数学特論 8 (学部) 表現論大意 (大学院) レポート問題

出題：2006 年 1 月 25 日 (担当：野村隆昭)

* [1] の (1),(2) と [2] のすべてに解答すること．
* A4 レポート用紙にて数理事務室（理学部本館 4 階）に提出のこと．

<u>提出期限</u>：2006 年 2 月 10 日 (金) 17 時　厳守

[**1**] (1) $\lambda \in \mathbb{C}$ はパラメータで，$\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{1}{2}$ とする．微分方程式

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}\,y' + y = 0 \qquad \Big({}' = \frac{d}{dz}\Big)$$

の解 $y = y(z)$ で，$\mathbb{C}$ 上の整函数 (entire function) であり，$y(0) = 1$ をみたすものが一意的に存在することを示せ．この一意解を $j_\lambda(z)$ で表す．

<u>ヒント：</u>　べき級数 $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ $(a_0 = 1)$ から出発して次式を得よ：

$$y = \Gamma(\lambda+1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\lambda+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m}$$

微分方程式の形から，整函数解 $y = y(z)$ は $y'(0) = 0$ となっていることに注意．収束半径をチェックせよ．

(2) $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} 上の標準測度を σ とする（講義の通り）．この測度のフーリエ変換 $\widehat{\sigma}(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$，ただし

$$\widehat{\sigma}(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-i\xi\cdot u}\,d\sigma(u) \quad (\xi\cdot u \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ における } \xi \text{ と } u \text{ の標準内積})$$

を，無限級数 $e^{-i\xi\cdot u} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}(\xi\cdot u)^m$ を直接代入し，項別積分すること（正当化すること）により計算せよ．結果は (1) の $j_\lambda(z)$ を用いて表せ．

<u>ヒント：</u>　$\xi \mapsto \int_{S^{n-1}}(\xi\cdot u)^m\,d\sigma(u)$ は，回転不変な m 次斉次多項式函数である．$m = 2k$ のとき，それは $\|\xi\|^{2k}$ の定数倍．その定数は $\xi = \mathbf{e}_1 = {}^t(1,0,\dots,0)$ としたときの定積分の値 $\int_{S^{n-1}} u_1^{2k}\,d\sigma(u)$ に等しい（講義中に，より一般の積分を計算してある）．問 (1) の j_λ と比較する際に，ガンマ函数の倍数公式（証明不要）を使う：

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(z)\Gamma\big(z+\tfrac{1}{2}\big).$$

裏面に続く

[**2**] 各 $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{C}^n$ と $k=0,1,2,\dots$ に対して

$$q_c^k(u) := (c_1u_1+\cdots+c_nu_n)^k \qquad (u=(u_1,\dots,u_n)\in S^{n-1})$$

とおく．また $\mathcal{N} := \{c\in\mathbb{C}^n\ ;\ c_1^2+\cdots+c_n^2=0\}$ とする．このとき，任意の $c\in\mathcal{N}$ に対して，$q_c^k\in\mathcal{Y}_k$ （k 次の spherical harmonics の空間）であり，$\mathcal{Y}_k$ は $\{q_c^k\ ;\ c\in\mathcal{N}\}$ で生成されることを示せ．

<u>ヒント：</u> 講義で扱った $\mathcal{Y}_k$ への回転群の表現 $T(g)Y(u)=Y(g^{-1}u)$ を考える．
$g\in SO(n,\mathbb{R})$ とすると，$c\in\mathcal{N}$ ならば $gc\in\mathcal{N}$ かつ $T(g)q_c^k=q_{gc}^k$ に注意．

$\boxed{\text{以上}}$