# 微分積分学 B・演習問題 1

(2001/10/05)　　　　（担当：野村隆昭）

---

**[1]** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}$ を求めよ．

**[2]** $I_n := \displaystyle\int (\operatorname{Arcsin} x)^n \, dx$ とおくとき，次式が成り立つことを示せ：

$$I_n = x(\operatorname{Arcsin} x)^n + n\sqrt{1-x^2}\,(\operatorname{Arcsin} x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

**[3]** $f(x)$ の原始函数（の 1 つ）を $F(x)$ とするとき，次式を示せ：

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

ただし本問においては，$f(x)$ や $f^{-1}(x)$ についての条件にはあまり拘らないものとする．

**[4]** $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\tan^2 x}$ を求めよ．

**[5]** $a, b$ は実数の定数で $a^2+b^2 \neq 0$ とする．$\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ を求めよ．

(Hint: $a^2 > b^2$, $a^2 = b^2$, $a^2 < b^2$ で場合をわける．)

**[6]** （**10 月 19 日提出のレポート問題**）
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を $x = \sinh t$ とおくことにより求めよ．

# 微分積分学 B・演習問題 2

(2001/10/19)　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

**[ 1 ]**　$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で積分可能ならば，$|f(x)|$ も閉区間 $[a,b]$ で積分可能であることを示せ．

**[ 2 ]**　$f(x)$, $g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で積分可能であるとする．閉区間 $[a,b]$ に属する任意の有理数 $q$ について $f(q)=g(q)$ が成り立つならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

となることを示せ．

**[ 3 ]**　閉区間 $[a,b]$ で（広義の）単調な函数はこの区間で積分可能であることを示せ．

**[ 4 ]**　閉区間 $[a,b]$ で $f(x)$ は連続，$g(x)$ は単調であるとする．このとき，$f(x)g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で積分可能であることを示せ．

**[ 5 ]**　次の定積分を計算せよ：

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{5x^2-2x+1} \qquad \left(答：\tfrac{3\pi}{8}\right)$$

（普通に計算すれば，解析概論 p. 102 の例 2 のようなことにはならない ...）

**[ 6 ]**　（**10 月 26 日提出のレポート問題**）

函数 $f(x) := \dfrac{1}{x}$ は区間 $[1,\infty)$ では一様連続であるが，区間 $(0,1]$ では一様連続ではないことを示せ．

# 微分積分学 B・演習問題 3

(2001/10/26)　　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

**[1]**　閉区間 $[0,1]$ で積分可能な函数 $f(x)$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,dx$ を求めよ．

**[2]**　閉区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ で次の函数 $f(x)$ を考える： $f(0)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ とし，

$$f(x) := \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

(1) $f(x)$ は連続であることを確かめよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$ を示せ．

（もちろん直接計算するわけではない．$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ を観察すると ...）

**[3]**　閉区間 $[0,1]$ 上の連続函数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (\forall x\in[0,1])$$

をみたしているとする．このとき，$f(x)$ は $[0,1]$ 上恒等的に $0$ であることを示せ．

（$M := \displaystyle\max_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)|$ とすると，まず $|f(x)| \leqq Mx$ が出る．これを再び代入すると ...）

**[4]**　$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上連続で，$f(x)>0\ (\forall x\in[0,1])$ とする．次の不等式を示せ：

$$\log\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \geqq \int_0^1 \log f(x)\,dx.$$

**[5]**　函数 $f(x)$ は有限閉区間 $[a,b]$ で微分可能であって，導函数 $f'(x)$ は $[a,b]$ で積分可能であると仮定する．

$$\Delta_n := \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$ を求めよ．　　　　答：$\dfrac{b-a}{2}\cdot(f(a)-f(b))$

**[6]**　**（11 月 2 日提出のレポート問題）**

(1) 函数 $f(t) = \dfrac{1}{\log t} - \dfrac{1}{t-1}$ は $t\to 1$ のとき有界にとどまることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\log t}$ を求めよ．

# 微分積分学 B・演習問題 4

(2001/11/02)　　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

**[1]**　$a > 0$ は定数とする．次の定積分を計算せよ：

$$\int_0^a \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx.$$

答：$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a$.

**[2]**　$a$ は $0 \leqq a \leqq 1$ をみたす定数とする．閉区間 $[0,1]$ で連続で，つねに $f(x) \geqq 0$ であるような函数 $f(x)$ で，次の 3 つの等式をみたすものを求めよ：

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = a^2.$$

**[3]**　実数値函数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の $C^1$ 級函数で，$f(1) = 0$ となっているとする．このとき次の不等式を示せ．等号が成り立つのは $f(x)$ がどのような函数のときか．

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx.$$

**[4]**　函数 $f(x)$ は有限閉区間 $[a,b]$ で $C^1$ 級であるとする．このとき次を示せ：

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin tx\,dx = 0.$$

**[5]**　閉区間 $[0,1]$ 上の $C^1$ 級函数の列 $\{f_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \{|f_n(x)| + |f_n'(x)|\}\,dx = 0$$

をみたすならば，$\{f_n\}$ は $[0,1]$ 上で $0$ に一様収束することを示せ．

**[6]**　**（11 月 9 日提出のレポート問題）**
函数 $f(x)$ が積分可能なところで

$$f_1(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \quad f_2(x) := \int_0^x f_1(t)\,dt, \quad \cdots\cdots, \quad f_k(x) := \int_0^x f_{k-1}(t)\,dt$$

とおくとき

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)\,dt$$

であることを示せ．

# 微分積分学 B・演習問題 5

(2001/11/09)　　　　　　　　　　　　(担当：野村隆昭)

---

**[1]**　$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とする．広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log x\,dx$ の収束発散を調べよ．

**[2]**　広義積分 $\displaystyle\int_{2/\pi}^\infty \log\Bigl(\cos\frac{1}{x}\Bigr)\,dx$ の収束発散を調べよ．

**[3]**　$a, b\ (a < b)$ は定数とする．次の広義積分は収束することを確かめ，その値を求めよ：

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \qquad\qquad (\text{答：}\pi).$$

**[4]**　$a > 0$ は定数とする．次の広義積分は収束することを確かめ，その値を求めよ：

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\,dx \qquad\qquad (\text{答：}\tfrac{\pi\log a}{2a}).$$

**[5]**　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(x+n)^2}$ を積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{(x+t)^2}$ と比較することにより，次の極限を求めよ：

$$\lim_{x\to\infty} x \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(x+n)^2}.$$

**[6]**　**(11 月 16 日提出のレポート問題)**
$p, q \in \mathbb{R}$ は定数とする．次の広義積分の収束発散を調べよ：

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

# 微分積分学 B・演習問題 6

(2001/11/16)　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

**[1]**　適当な函数の凸性（あるいは凹性）を用いて，次の 2 つの数の大小を比較せよ：

$$\sqrt[7]{7+\sqrt[7]{7}}-\sqrt[7]{7}, \qquad \sqrt[7]{7}-\sqrt[7]{7-\sqrt[7]{7}}.$$

**[2]**　広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x}$ は収束することを示せ.

**[3]**　$a>0,\ b>0$ は定数とする．次式を示せ（積分の収束も確かめること）：

$$\int_0^\infty \left(e^{-a^2/t^2}-e^{-b^2/t^2}\right)dt=\sqrt{\pi}\,(b-a).$$

（Hint: 変数変換 $\frac{1}{t}=x$）

**[4]**　$H_n(x):=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ $(n=0,1,\dots)$ を $n$ 次の Hermite 多項式という．次の関係式を示せ：

$$\int_{-\infty}^\infty H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ 2^n\,n!\sqrt{\pi} & (m=n).\end{cases}$$

**[5]**　函数 $f,\ g$ は区間 $I$ で 2 回微分可能で，$I$ 上でつねに $f(x)>0,\ g(x)>0$ が成り立っているとする．函数 $\log f(x)$ と $\log g(x)$ が共に $I$ で凸ならば，$\log(f(x)+g(x))$ も $I$ で凸であることを示せ.

**[6]**　**（11 月 30 日提出のレポート問題）**

(1) 函数 $f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ で定義されて連続であるとする．もし $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx<\infty$ かつ $\displaystyle l:=\lim_{x\to\infty}f(x)$ が存在するならば $l=0$ であることを示せ.

(2) 函数 $f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ で定義されて $C^1$ 級であるとする．もし $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx<\infty$ かつ $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|\,dx<\infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であることを示せ.

# 微分積分学 B・演習問題 7

(2001/11/30)　　　　　　　　　(担当：野村隆昭)

---

**[1]** $t > 1$ とする．$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{t - \cos x}$ を求め，それより $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(t - \cos x)^2}$ を求めよ．

答：$\frac{\pi t}{(t^2-1)^{3/2}}$

**[2]** $a > 0, b > 0$ とする．次の定積分を $\dfrac{\partial I}{\partial a}$ を計算することにより求めよ：

$$I(a,b) := \int_0^{\pi/2} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx.$$

答：$\pi \log \frac{a+b}{2}$

**[3]** $\displaystyle f(x) := \int_0^{\infty} e^{-t}\, \frac{1 - \cos tx}{t^2}\, dt$ を求めよ．

Hint:$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ を示せ．

**[4]** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^x} = 1$ を示せ．

Hint: $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ と分けてみる．$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$1 - t^x \leqq (1 + t^x)^{-1}$ である．

**[5]** $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ を示せ．

Hint: $t^{-t} = e^{-t\log t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t\log t)^n}{n!}$.

**[6]** (**12** 月 **7** 日提出のレポート問題)

$x > 0$ で 2 つの函数 $\displaystyle f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt,\ \ g(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ を考える．

(1) $f(x)$ も $g(x)$ も $C^1$ 級であることを示せ．

(2) $f'(x) = -2g(x)g'(x)$ を導き，それより $f(x) + g(x)^2 = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．

# 微分積分学 B・演習問題 8

(2001/12/07)　　　　　　　　　　　　　(担当：野村隆昭)

---

**[1]**　Γ 函数を用いて，$I(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx\ (\alpha > 0)$ を表し，次に $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha)$ を求めよ．

**[2]**　次式で定義される函数 $f$ を考える：

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x} - y^2 \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y} & (xy \neq 0), \\ 0 & (xy = 0). \end{cases}$$

(1)　$f_x(0,y) = -y$, $f_y(x,0) = x$ であることを示せ．
(2)　$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ を示せ．

**[3]**　次の函数の臨界点は1 つの極大点と鞍点であること，およびこの極大点は最大点でないことを示せ：

$$f(x,y) = x^3 - x - y^2.$$

**[4]**　次の函数の臨界点はただ 1 つでそれは極大点であるが，最大点ではないことを示せ：

$$f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}.$$

**[5]**　$f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ の最大値と最小値を求めよ．　　　答：$\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$E := \{(x,y)\ ;\ 0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq 2\pi\}$ で考えてよいこと，有界閉集合上の連続函数は最大最小をとること，$f$ が $E$ の境界上で 0 であることに注意する．

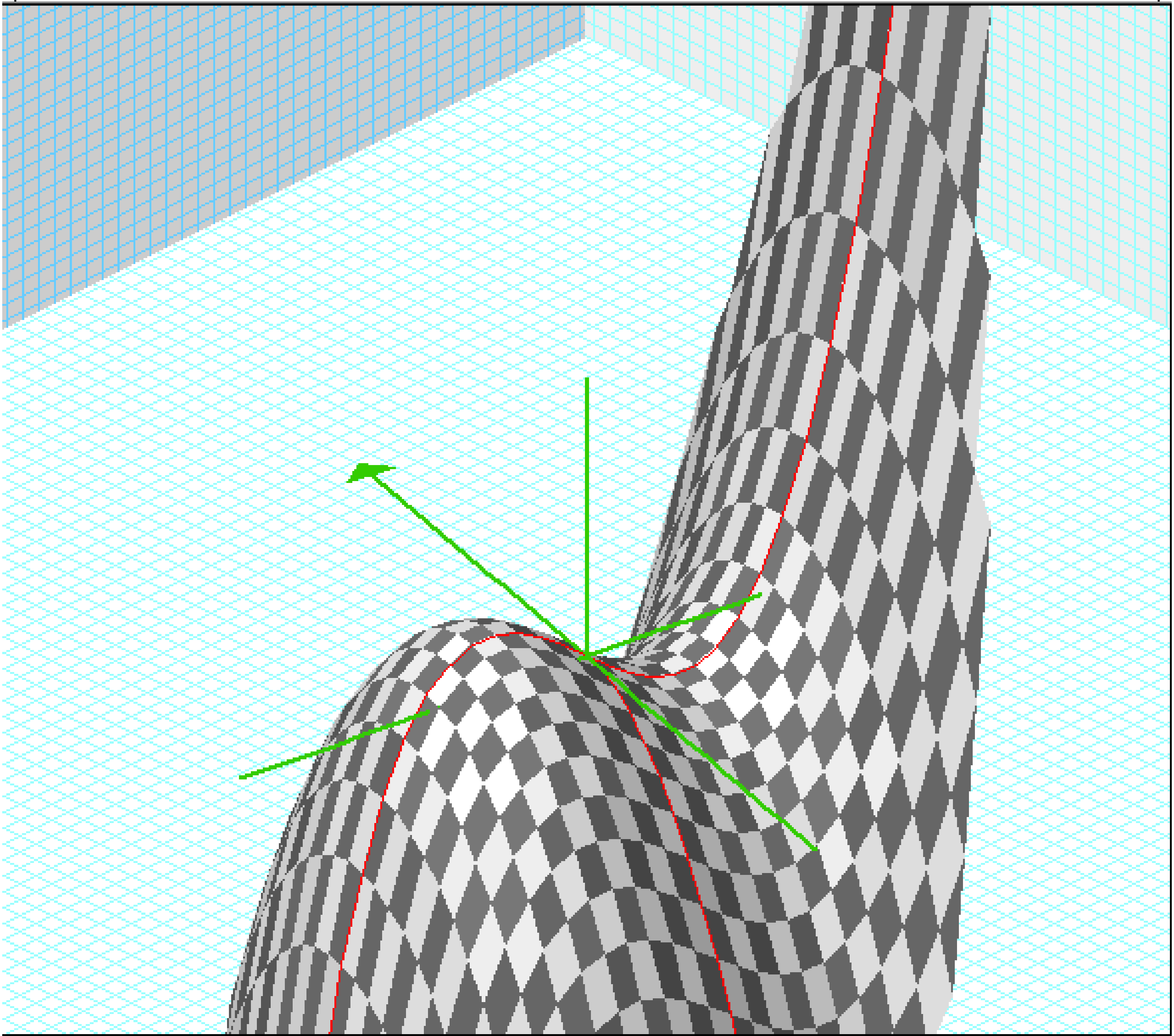
**[6]**　(**12** 月 **14** 日提出のレポート問題)

$\varDelta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とし，

$$u(x,y,z,t) := \frac{1}{t^{3/2}}\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \qquad (t > 0)$$

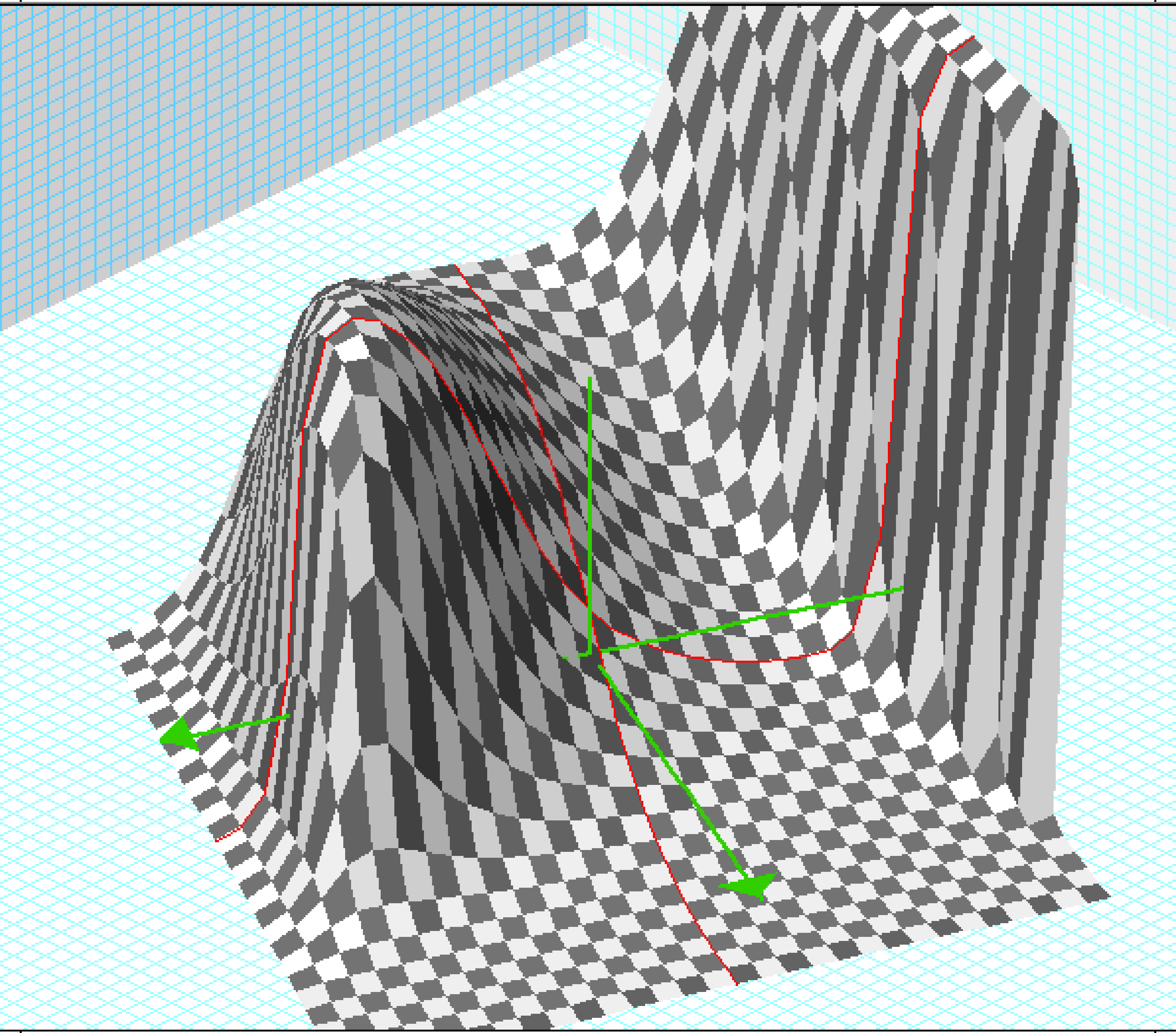
とおくとき，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \varDelta u$ であることを示せ．

$$z = x^3 - x - y^2$$



1995年10月5日作成：野村隆昭

$$z = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$



1995年10月5日作成：野村隆昭