平成14年度 函数解析 試験問題

（担当：野村隆昭）

2003年1月30日実施　　時間 **10:30 〜 12:30**

⋆ **[1]** 〜 **[4]** のすべての問題に解答のこと．

⋆ 解答用紙は 片面のみ を 縦長 に使用のこと．使用枚数に制限はない．

⋆ すべての解答用紙の上部に入学年度，氏名，学生番号を（理学部以外の人は所属学部も）記入のこと．1枚目の氏名にはふりがなを添えて下さい．

⋆ 1枚の解答用紙に，たとえば **[1]**，**[2]** の小問の解答を混在させぬこと（従って全問を解答する場合，解答用紙は最低4枚ということになる）．

---

[1] エルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を持つ複素 Hilbert 空間を H とし，内積から定まるノルムを $\|\cdot\|$ とする．次の各問いに答えよ（小問は独立である）．

(1) $x, y \in H$，$\|x\| = \|y\| = 1$ で $x \neq y$ ならば，$0 < t < 1$ である任意の t に対して，$\|tx + (1-t)y\| < 1$ であることを示せ．

(2) H 上の線型作用素 T_n $(n = 1, 2, \dots)$ および T はすべて等長作用素とする．もし $T_n \xrightarrow{\mathrm{w}} T$ ならば，$T_n \xrightarrow{\mathrm{s}} T$ であることを示せ．ただし線型作用素 U が等長であるとは，任意の $x \in H$ に対して，$\|Ux\| = \|x\|$ が成立することである．

[2] X は，$f(0) = 0$ をみたす，閉区間 $[0, 1]$ 上の連続函数 f の全体に L^2 ノルムを入れたノルム空間（pre-Hilbert 空間）とする（小問は独立である）．

(1) X 上の線型形式 $L(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ は連続ではないことを示せ．

(2) $M := \left\{ f \in X \,;\, \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$ は閉部分空間で，$M \neq X$ であるが，$M^\perp = \{0\}$ であることを示せ．

[3] Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ で考える．また，$\mathbb{R}$ 上の函数 φ は本質的に有界であって，その本質的上限を $\|\varphi\|_\infty$ で表す．線型作用素

$$(Tf)(t) := \varphi(t) f(t) \qquad (t \in \mathbb{R},\ f \in L^2(\mathbb{R}))$$

は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素であって $\|T\| = \|\varphi\|_\infty$ となることを示せ．ここで，φ が本質的に有界であるとは，ある正定数 a が存在して，$\{t \in \mathbb{R} \,;\, |\varphi(t)| > a\}$ が零集合となることであり，このような a の下限を φ の本質的上限という．

[4] $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する複素数列とする．$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$ 上の線型作用素 $T : (x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$ はコンパクトであることを示せ．

以上