

# 函数解析特論 (学部) レポート問題

## 表現論 a (大学院)

出題：2004年7月13日

(担当：野村隆昭)

\* [1] と [2] の両方に解答せよ。

\* A4 レポート用紙にて数学教室事務室に提出のこと。

提出期限：2004年9月24日 (金) 厳守

---

---

[1] 複素 Hilbert 空間  $H = L^2[0, 1]$  で考える。内積は  $(f | g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$  で、ノルムは  $\|f\| := \sqrt{(f | f)}$  である。

(1) 各  $f \in H$  に対して、積分  $\int_0^t f(s) ds$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は意味を持ち、次の不等式が成り立っていることを示せ：

$$\left| \int_0^t f(s) ds \right| \leq \sqrt{t} \|f\|.$$

(2) 等式  $Tf(t) := \int_0^t f(s) ds$  によって  $H$  上の有界線型作用素  $T$  が定義できて、 $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  が成り立つことを示せ。

(3) 作用素  $T$  は compact であることを、Ascoli-Arzelà の定理を応用して示せ。

(4) さらに  $T$  は Hilbert-Schmidt 作用素でもあることを示し、その Hilbert-Schmidt ノルムを求めよ。

(5) 作用素  $T$  の共役作用素  $T^*$  を積分作用素として表せ。そして作用素  $TT^*$  は

$$TT^*f(t) = \int_0^1 \min(t, s)f(s) ds$$

と表される積分作用素であることを示せ。

(6) 作用素  $TT^*$  の固有値は、存在すると仮定して、すべて正であることを示せ。

(7) 作用素  $TT^*$  の固有値は、 $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) であり、対応するノルムが 1 の固有関数は  $\varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin \frac{2k+1}{2} \pi t$  であることを示せ。

(8) 一般に Hilbert 空間上の有界線型作用素  $A$  に対して、 $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$  であること (要証明) に注意して、 $\|T\| = \frac{2}{\pi}$  であることを示せ。

(REMARK :  $\frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

次ページに続く

[2] 上半三角行列のなす位相群

$$S := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & x_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) \right\}$$

の左 Haar 測度  $d_l x$  と右 Haar 測度  $d_r x$  はそれぞれ

$$d_l x = \frac{1}{|x_{11}^n x_{22}^{n-1} \cdots x_{nn}|} \prod_{i \leq j} dx_{ij}, \quad d_r x = \frac{1}{|x_{11} x_{22}^2 \cdots x_{nn}^n|} \prod_{i \leq j} dx_{ij}$$

で与えられることを示せ.

以上