0$ のときは，例えば $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\Omega} + \overline{\Omega}$ に注意.

[18] A, B が半正定値であるとき，「$\det(A+B) = 0 \implies \det A = \det B = 0$」は，$\langle (A+B)\xi \,|\, \xi \rangle = \|A^{1/2}\xi\|^2 + \|B^{1/2}\xi\|^2$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ より直ちに出る．

命題 8.5 の証明． (1) $z \in C_0'$ が $z = x + y$ $(x, y \in \overline{\Omega})$ と表されたとする．つまり

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \neq 0) \tag{8.4}$$

が成り立っているとする．補題 8.6 を

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\gamma \\ \alpha\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_4 \\ y_4 & y_5 \end{pmatrix}$$

に適用して，

$$\det x^{(1)} = \det y^{(1)} = 0, \qquad \det x^{(2)} = \det y^{(2)} = 0, \tag{8.5}$$

かつ $y^{(1)} = c_1 x^{(1)}$, $y^{(2)} = c_2 x^{(2)}$ $(c_1, c_2 \geqq 0)$ を得る．$\alpha \neq 0$ より $x_1 \neq 0$．従って $c_1 = c_2$ を得るから $y = cx$ $(c \geqq 0)$ となる．よって，$x, y \in \ell_z$．
(2) (1) と同様．詳細略． □

さて，$\varphi \in GL(V)$ が存在して，$\varphi(\Omega) = \Omega^*$，従って $\varphi(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega^*}$ となっていると仮定する．明らかに，extremal な母線は φ によって extremal な母線に写される．そこで，$z \in C_0'$ とすると，補題 8.4 より，$\varphi(z) = y_0 + y_1 + y_2$ $(y_j \in \Gamma_j)$ と表される．命題 8.5 より $\ell_{\varphi(z)}$ は $\overline{\Omega^*}$ の extremal な母線なので，$y_0 \in \ell_{\varphi(z)}$ かつ $y_1 + y_2 \in \ell_{\varphi(z)}$．特に $z \in \varphi^{-1}(\Gamma_0)$ となり，$C_0' \subset \varphi^{-1}(\Gamma_0)$ を得る．ところが，C_0' の線型包は V であるが，Γ_0 は 1 次元の部分空間しか張らないので矛盾である．

例 8.7． 自己双対でない開凸錐（2 例目[19]）．

この例では I は 2 次の単位行列とし，V は次のように記述される 8 次元の実ベクトル空間を表す：

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ x_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{pmatrix} \;;\; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$V \subset \mathrm{Sym}(5, \mathbb{R})$ であることに注意．開凸錐 Ω としては，V に属する行列で正定値なもの全体をとる：

$$\Omega := \{x \in V \;;\; x \gg 0\}.$$

[19][7] より採った．

この Ω が等質であることを実際に見てみよう．次で定義される $GL(5,\mathbb{R})$ の部分群 A と N を考える：

$$A := \{a = \mathrm{diag}[a_1 I, a_2 I, a_3] \ ; \ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0\},$$

$$N := \left\{ n = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & I & 0 \\ {}^t\mathbf{n}_1 & {}^t\mathbf{n}_2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \mathbf{n}_1 \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{n}_2 \in \mathbb{R}^2,\ \xi \in \mathbb{R} \right\}. \tag{8.6}$$

このとき，半直積群 $H = N \ltimes A$ が Ω に $H \times \Omega \ni (h,x) \mapsto hx{}^t h \in \Omega$ によって単純推移的に作用している．実際 $n \in N$ と $a \in A$ を (8.6) におけるように表し，ノルムは $\mathbb{R}^2$ における標準的なユークリッド・ノルムを表すものとすると

$$na{}^t n = \begin{pmatrix} a_1 I & a_1 \xi I & a_1 \mathbf{n}_1 \\ \xi a_1 I & (\xi^2 a_1 + a_2) I & \xi a_1 \mathbf{n}_1 + a_2 \mathbf{n}_2 \\ a_1 {}^t\mathbf{n}_1 & a_1 \xi {}^t\mathbf{n}_1 + a_2 {}^t\mathbf{n}_2 & a_1 \|\mathbf{n}_1\|^2 + a_2 \|\mathbf{n}_2\|^2 + a_3 \end{pmatrix}.$$

これがあらかじめ与えられた $x = \begin{pmatrix} x_{11} I & x_{21} I & \mathbf{y} \\ x_{21} I & x_{22} I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{pmatrix} \in \Omega$ に等しいということにすると，a_1, a_2, a_3 及び $\xi, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ が次のように解ける：

$$a_1 = \Delta_1(x), \qquad a_2 = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}, \qquad a_3 = \frac{\Delta_3(x)}{\Delta_2(x)},$$

$$\xi = \frac{x_{21}}{\Delta_1(x)}, \qquad \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{y}}{\Delta_1(x)}, \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{x_{11}\mathbf{z} - x_{21}\mathbf{y}}{\Delta_2(x)}.$$

ここで，$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ は $\mathbb{R}^2$ での $\mathbf{y}$ と $\mathbf{z}$ の標準内積を表すものとして，

$$\begin{cases} \Delta_1(x) := x_{11}, \\ \Delta_2(x) := x_{11} x_{22} - x_{21}^2, \\ \Delta_3(x) := x_{11} x_{22} x_{33} + 2 x_{21} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - x_{33} x_{21}^2 - x_{22} \|\mathbf{y}\|^2 - x_{11} \|\mathbf{z}\|^2 \end{cases}$$

である．以上より，$I_5 \in \Omega$ を 5 次の単位行列をすれば，$h = na^{1/2}$ に対して，$hI_5{}^t h = x$ となり，$\Omega = H \cdot I_5$ は H に微分同相であることがわかった．

5 次の正方行列 $x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{21} & 0 & y_1 \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{21} & y_2 \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 & z_1 \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{22} & z_2 \\ y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & x_{33} \end{pmatrix} \in V$ の左上からの首座小行列式を $\delta_k(x)$ $(k = 1, \ldots, 5)$ とすると

$$\delta_1(x) = \Delta_1(x), \quad \delta_2(x) = \Delta_1(x)^2, \quad \delta_3(x) = \Delta_1(x)\Delta_2(x),$$

$$\delta_4(x) = \Delta_2(x)^2, \quad \delta_5(x) = \Delta_2(x)\Delta_3(x)$$

が成り立つので，次のことがわかる．

$$x \in \Omega \iff \Delta_k(x) > 0 \ \text{ for any } k = 1, 2, 3.$$

従って，多項式函数 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ が V での基本的な函数になっている（実対称行列の空間で，首座小行列式が果たす役割を担う）.

Ω の双対錐は以下のように実現される．まず

$$V' := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & {}^t\mathbf{y} \\ x_{21} & x_{22} & {}^t\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & x_{33}I \end{pmatrix} \ ;\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

のように表される 8 次元の実ベクトル空間 V' を考える．$V' \subset \mathrm{Sym}(4, \mathbb{R})$ であることに注意．V と V' の duality pairing を次で与える：

$$\langle\, x, x' \,\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_{jj}x'_{jj} + 2\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}' + 2\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}' + 2x_{21}x'_{21} \tag{8.7}$$

for $x = \left(\begin{smallmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ x_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{smallmatrix}\right) \in V$ and $x' = \left(\begin{smallmatrix} x'_{11} & x'_{21} & {}^t\mathbf{y}' \\ x'_{21} & x'_{22} & {}^t\mathbf{z}' \\ \mathbf{y}' & \mathbf{z}' & x'_{33}I \end{smallmatrix}\right) \in V'$. このとき

$$\Omega' := \{x \in V'\ ;\ x \gg 0\}$$

を考えると，Ω' は Ω の双対凸錐を実現している．以下それを見よう．まず次の群を考える：

$$\begin{aligned} A' &:= \left\{ a' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3I \end{pmatrix} \ ;\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0 \right\}, \\ N' &:= \left\{ n' = \begin{pmatrix} 1 & \xi & {}^t\mathbf{n}_1 \\ 0 & 1 & {}^t\mathbf{n}_2 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \ ;\ \xi \in \mathbb{R},\ \mathbf{n}_1 \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{n}_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

$H' := N' \ltimes A'$ は $(h', x') \ni h'x'{}^th'$ によって Ω' に単純推移的に作用している．実際 $n' \in N$ と $a' \in A$ を (8.8) におけるように表すと

$$n'a'{}^tn' = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\xi^2 + a_3\|\mathbf{n}_1\|^2 & \xi a_2 + a_3\,\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 & a_3{}^t\mathbf{n}_1 \\ \xi a_2 + a_3\,\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 & a_2 + a_3\|\mathbf{n}_2\|^2 & a_3{}^t\mathbf{n}_2 \\ a_3\mathbf{n}_1 & a_3\mathbf{n}_2 & a_3I \end{pmatrix}.$$

これがあらかじめ与えられた $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & {}^t\mathbf{y} \\ x_{21} & x_{22} & {}^t\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & x_{33}I \end{pmatrix} \in \Omega'$ に等しいということにすると，a_1, a_2, a_3 及び $\xi, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ が次のように解ける：

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{\Delta'_3(x)}{\Delta'_1(x)\Delta'_2(x)}, \qquad a_2 = \frac{\Delta'_2(x)}{\Delta'_1(x)}, \qquad a_3 = \Delta'_1(x), \\ \xi = \frac{x_{21}x_{33} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z}}{\Delta'_2(x)}, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{y}}{\Delta'_1(x)}, \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{z}}{\Delta'_1(x)}. \end{gathered}$$

ここで,

$$\Delta_1'(x) := x_{33}, \qquad \Delta_2'(x) := x_{22}x_{33} - \|\mathbf{z}\|^2, \qquad \Delta_3'(x) := \det x \quad (\text{as } 4\times 4 \text{ matrix})$$

である．以上より，$I_4 \in \Omega$ を 4 次の単位行列をすれば，$h' = n'(a')^{1/2}$ に対して，$h' I_5 {}^t h' = x$ となり，$\Omega' = H' \cdot I_4$ は H' に微分同相であることがわかった．
4 次の正方行列 $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & y_1 & y_2 \\ x_{21} & x_{22} & z_1 & z_2 \\ y_1 & z_1 & x_{33} & 0 \\ y_2 & z_2 & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \in V'$ の右下からの首座小行列式を $\delta_k^*(x)$ $(k = 1,2,3,4)$ とすると

$$\delta_1^*(x) = \Delta_1'(x), \qquad \delta_2^*(x) = \Delta_1'(x)^2,$$
$$\delta_3^*(x) = \Delta_1'(x)\Delta_2'(x), \qquad \delta_4^*(x) = \Delta_3'(x)$$

が成り立つので，ここでも，$x \in \Omega' \iff \Delta_k'(x) > 0$ $(k = 1,2,3)$．
さて，Ω と Ω' が互いに双対であることを見るには，次のことに着目すればよい．(8.6) における $a \in A$, $n \in A$ に対して，同じパラメタで決まる (8.8) における A', N' の元をそれぞれ a', n' とする．$h = na$, $h' = n'a'$ とおくとき，(8.7) の duality pairing に対して

$$\langle\, hx{}^t h, x' \,\rangle = \langle\, x, h'x'{}^t h' \,\rangle \qquad (x \in V,\, x' \in V')$$

が成り立つ．そうすると，$\Omega = H \cdot I_5$ であること，及び $\Omega' = H' \cdot I_4$ であることより，それらが互いに双対であることがわかる．

例 8.8. 等質ではない正則開凸錐の例[20]．
以下 $\mathbb{R}^3$ で考える．以下では，$\mathbb{R}^3$ の元 $a_1, \ldots, a_n$ に対して

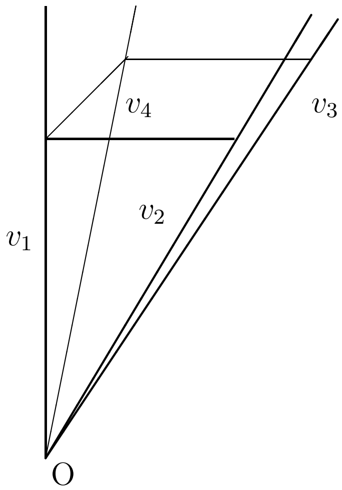
$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_+ := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j a_j \;;\; t_j > 0 \;(\forall j > 0) \right\}$$

とおく．さて次の 4 元 v_1, v_2, v_3, v_4

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとって，開凸錐 $\Omega := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle_+$ を考える．

[20]Ishi [3] より採った．



$\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$：平面 $y = 0$
$\mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$：平面 $x = z$
$\mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$：平面 $y = z$
$\mathbb{R}v_4 + \mathbb{R}v_1$：平面 $x = 0$

$$\therefore \Omega = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x > 0, & y > 0 \\ z - x > 0, & z - y > 0 \end{matrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^3$ の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対凸錐 Ω^* は，上より容易に

$$\lambda_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \rangle_+ \\ &= \left\{ \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \zeta > 0, & \xi + \zeta > 0 \\ \xi + \eta + \zeta > 0, & \eta + \zeta > 0 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

で与えられることがわかる．実際，

$$\langle \lambda_1 \,|\, \mathbf{x} \rangle = x, \quad \langle \lambda_2 \,|\, \mathbf{x} \rangle = y, \quad \langle \lambda_3 \,|\, \mathbf{x} \rangle = -x + z, \quad \langle \lambda_4 \,|\, \mathbf{x} \rangle = -y + z$$

であり，

$$\langle \boldsymbol{\lambda} \,|\, v_1 \rangle = \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} \,|\, v_2 \rangle = \xi + \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} \,|\, v_3 \rangle = \xi + \eta + \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} \,|\, v_4 \rangle = \eta + \zeta$$

となっていることに注意すればよい．

さて，$\overline{\Omega}$ の extremal な母線は，$\ell_{v_1} \cup \ell_{v_2} \cup \ell_{v_3} \cup \ell_{v_4}$ で，$G(\Omega)$ の作用でこの和集合は不変である．従ってまた，$G(\Omega)$ は Ω の部分集合 $L := \langle v_1, v_3 \rangle_+ \cap \langle v_2, v_4 \rangle_+$ を不変にする．言い換えると，L 上の点は $G(\Omega)$ の元によって $\Omega \setminus L$ に写されることはない．つまり，$G(\Omega)$ は Ω に推移的には働いてない．

§9. 等質開凸錐とクラン

V：有限次元実ベクトル空間，Ω：V の正則開凸錐．
Ω は等質であるとする．すなわち，$G(\Omega) \curvearrowright \Omega$：推移的．

Vinberg [14] により
$G(\Omega)$ の同時三角化可能な部分群 H で，Ω に単純推移的に作用するものが存在する．ここで，同時三角化可能であるとは，V に適当な基底をとると，H の元はすべて下三角行列（上三角でもよい）で表されることをいう．

$E \in \Omega$ を固定して，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ を考えると，これは微分同相．
H の Lie 代数を $\mathfrak{h}$ とおく：$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$．
そうすると，軌道写像の H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$ は線型同型写像．その逆写像を

$$L : V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$$

とする．つまり，各 $x \in V$ に対して，$L_x \in \mathfrak{h}$ は $L_x E = x$ をみたす一意的な元（V 上の線型作用素）である．
定義． $x \triangle y := L_x y \ (x, y \in V)$ によって，V に積の構造（結合法則は要求しない）を入れる．

(1) $[L_x, L_y] = L_{x\triangle y - y\triangle x} \ (x, y \in V)$．

$\because$ $[L_x, L_y] \in \mathfrak{h}$ であって

$$[L_x, L_y]E = L_x y - L_y x = x\triangle y - y\triangle x. \ //$$

一般にベクトル空間 V に積 $\triangle$ を定義して，その積による左かけ算作用素が (1) をみたすとき，$(V, \triangle)$ のことを左対称代数と呼ぶ．この用語の妥当性を見るために，結合子 $[\cdot,\cdot,\cdot]$ を導入しよう：

$$[a, b, c] := a\triangle(b\triangle c) - (a\triangle b)\triangle c.$$

そうすると，(1) は $[x, y, z] = [y, x, z]$ と同値．すなわち，3 重線型作用素である結合子が，左側の 2 変数について，対称であることを (1) は意味する．

$\because$ 定義によって

$$[x, y, z] = x\triangle(y\triangle z) - (x\triangle y)\triangle z,$$
$$[y, x, z] = y\triangle(x\triangle z) - (y\triangle z)\triangle z.$$

したがって

$$
\begin{aligned}
[x,y,z]=[y,x,z] &\iff x\triangle(y\triangle z)-y\triangle(x\triangle z)=(x\triangle y)\triangle z-(y\triangle x)\triangle z\\
&\iff [L_x,L_y]z=L_{x\triangle y-y\triangle x}z.\ \ //
\end{aligned}
$$

(2) $\operatorname{tr} L_{x\triangle y}$ は V に内積を定める：

$$
\begin{cases}
\operatorname{tr} L_{x\triangle y}=\operatorname{tr} L_{y\triangle x} & \text{(by (1))},\\
\operatorname{tr} L_{x\triangle x}>0 & (\text{if } x\neq 0).
\end{cases}
$$

$\because$ Ω の特性函数を ϕ とする（§3 参照)：

$$
\phi(u):=\int_{\Omega^*}e^{-\langle\,\lambda,u\,\rangle}\,d\lambda \qquad (u\in\Omega).
$$

ただし，$\Omega^*:=\{\lambda\in V^*\,;\,\langle\,\lambda,x\,\rangle>0\ (\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\})\}$ （Ω の双対凸錐）.
命題3.2 より，$\phi(gu)=|\det g|^{-1}\phi(u)$ ($g\in G(\Omega)$, $u\in\Omega$) が成り立つ．従って，$x\in V$, $t\in\mathbb{R}$ のとき

$$
\phi((\exp tL_x)E)=(\det\exp tL_x)^{-1}\phi(E)=e^{-t(\operatorname{tr} L_x)}\phi(E).
$$

ゆえに，$\Phi(u)=\log\phi(u)$ とおくと

$$
\Phi((\exp tL_x)E)=-t(\operatorname{tr} L_x)+\Phi(E). \tag{9.1}
$$

ここで，函数 $\Phi(u)$ の $u=E$ における Taylor 展開を考える．V に適当に内積を入れ，正規直交基底をとって，それに関する座標で V を $\mathbb{R}^n$ と見て，$u=(u_1,\dots,u_n)$, $E=(E_1,\dots,E_n)$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)=\Phi(E)&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}(E)(u_i-E_i)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i\partial u_j}(E)(u_i-E_i)(u_j-E_j)+o(\|u-E\|^2).
\end{aligned}
$$

さて，

$$
(\exp tL_x)E=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(L_x)^jE=E+tx+\frac{1}{2}t^2(x\triangle x)+o(t^2)
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\Phi((\exp tL_x)E)=\Phi(E)&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}(E)\Big(tx_i+\frac{1}{2}t^2(x\triangle x)_i+o(t^2)\Big)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i\partial u_j}(E)\big(tx_i+o(t)\big)\big(tx_j+o(t)\big)+o(t^2).
\end{aligned}
$$

これより，D_x は x 方向の微分を表すとして $(D_x f(E) = \frac{d}{dt} f(E+tx)\big|_{t=0})$，

$$\frac{d}{dt}\Phi((\exp tL_x)E)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}(E)x_i = D_x\Phi(E),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi((\exp tL_x)E)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}(E)(x\triangle x)_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i \partial u_j}(E)x_i x_j$$
$$= \frac{1}{2}(D_{x\triangle x} + D_x^2)\Phi(E).$$

以上が (9.1) の左辺の $t=0$ における微分である．右辺はすぐに計算できるので，結局

$$\begin{cases} D_x \log\phi(E) = -\operatorname{tr} L_x, \\ (D_{x\triangle x} + D_x^2)\log\phi(E) = 0. \end{cases}$$

第 1 の式より，第 2 の式は

$$\operatorname{tr} L_{x\triangle x} = D_x^2 \log\phi(E).$$

この右辺は命題 3.5 により，$x \neq 0$ ならば正である．//

問 3.　命題 3.5 の σ を用いると，$\sigma_E(x, x\triangle x) = -\dfrac{1}{2}D_x^3 \log\phi(E)$ が成り立つ．

定義.　一般に $(V, \triangle)$ を algebra とする（結合法則は仮定しない）．
(V, Δ) が **clan** であるとは，$L_x y := x\triangle y$ に対して，次の (1)〜(3) がみたされるときをいう：

(1) $(V, \triangle)$ は左対称代数である：$[L_x, L_y] = L_{x\triangle y - y\triangle x}$.
(2) $s \in V^*$ が存在して，$\langle s, x\triangle y\rangle$ は V に内積を定める．
　（このような $s \in V^*$ は認容線型形式と呼ばれる.）
(3) 各 $x \in V$ に対して，L_x の固有値は実数のみである．

命題 9.1.　Ω：V の等質な正則開凸錐 $\Longrightarrow$ V に clan の構造が入る．

証明.　(1) と (2) は OK $(\langle s, x\rangle := \operatorname{tr} L_x)$.
(3) については，$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ が同時三角化可能であることより．　□

命題 9.2.　命題 9.1 の V の clan 構造において，E は単位元である．

証明.　$x \in V$ のとき，定義より

$$x\triangle E = L_x E = x.$$

一方で，$E\triangle x = x$ の方は，highly non-trivial である．まず H は，$x \mapsto e^{\lambda}x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ という 1 径数の変換を含んでいることに注意．これは H を，$G(\Omega)$ の極大分裂可解群として選んでいることから来る．実際，$G(\Omega)^{\circ}$ は，ある代数群の単位元の連結成分に一致し，その代数群の極大三角群 (Borel subgroup) として H をとっているのである．極大性から，その 1 径数部分群を含まねばならない．従って，その 1 径数部分群の生成元である恒等写像 I を，H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は含んでいる．明らかに $IE = E$ であるから，一意性より $L_E = I$ である．ゆえに

$$E\triangle x = L_E x = Ix = x$$

となって，E が単位元であることが示された． □

例 9.3. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$，$\Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$，$E \in \Omega$：単位行列．
以下 V に入る，E を単位元とする clan 構造を見てみよう（詳細はレポート問題）．

$$H_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \smash{\text{\huge 0}} \\ & & \ddots & \\ \smash{\text{\huge $*$}} & & & a_n \end{pmatrix}\ ;\ a_i > 0\ \ (\forall i) \right\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

H_0 は Ω に，$H_0 \times \Omega \ni (h, x) \mapsto \rho(h)x := hx{}^t\!h \in \Omega$ によって単純推移的に働く．すなわち，任意の $x \in \Omega$ に対して，$h{}^t\!h = x$ となる $h \in H_0$ が一意的に存在する（例 2.8 では，2 次形式の「平方完成」を用いたが，もちろん直接的な帰納法でも証明できる）．以下，$H := \rho(H_0)$ とおく．$\mathfrak{h}_0 := \mathrm{Lie}(H_0)$ は下三角行列の全体になる：

$$\mathfrak{h}_0 = \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \smash{\text{\huge 0}} \\ & & \ddots & \\ \smash{\text{\huge $*$}} & & & * \end{pmatrix}$$

写像 $\rho : h \mapsto \rho(h)$ の単位行列 $\in H$ における微分も（面倒なので）同じ記号 ρ で表すことにすると，$\rho(X)y = Xy + y{}^tX$ $(y \in V)$ となる．$\mathfrak{h} := \rho(\mathfrak{h}_0)$ は H の Lie 代数であ

る．さて，各 $x \in V$ に対して，$\underline{x} \in \mathfrak{h}_0$ を次で定義する：

$$\underline{x} := \begin{array}{c c} & i \\ j & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & & 0 \\ & \frac{1}{2}x_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & x_{ji} & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2}x_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (i < j).$$

明らかに，$x = \underline{x} + {}^t\underline{x}$．言い換えれば $\rho(\underline{x})E = x$ であるから，$L_x = \rho(\underline{x})$．ゆえに

$$x \triangle y = \underline{x}y + y\,{}^t\underline{x} \qquad (x, y \in V).$$

これが V のクラン構造の積であり，E が単位元であることは直接読み取れる．

以下 E_{ij} を，(i,j) 成分のみ 1 で，他の成分はすべて 0 という行列を表すことにする（行列単位）．また，$f_{ii} := E_{ii}$，$f_{ij} := E_{ij} + E_{ji}$ $(i < j)$ とおくと，f_{ij} $(i \leqq j)$ は V の基底をなしている．この基底に辞書式順序を入れる．このとき，$L_{f_{ij}}$ $(i < j)$ はすべて真に下三角行列になっている．例えば

$$L_{f_{ij}} f_{ii} = f_{ij} \qquad (i < j)$$

なので，f_{ii} は「後ろ」の番号の基底の元 f_{ij} に「追いやられて」いる．さらに $L_{f_{ii}}$ を見てみると，$\underline{f_{ii}} = \frac{1}{2}E_{ii}$ であるので

$$L_{f_{ii}} x = \frac{1}{2}(E_{ii}x + xE_{ii}) = E_{ii} \circ x = L(E_{ii})x.$$

ここで，$\circ$ は Jordan 積で，$L(E_{ii})$ は Jordan 積でのかけ算作用素である．例 5.3 からもわかるように，$L(E_{ii})$ は「対角」作用素で，固有値 j の固有空間 $V_j(E_{ii})$ は

$$V_1(E_{ii}) = \mathbb{R}f_{ii}, \quad V_{1/2}(E_{ii}) = \sum_{j<i} \mathbb{R}f_{ji} \oplus \sum_{j>i} \mathbb{R}f_{ij}, \quad V_0(E_{ii}) = \sum_{p<q, p\neq i, q\neq i} \mathbb{R}f_{pq}.$$

以上から，$x \in V$ を，$x = \sum_i x_{ii}f_{ii} + \sum_{i<j} x_{ij}f_{ij}$ と表すとき，

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i x_{ii} L_{f_{ii}} + \sum_{i<j} x_{ij} f_{ij} \\ &= \sum_i x_{ii} P_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(x_{ii} + x_{jj})P_{ij} + \sum_{i<j} x_{ij} L_{f_{ij}}. \end{aligned}$$

ただし，$i \leqq j$ に対して，P_{ij} は射影 $V \to \mathbb{R}f_{ij}$ で，$P_{ij}y = y_{ij}f_{ij}$ $(i \leqq j)$ である．ゆえに，基底 f_{ij} $(i \leqq j)$ の辞書式順序に関して，L_x $(x \in V)$ はすべて下三角行列で表

されている．さらに

$$\operatorname{tr} L_x = \sum_i x_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i<j}(x_{ii}+x_{jj}) = \left(1+\frac{n-1}{2}\right)\sum_i x_{ii} = \frac{n+1}{2}\operatorname{tr} x.$$

従ってまた

$$\operatorname{tr} L_{x\triangle y} = \frac{n+1}{2}\operatorname{tr}(x\triangle y) = \frac{n+1}{2}\big(\operatorname{tr}(\underline{x}y) + \operatorname{tr}({}^t\underline{x}y)\big) = \frac{n+1}{2}\operatorname{tr}(xy).$$

よって，確かに $\operatorname{tr} L_{x\triangle y}$ は V に内積を定義している．

今度は逆に単位元 E を持つ clan $(V,\triangle)$ から，等質な正則開凸錐を構成しよう．$(V,\triangle)$ の左かけ算作用素全体がなすベクトル空間を $\mathfrak{h}$ とする：$\mathfrak{h} = \{L_x\ ;\ x \in V\}$．定義の (1) により $\mathfrak{h}$ は Lie 代数をなす（線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数）．

補題 9.4. $\mathfrak{h}$ は分裂可解 Lie 代数である．すなわち，$\mathfrak{h}$ の随伴表現は三角化可能である（$\mathfrak{h}$ に適当な基底をとると，$\operatorname{ad} X$ $(X \in \mathfrak{h})$ はすべて下三角行列で表される）．

証明. $\mathfrak{h}$ の Levi 分解を $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{r}$ とする．ここで $\mathfrak{l}$ は半単純，$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{h}$ の根基（最大可解イデアル：radical）である（たとえば,「杉浦光夫 [12, 第 5 章 §7] 参照）．もし $\mathfrak{l} \neq \{0\}$ ならば，$\mathfrak{l}$ はコンパクトな半単純 Lie 代数 $\mathfrak{k} \neq \{0\}$ を含み，$\mathfrak{k}$ は可換部分 Lie 代数 $\mathfrak{t} \neq \{0\}$ を含む．$0 \neq X \in \mathfrak{t}$ とすると，$\mathfrak{h}$ 上の作用素 $\operatorname{ad} X$ は $\mathfrak{t}$ を不変にし，そこで純虚数 $\neq 0$ の固有値を持つ．一方で，仮定より V 上の線型作用素 $X \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ の固有値 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ はすべて実数であり，$\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 $\operatorname{ad} X$ の固有値は $\alpha_i - \alpha_j$ の形ですべて実数のはずだから，矛盾が生じている．ゆえに $\mathfrak{l} = \{0\}$ であり，$\mathfrak{h} = \mathfrak{r}$ である．随伴表現の作用素がつねに実固有値のみである可解 Lie 代数は分裂的である． □

$\exp\mathfrak{h}$ で生成される $GL(V)$ の部分 Lie 群を H とすると，$\mathfrak{h}$ は分裂可解なので，指数写像 $\exp : \mathfrak{h} \to H$ は微分同相になっている．とくに $H = \exp\mathfrak{h}$ である．$\Omega := HE$（E を通る H 軌道）とする．

定理 9.5. Ω は等質な正則開凸錐である（clan の定義 (2) に現れる $s \in \mathfrak{h}^*$ は Ω^* に属している）．

この定理の証明をここではしないが，元々の Vinberg の論文 [15] にある証明は，凸性の証明の所にギャップがある．志摩裕彦 [11, 第 10 章] には幾何学的な証明がある．より直接的な証明があってもいいはずだが，ここでは，Piatetski–Shapiro 代数に持ち込む方法を紹介する．

Lie 代数 $\mathfrak{h}$ はベクトル空間（可換 Lie 代数と見る）V に作用しているので，半直積 $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \ltimes V$ を作る．これは土台のベクトル空間は $\mathfrak{h} \oplus V$（ベクトル空間の直和）で，ブラケットを次式で定義する Lie 代数である：

$$[X+v,\, X'+v'] = [X, X'] + (Xv' - X'v) \qquad (X, X' \in \mathfrak{h},\, v, v' \in V).$$

V は $\mathfrak{g}$ の可換なイデアルになっていることに注意．さらに，$\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 J を次式で定義し，$s \in \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ にゼロ拡張する：

$$\begin{aligned} J(L_x + y) &= L_y - x \qquad (x, y \in V), \\ \langle\, s, L_x + y \,\rangle &= \langle\, s, y \,\rangle \qquad (x, y \in V). \end{aligned}$$

明らかに $J^2 = -I$ となっている．すなわち，J はベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上の複素構造である（概複素構造）．

命題 9.6.　三つ組 $(\mathfrak{g}, J, s)$ は Piatetski–Shapiro 代数になっている．すなわち，

(1) $\mathfrak{g}$ は分裂可解 Lie 代数である．

(2) J は可積分条件をみたす：

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] = [JX, JY] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

(3) $\langle\, s, [JX, Y] \,\rangle$ は $\mathfrak{g}$ に内積を定めて，その内積に関して J は直交変換になっている．

証明．　(1) $\mathfrak{g}$ 上の作用素 $\operatorname{ad} L_x$ $(x \in V)$ と $\operatorname{ad} y$ $(y \in V)$ は，分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus V$ に関して，それぞれ次の形をしている：

$$\operatorname{ad} L_x = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{ad} L_x & 0 \\ \hline 0 & L_x \end{array}\right), \qquad \operatorname{ad} y = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline * & 0 \end{array}\right).$$

これより $\mathfrak{g}$ が分裂可解であることがわかる．

(2) $X = L_x + y,\ Y = L_u + v\ (x, y, u, v \in V)$ として左辺を計算しよう：

$$
\begin{aligned}
&[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] \\
&\qquad = [L_x + y,\ L_u + v] + J[L_y - x,\ L_u + v] + J[L_x + y,\ L_v - u] \\
&\qquad = L_{x\triangle u - u\triangle x} + x\triangle v - u\triangle y + J(L_{y\triangle u - u\triangle y} + y\triangle v + u\triangle x) \\
&\qquad\qquad + J(L_{x\triangle v - v\triangle x} - x\triangle u - v\triangle y) \\
&\qquad = L_{x\triangle u} - L_{u\triangle x} + x\triangle v - u\triangle y + L_{y\triangle v} + L_{u\triangle x} - y\triangle u + u\triangle y \\
&\qquad\qquad - L_{x\triangle u} - L_{v\triangle y} - x\triangle v + v\triangle x \\
&\qquad = L_{y\triangle v - v\triangle y} + L_v x - L_y u = [L_y - x,\ L_v - u] \\
&\qquad = [JX, JY].
\end{aligned}
$$

(3) 再び $X = L_x + y,\ Y = L_u + v$ とおくと，

$$[JX, Y] = [L_y - x,\ L_u + v] = [L_y, L_x] + (L_y v + L_u x).$$

ゆえに

$$\langle\, s, [JX, Y]\,\rangle = \langle\, s, y\triangle v\,\rangle + \langle\, s, u\triangle x\,\rangle$$

となって，$\mathfrak{g}$ に内積を与えている．この内積で J が直交変換になっていることはほぼ明らかであろう． $\square$

注意 9.7. $\{$Piatetski–Shapiro 代数$\} \leftrightarrow \{$等質 Siegel 領域$\}$,
$\{$clan から得られる Piatetski–Shapiro 代数$\} \leftrightarrow \{$等質管状領域$\}$.
等質管状領域とは，第 1 種の Siegel 領域で，等質開凸錐 $\Omega \subset V$ により，$\Omega + iV$ と表される領域のこと．管状領域ではない Siegel 領域も存在する．

命題 9.6 により，定理 9.5 の証明は，Rossi–Vergne [8, Theorem 4.15] に帰着させることになるが，Pietetski–Shapiro 代数の構造論を展開する必要が出てくる．

最後に接続代数に関して述べておこう．$\Omega \subset V$ を等質な正則開凸錐とし，$E \in \Omega$ を固定する．Ω^* で Ω の双対凸錐を表して，

$$\phi(x) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle\, \lambda, x\,\rangle}\, d\lambda \qquad (x \in \Omega)$$

を Ω の特性函数とする（§3 参照）．$\sigma_E(x, y) := D_x D_y \log \phi(E)\ (x, y \in V)$ は V に内積を定めたことを思い出しておこう．実際，clan の構造を使うと，$\sigma_E(x, y) = \operatorname{tr} L_{x\triangle y}$ であることを見た．

定義． $\sigma_E(xy, z) := -\dfrac{1}{2} D_x D_y D_z \log\phi(E)\ (x, y, z \in V)$ で V に積を定義する．この積を導入した代数 V を，Ω の接続代数と呼ぶ．

注意 9.8. (1) $\log\phi$ は滑らかなので，接続代数は可換である．
(2) σ_E は接続代数の結合的な内積になっている．すなわち，$T_x y = xy$ とおくと

$$\sigma_E(T_x y, z) = \sigma_E(xy, z) = \sigma_E(xz, y) = \sigma_E(y, T_x z)$$

となって，かけ算作用素 T_x は自己共役である．
(3) 問 3 より，$\sigma_E(x^2, x) = \sigma_E(x \triangle x,\, x)$ である．

定理 9.9 (Dorfmeister)**.** Ω が自己双対であるための必要十分条件は，Ω の接続代数が Jordan 代数になることである．

定理 9.10 (Albert の定理の翻訳)**.** V を Ω の接続代数とする．V がべき結合的であるための必要十分条件は，V が Jordan 代数になっていることである．

証明． Jordan 代数はべき結合的なので，十分性のみを示せばよい．V はべき結合的であるとする．V が可換であることに注意して，等式 $(x+y)^2(x+y)^2 = (x+y)\big((x+y)(x+y)^2\big)$ を展開すると：

$$(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) = (x+y)\big(x^3 + 2x(xy) + xy^2 + yx^2 + 2(xy)y + y^3\big).$$

x について 3 次，y について 1 次のところを取り出すと

$$4x^2(xy) = 2x(x(xy)) + x(x^2y) + x^3y.$$

任意の $z \in V$ との内積をとると

$$4\sigma_E(x^2(xy), z) = 2\sigma_E(x(x(xy)), z) + \sigma_E(x(x^2y), z) + \sigma_E(x^3y, z).$$

かけ算作用素の自己共役性を使ってこれを書き直すと

$$4\sigma_E(xy, x^2z) - \sigma_E(x^2y, xz) = 2\sigma(x(x(xy)), z) + \sigma_E(x^3, yz).$$

再びかけ算作用素の自己共役性から，右辺は y, z に関して対称．ゆえに左辺も y, z に関して対称のはずである．よって

$$4\sigma_E(xy, x^2z) - \sigma_E(x^2y, xz) = 4\sigma_E(xz, x^2y) - \sigma_E(x^2z, xy).$$

移項して 5 で割ると，$\sigma_E(xy, x^2z) = \sigma_E(x^2y, xz)$ を得る．かけ算作用素の自己共役性と z の任意性から，$x^2(xy) = x(x^2y)$ を得る． □

例 9.11. V をユークリッド型の Jordan 代数とし，Ω を V の対称錐とする．$\operatorname{tr} L(xy)$ は V に結合的な内積を与えている（命題 7.2）．以下 $\langle x \mid y \rangle = \operatorname{tr} L(xy)$ と置こう．Ω の特性函数は

$$\phi(u) = \int_\Omega e^{-\langle u \mid y \rangle}\, dy \qquad (u \in \Omega).$$

V の単位元を e とし，$x \in V$, $u_t = (\exp tL(x))e$ として，

$$\frac{d}{dt} \log \phi(u_t)\Big|_{t=0}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} \log \phi(u_t)\Big|_{t=0}, \qquad \frac{d^3}{dt^3} \log \phi(u_t)\Big|_{t=0}$$

などを計算することにより

$$\begin{aligned} D_x \log \phi(e) &= -\operatorname{tr} L(x), \\ D_x^2 \log \phi(e) &= \operatorname{tr} L(x^2), \\ D_x^3 \log \phi(e) &= -2 \operatorname{tr} L(x^3) \end{aligned}$$

を得る．

参 考 文 献

[1] J. Faraut and A. Korány, Analysis on summetric cones, Clarendon Press, 1994.

[2] 平井武，線型代数と群の表現 I, II, 朝倉書店（すうがくぶっくす），2001.

[3] H. Ishi, The gradient maps associated to certain non-homogeneous cones, Proc. Japan Acad., **81** (2005), 44–46.

[4] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. of Math., **35** (1934), 29–64.

[5] 小林俊行・大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005.

[6] 村上信吾，連続群論の基礎，朝倉書店（復刊基礎数学シリーズ），2004.

[7] T. Nomura, On a certain 8-dimensional non-symmetric homogeneous convex cone, In "Quantization and Analysis on Symmetric Spaces (H. Upmeier Ed.)", ESI preprint **1793** (2006), 70–73.

[8] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324–389.

[9] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo–Princeton, 1980.

[10] 佐武一郎，リー環の話，日本評論社［新版］（日評数学選書），2002.

[11] 志摩裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房，2001.

[12] 杉浦光夫，リー群論，共立出版，2000.

[13] È. B. Vinberg, Homogeneous cones, Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 787–790.

[14] È. B. Vinberg, The Morozov–Borel theorem for real Lie groups, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 1416–1419.

[15] È. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[16] 山内恭彦・杉浦光夫，連続群論入門，培風館（新数学シリーズ），1960.

[17] 横田一郎，群と位相，裳華房，1971.