微分積分学 B・試験問題

(2002/01/11)　　　　（担当：野村隆昭）

∗ [**1**] ∼ [**5**] のすべての問題に解答せよ.
∗ 解答用紙は片面のみを使用すること.
∗ 上から第 n 枚目に問題 [n] の解答を書くこと（$n = 1, 2, 3, 4, 5$）.
∗ 計算用紙の提出は不要.
∗ 試験時間は 150 分.

[**1**]　次の積分の収束・発散を実数 α の値によって分類せよ：

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^5}\,dx.$$

[**2**]　$x > 0$ の範囲で考える.

(1) 次の等式が成立することを示せ：

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \sin\Big(t + \frac{n+1}{2}\pi\Big)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(2) 不等式 $\left|\dfrac{d^n}{dx^n}\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)\right| \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ.

[**3**]　次の函数の臨界点はただ 1 つでそれは極小点であるが，最小点ではないことを示せ：

$$f(x, y) = x^2 + (1+x)^3 y^2.$$

[**4**]　定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする．等式

$$\frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} = \int_0^a \frac{dy}{1 + y\cos x}$$

に注意して，次式を示せ：

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi^2}{4} - (\mathrm{Arc}\cos a)^2\Big].$$

ただし，$\mathrm{Arc}\cos$ は逆余弦函数の主値である（それの正しい定義を，本問に必要な範囲で与えることも問題の一部分である）.

[**5**]　次の等式を示せ：

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{1-x}\,dx = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}.$$

Hint: 評価のために $x^n(\log x)^2$ $(n = 1, 2, \dots)$ の $[0, 1]$ における最大値が必要となる.

以上