解 析 学 A 1 演 習

§1.　複素数と複素平面　　　　2006 年 10 月 2 日出題

[**1.1**]　α は虚数（実数でない複素数）であるとする．$\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数になるための必要十分条件は $|\alpha|=1$ であることを示せ．
（α を実部・虚部にわけることなく計算すること．）

[**1.2**]　平方して $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ となる複素数を α とする．平方して $b+ia$ となる複素数を α を用いて表せ（$\overline{\alpha}$ を用いてもよい）．

[**1.3**]　z,w は 0 は 0 でない複素数とする．

$$(z+w)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$

が 4 以上の実数であるための必要十分条件は，$\dfrac{z}{w}$ が正の実数であることを示せ．

[**1.4**]　$c>0$ とする．複素数 z,w に対して次の不等式を示せ：

$$|z+w|^2 \leqq (1+c)\,|z|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|w|^2$$

[**1.5**]　$(5-i)^4(1+i)$ の偏角に注目して，次式を示せ：

$$\frac{\pi}{4}=4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$$

[**1.6**]　$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ w=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ を用いて次を示せ：

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$
$$\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,\right)}$$

[**1.7**]　複素数 z は，$\dfrac{(i-1)z}{i(z-2)}$ が実数になるように動くものとする．このとき z は複素平面上でどんな曲線を描くことになるか．

[**1.8**]　α は 0 でない複素数とする．

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$$

をみたす複素数 z は，2 点 $0,\alpha$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線上を動くことを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 A 1 演 習

§2. 複素数の数列と級数　　　2006年10月10日出題

[**2.1**] 複素平面上に，0 と異なる n 個の点 $z_1, \dots, z_n$ があって，それらはすべて原点を通るある直線 ℓ が定める半平面の片側にあるとする．このとき

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} \neq 0$$

であることを示せ．(Hint: ℓ が虚軸なら話はやさしい...)

[**2.2**] 複素平面上の点列 $\left\{ \dfrac{n}{n+1} e^{n\pi i/4} \right\}$ の集積点（適当な部分列の極限点）を調べよ．

[**2.3**] $z \in \mathbb{C}$ とし，$z_n = 1 + \dfrac{z}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z_n|^n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Arg} z_n$ を求めよ．

[**2.4**] $z \in \mathbb{C}$ は固定された複素数で $z \neq 0$ とする．各自然数 n に対して，$n+1$ 個の点 $\alpha_p = e^{i\theta_p}$ を考える．ただし $\theta_p = \left(1 + \dfrac{p}{n}\right) \dfrac{\pi}{2}$ である．原点と α_p を結ぶ直線を ℓ_p $(p = 0, 1, \dots, n)$ とし，ℓ_p に関する z の対称点を z_p とする．$s_n := z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|s_n|}{n}$ を求めよ．

[**2.5**] 一般化された 2 項係数を $\dbinom{\alpha}{n}$ で表す．すなわち $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

である．数列 $\left\{ n \dbinom{i}{n} \right\}$ は有界であることを示せ．

[**2.6**] $|z| \neq 1$ のとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$ は絶対収束することを示せ．

[**2.7**] $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$|\operatorname{Arg} z_n| \leqq \alpha$ $(n = 1, 2, \dots)$ が成り立っているとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の収束から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ の収束が導かれることを示せ．

[**2.8**] $\operatorname{Re} z_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ が共に収束するなら，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ は絶対収束することを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 A 1 演 習

§3.　べき級数の収束半径　　　2006 年 10 月 16 日出題

[**3.1**]　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ $(0 < \rho \leqq \infty)$ であるとき，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ の収束半径は ∞ であることを直接（Cauchy–Hadamard を用いないで）示せ.

[**3.2**]　次のべき級数の収束半径を求めよ：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} z^n$

[**3.3**]　次のべき級数の収束半径と和を求めよ：$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n) z^n$

[**3.4**]　次のべき級数の収束半径を求めよ：$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$

[**3.5**]　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ $(0 \leqq \rho \leqq \infty)$ であるとき，べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n}$ の収束半径はどうなるか.

[**3.6**]　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を ρ_1 $(0 < \rho_1 \leqq \infty)$，べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径を ρ_2 $(0 < \rho_2 \leqq \infty)$ とする．べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ の収束半径 ρ は，$\rho_1 \rho_2 \leqq \rho$ をみたすことを示せ．等号ではない実例も挙げよ.

[**3.7**]　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ が $|z| < 1$ で収束することは既知であるが，この収束は一様収束ではないことを示せ.

[**3.8**]　(1) べき級 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$ の収束半径を求めよ.

（Remark: $a_n \sim \log n$ は不要．もっと荒っぽい評価で十分.）

(2) 次の等式を示し，(1) のべき級数の和を求めよ：

$$\sum_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n = \frac{1}{1-z} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} - z^{N+1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right)$$

(3) (2) の答（2 個の函数の積になること）を知って，改めて (1) のべき級数を考察せよ（厳密な証明は不要）.

以上

解 析 学 A 1 演 習

§4.　べき級数の演算　　　　　　2006 年 10 月 23 日出題

[4.1]　微分方程式 $(1+z)\dfrac{dy}{dz} = \alpha y$ の収束べき級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ をすべて求めよ．これを利用して，$f_\alpha(z) := (1+z)^\alpha$ $(|z| < 1)$ に対して，$f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z)$ が成り立つことを示せ．(Hint: $F(z) := f_\alpha(z) f_\beta(z)$ がみたす微分方程式を考える．)

[4.2]　Gaußの超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \bigl(\gamma - (\alpha+\beta+1)z\bigr)\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$$

を考える．$\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ならば，収束べき級数解で，$y(0) = 1$ となるものがただ一つ存在することを示せ．収束半径も求めよ．

[4.3]　数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geqq 2) \qquad (*)$$

で定まるものとして，べき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を考える．線型漸化式の解の構造についての一般論を仮定しないで，以下の問に答えよ．

(1) $0 \leqq a_n \leqq 2^n$ $(n = 0, 1, \dots)$ を示すことにより，$f(z)$ の収束半径は正であることを示せ．

(2) $f(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$ であることを示せ．

(3) (2) の右辺を部分分数に分けてからべき級数展開をし，z^n の係数を比較することから a_n を求めよ．また，$f(z)$ の収束半径と漸化式 $(*)$ の特性方程式の根の関係を述べよ．

[4.4]　$\cosh z \cdot \cos z$ をべき級数に展開せよ．ただし $\cosh z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ である．(一般項を求めること．Hint: $\mathrm{Re}\,(1+i)^{2n}$.)

[4.5]　べき級数展開 $\dfrac{1}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} z^n$ を示せ．

[4.6]　$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{z^{2m+1}}{2m+1}$,　$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{z^{2m+1}}{2m+1}$　とする．

$$f\bigl(g(z)\bigr) - g\bigl(f(z)\bigr)$$

をべき級数であらわすときの初項を求めよ．

次ページにも問題がある

[**4.7**]　$\operatorname{Arcsin} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ を，$(1-z^2)^{-1/2}$ の $|z|<1$ におけるべき級数展開，及び $\operatorname{Arcsin} z$ が $(1-z^2)^{-1/2}$ の $|z|<1$ における原始函数の一つであることから示せ．

[**4.8**]　函数 $f(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin} z)^2$ を考える．

(1) $y = f(z)$ は微分方程式 $(1-z^2)y'' - zy' = 1$ をみたすことを示せ．
(2) $f(0) = f'(0) = 0$ に注意して，

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin} z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{z^{2n}}{2n}$$

を，微分方程式のべき級数解を求めるという方針で示せ．
(Remark: 結果を $\operatorname{Arcsin} z$ のべき級数展開と見比べてみよ．)

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 A 1 演 習

§5.　解析性　　　　　　　　2006 年 11 月 6 日出題

[5.1]　$f(z) = \dfrac{1}{z}$ を $z = 2$ の近傍でべき級数に展開せよ．

[5.2]　$f(z), g(z)$ は領域 D において解析的であるとし，かつ積 $f(z)g(z)$ は D において恒等的に 0 に等しいとする．このとき，$f(z)$ が D で恒等的に 0 であるか，または $g(z)$ が D において恒等的に 0 であることを示せ．

[5.3]　$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で解析的であるとする．$f(z)$ が実軸上でつねに実数値をとり，虚軸上でつねに純虚数値（0 を含める）をとるならば，$f(z)$ は奇函数であることを示せ．

[5.4]　$f(z)$ は $z = 0$ のある近傍で定義された解析函数であるとする．この函数が，十分大きなすべての自然数 n に対して，

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$$

という性質を持つことがあるか．

（Hint: $f(z) - 2z$ という函数を考察してみよ．）

[5.5]　$z = 0$ を含む領域で解析的な函数 $f(z)$ が，十分大きなすべての自然数 n に対して $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\log n}$ をみたすようなことはないことを示せ．

（Hint: まず $z = 0$ の近傍で $|f(z)| \leqq M|z|$ となることを示せ．）

[5.6]　$z = 0$ を含む領域で解析的な函数 $f(z)$ が，十分大きなすべての自然数 n に対して $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ をみたすようなことはないことを示せ．

（Hint: こんどはまず $z = 0$ の近傍で適当な自然数 N に対して $|f(z)| \geqq m|z|^N$ となることから始める．）

[5.7]　$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{1+z^n} - \frac{z^{n+1}}{1+z^{n+1}}\right)$ は，$|z| < 1$ および $1 < |z| < \infty$ において解析的な函数を表すが，それらは解析接続によって互いに移れないことを示せ．

[5.8]　(1) x, y が実数であるとき，$|\sin(x+iy)|^2 = \dfrac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)$ となることを示せ．

(2) $r > 0$ を固定する．円周 $|z| = r$ 上における $|\sin z|$ の最大値を求めよ．

（Hint: $f(\theta) = |\sin(re^{i\theta})|^2$ とし，$f(\theta)$ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で考えてよいことを示せ．
$f'(\theta)$ を考察するとき，$t \geqq 0$ で，$\sin t \leqq t \leqq \sinh t$ であることに注意．）

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 **A 1** 演 習

§6. 初等函数　　　　2006 年 11 月 13 日出題

[6.1]　$6 = \sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4}\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ であるが，これを次のようにするとなぜおかしなことになるのか．

$$6 = \sqrt{36} = \sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{-4}\sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = -6$$

[6.2]　$1^{e^{\pi i/4}}$ のとり得る値の複素平面上での分布を調べよ．

[6.3]　(1) i^i のとり得る値をすべてあげよ．
(2) 累乗函数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^i$ は多価函数である．しかし，函数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto i^z$ を多価函数というのは，適当ではないことを説明せよ．

[6.4]　次の各式は，0 でない任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して正しいか．(2) では等式の意味も考える必要がある．

(1)　$\mathrm{Log}(z^2) = 2\,\mathrm{Log}\, z$,　　　(2)　$\log(z^2) = 2 \log z$.

[6.5]　$|z| < 1$, $|w| < 1$ ならば，$\mathrm{Log}\big((1+z)(1+w)\big) = \mathrm{Log}(1+z) + \mathrm{Log}(1+w)$ であることを，偏角の範囲に注意して，定義から直接示せ．

[6.6]　$|x| > 1$ である実数 x に対して，$\arcsin x$ の実部，虚部を x で表せ．

[6.7]　(1) $\tan(x+iy) = \dfrac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$ を示せ．

(2) 方程式 $\tan z = z$ の解は実数に限ることを示せ．
（Hint: $t \in \mathbb{R}$ のとき，$|\sin t| \leqq |t| \leqq |\sinh t|$ である．）

[6.8]　(1) $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ のとき，$\dfrac{z}{z-1}$ は Log の定義域に属していることを示し，次式をみたしていることを，一致の定理を利用して示せ．

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}(z-1)$$

(2) $f(z) = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}(z-1)$ とおくとき

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i}\big(f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\big) \qquad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, 1)$$

はどんな函数になるか．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 A 1 演 習

§7.　正則函数　　　　　　　　2006 年 12 月 4 日出題

[**7.1**]　函数 $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ において微分可能であるが，原点を含むいかなる領域でも正則ではないことを示せ．

[**7.2**]　次で定義される函数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ は，$z = 0$ で Cauchy–Riemann の関係式をみたすけれど，$z = 0$ では微分可能ではないことを示せ：

$$f(z) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \quad (z \neq 0), \qquad f(0) = 0$$

[**7.3**]　函数 $w = u + iv$（u, v は実数値）が $z = re^{i\theta}$ について正則であることを表す Cauchy–Riemann の関係式は次で与えられることを示せ：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\,\frac{\partial v}{\partial r}$$

[**7.4**]　極座標を用いて，$\dfrac{d\,\mathrm{Log}\,z}{dz} = \dfrac{1}{z}$ を示せ．

[**7.5**]　平面上のラプラシアンを $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．函数 $f(x, y)$ がなめらかならば，$\Delta f = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$ であることを示せ．これより特に，正則函数の実部または虚部は調和函数，すなわち Δ で消されることを示せ．
（正則函数は何回でも微分可能であることは未習だが本問では認める．）

[**7.6**]　$f(z) = u + iv$（u, v は実数値）が正則ならば，$\Delta u^2 = 2|f'(z)|^2$ であることを示せ

[**7.7**]　$u(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ について，$\Delta u = 0$ を確かめ，次に u を実部とする正則函数を $z = x + iy$ の函数として定めよ．

[**7.8**]　正則函数 $w = f(z)$ によって，z 平面の有界な領域 D と，w 平面の有界な領域 Δ とが一対一に対応しているとする．このとき，Δ の面積は

$$\iint_D |f'(z)|^2\,dxdy \qquad (z = x + iy)$$

で与えられることを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 A 1 演 習

§8.　線積分　　　　2006 年 12 月 11 日出題

[**8.1**]　双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ $(a > 0)$ の $\mathrm{A}(\sqrt{2}\,a, a)$ から $\mathrm{B}(\sqrt{2}\,a, -a)$ までの弧を C とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C (x^2\,dy + y^2\,dx)$ を計算せよ．

[**8.2**]　複素平面上の円 C で，$\displaystyle\int_C (x^2\,dy + y^2\,dx) = 0$ となるものを決定せよ．

[**8.3**]　$\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ を C が次のそれぞれの場合（いずれも 0 から $1+i$ まで）に計算せよ．

(1) 0 と $1+i$ を結ぶ線分．
(2) 0 と 1，1 と $1+i$ を結ぶ線分をつないだもの．
(3) 0 と $1+i$ を結ぶ放物線で，原点を頂点とするもの．

[**8.4**]　C が単位円の上半分（1 から -1 まで）であるとき，$\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ を計算せよ．ただし，$\sqrt{z}$ は $\sqrt{1} = -1$ であるような分枝をとるものとする．

[**8.5**]　$|z| = 1$ を正の向きに一周する道 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C |z-1|\,|dz|$ を計算せよ．

[**8.6**]　グリーンの公式を使って境界上の積分とすることで，次の積分を計算せよ：

$$\iint_D (x^4 + y^4)\,dxdy, \qquad D = \left\{(x, y)\ ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

[**8.7**]　$f(z)$ は $|z| \leqq 1$ で連続であるとする．$0 < r < 1$ である任意の r に対して $\displaystyle\int_{|z|=r} f(z)\,dz = 0$ ならば，$\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$ となることを示せ．

[**8.8**]　φ は単位円周上の連続函数であるとする．函数 $\displaystyle f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ は単位円の内部の各点 z で微分可能であって，導函数は $\displaystyle f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$ となることを，直接

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

を評価することで示せ．

以上

解 析 学 A 1 演 習

§9. Cauchy の積分定理 2006 年 12 月 18 日出題

[9.1] 積分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=r} \dfrac{4z-3}{2z^2-3z-2}\,dz$ を次のそれぞれの場合に計算せよ.

(1) $0 < r < \dfrac{1}{2}$, (2) $\dfrac{1}{2} < r < 2$, (3) $r > 2$.

[9.2] $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0\,]$ に含まれる任意のレギュラーな単純曲線 C に沿う次の積分を計算せよ，ただし，いずれも分枝は主値を考える.

(1) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \sqrt{z}\,dz$, (2) $\displaystyle\int_{-i}^{i} z^i\,dz$.

[9.3] $\displaystyle\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$ を計算せよ. これを利用して次の公式を導け：

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,d\theta = 2\pi\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$$

[9.4] $|z| = R$ $(R > 0,\ R \neq 1)$ の上半分を，$z = R$ から $z = -R$ に向かう道を C とするとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^2}$ を，定積分 $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}$ と比較することで求めよ.

[9.5] (1) $a > 0, b > 0$ は定数とする. $z = a\cos\theta + ib\sin\theta$ のとき，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{d\theta}\right)$ を θ で表せ.

(2) (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ を計算せよ.

[9.6] $a \in \mathbb{R}$ は定数として，次の定積分を考える：

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{2iax - x^2}\,dx.$$

(1) a を $-a$ に置き換えても積分の値は変わらないことに注意して，$a > 0$ としてよいことを示せ.

(2) 函数 e^{-z^2} を $-R-ia,\ R-ia,\ R,\ -R$ $(R > 0)$ を 4 頂点とする長方形上で積分し，次に $R \to \infty$ とすることで I を求めよ. (Hint: 縦の辺上の積分 $\to 0$ となる.)

次ページにも問題がある

[9.7] $|\alpha| \neq r$ とするとき，次の等式を示せ：

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-\alpha|^2} = \frac{2\pi r}{\left|r^2 - |\alpha|^2\right|}$$

Hint: $|z| = r$ 上では，$|dz| = -ir\,\dfrac{dz}{z}$ であることに注意して，被積分函数を次のように部分分数に分ける： $\dfrac{ir}{r^2 - |a|^2}\left(\dfrac{1}{z - \frac{r^2}{\overline{\alpha}}} - \dfrac{1}{z-\alpha}\right)$

[9.8] $r > 0$ とする．$\mathbb{C}$ 全体で正則な函数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$ を，

$$[-r, r] \cup \{re^{i\theta}\,;\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$$

に沿って積分することにより，次の (1), (2) を示せ．

(1) $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx - i\pi = -i\int_0^{\pi} \exp(ire^{i\theta})\,d\theta.$

(2) $\displaystyle\left|\int_{-r}^{r} \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi\right| < \frac{\pi}{r}.$

Hint: $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta \geqq \dfrac{2}{\pi}\theta$ に注意．

以上

解 析 学 A 1 演 習

§10. Cauchy の積分公式 2007 年 1 月 9 日出題

[10.1] Cauchy の積分公式により，ある正則函数の適当な点での値とみなすことで，次の各積分の値を求めよ：

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$, (2) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$.

[10.2] 次のそれぞれの円周 C について，積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$ を計算せよ：

(1) $C : |z-2| = 1$, (2) $C : |z-2| = 3$, (3) $C : |z-2| = 5$

[10.3] 積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3}\,dz$ の値を求めよ．

[10.4] $\displaystyle\int_{|z|=1} e^z z^{-(n+1)}\,dz$ を考えることにより

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0$$

を示せ．ただし n は自然数である．

[10.5] $|z| \neq 1$ とするとき，$\displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta$ を求めよ．

[10.6] $f(z)$ は閉単位円板を含む領域で正則であるとする．積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}\,dz$$

を計算することにより，次式を示せ：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2f(0) + f'(0), \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2f(0) - f'(0)$$

[10.7] $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| < 1$ で収束するべき級数とする．$|f(z)| < \dfrac{1}{1-|z|}$ $(|z| < 1)$ ならば

$$|a_n| \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)$$

であることを示せ．

次ページにも問題がある

[**10.8**]　函数 $f(z)$ は $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \geqq R\}$ $(R > 0)$ を含む領域で正則であるとする．このとき，$|z| > R$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{（積分は時計回り）}$$

が成り立つための必要十分条件は，$f(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$ となることである．これを示せ．

<u>十分性の証明へのヒント</u>：$R < |z| < R + r$ なら

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\zeta|=R+r} - \int_{|\zeta|=R} \right) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{（積分は反時計回り）}$$

である．$f(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$ ならば，$r \to \infty$ のとき，第 1 の積分 $\to 0$ となることを示せ．

$\boxed{\text{以上}}$