微分積分学 A・演習問題 1

(2001/04/13)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　$i = 1, 2, \ldots, n$ とし，以下の 9 つの文 (1)〜(9) はそれぞれ
　（あ）$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$,
　（い）$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ではない
のどちらを表すだろうか．あるいはどちらとも解釈できる（できない）文であろうか．
　本問の主旨は正解，不正解というよりも，論理的にまぎれのない文章を書くことを心がけるように，諸君に訴えるところにある．

(1)　すべての x_i は 0 でない．
(2)　すべての x_i が 0 ではない．
(3)　すべての x_i が 0 ということはない．
(4)　x_i はすべて 0 ではない．
(5)　x_i のすべてが 0 ではない．
(6)　x_i のすべては 0 でない．
(7)　どの x_i もみな 0 でない．
(8)　どの x_i もみな 0 ではない．
(9)　どの x_i もみな 0 ということはない．

[2]　次の問題「1 と異なる実数 a が $na^n = a^{n-1} + \cdots + a + 1$ をみたすとき，$|a| < 1$ となることを示せ」に対して，「$a = 0$ のとき問題の等式が成立していないのだから問題が間違っている」というクレームがあった．あなたならどう答えますか．また A 君は背理法で，すなわち，「$|a| > 1$ または $a = -1$ と仮定すると矛盾するから $|a| < 1$ となる」と証明したが，「もしかしたら $|a| < 1$ であるどの a も問題の等式をみたさないかもしれない」という不安が生じた．あなたなら A 君にどう云いますか．

[3]「すべての実数 x に対して $(ax+b)(ax+c) \geqq 0$ が成り立つための実数 a, b, c の条件を求めよ」という問題に，次のような解答があった．これの誤りを指摘せよ．

すべての実数 x に対して $(ax+b)(ax+c) \geqq 0$ が成り立つことと，

(A)　　すべての実数 x に対して，$\begin{cases} ax+b \geqq 0 \\ ax+c \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} ax+b \leqq 0 \\ ax+c \leqq 0 \end{cases}$

が成り立つことは同値である．したがって，

(B)　　すべての実数 x に対して，$\begin{cases} ax+b \geqq 0 \\ ax+c \geqq 0 \end{cases}$ が成り立つ

か，または

(C)　　すべての実数 x に対して，$\begin{cases} ax+b \leqq 0 \\ ax+c \leqq 0 \end{cases}$ が成り立つ

ことと同値である．
　A から「$a = 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$」が出，B から「$a = 0,\ b \leqq 0,\ c \leqq 0$」が出る．これらをまとめると，求める条件は，$a = 0$ かつ $bc \geqq 0$ である．

[**4**]　某政治家の発言「誤解を与えたとすればお詫び申し上げる」について，この政治家の心理，本音について論理上の考察をせよ．

[**5**]　（**4 月 20 日提出のレポート問題**）
分配法則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を次の 3 通りの方法で示せ．

(1) ベン図で．
(2) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ および $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示すことにより．
(3) 講義中に示した $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ と De Morgan の法則を使って．

微分積分学 A・演習問題 2

(2001/04/20)　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[1]　真偽を判定せよ．

(1) $x(x+1) > 0 \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad x(x+1) > 0$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad y > x^2$.

(4) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad y > x^2 \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R}$.

[2]　次の各命題の否定命題を作り，それの真偽を直接判定せよ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad y > x^2$.

(2) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad y > x^2 \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R}$.

[3]　a, b は実数とする．次の (1), (2), (3) はいずれも，「$a \leqq b$」と同値であることを示せ．

(1) $b \leqq x$ をみたすすべての x について $a \leqq x$ となる．

(2) $b < x$ をみたすすべての x について $a < x$ となる．

(3) $b < x$ をみたすすべての x について $a \leqq x$ となる．

[4]　a は実数であるとする．次の (1), (2), (3) はいずれも

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad \text{for } \forall n > N$$

と同値であることを示せ．

(1) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad \text{for } \forall n \geqq N$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |x_n - a| \leqq \varepsilon \quad \text{for } \forall n > N$.

(3) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |x_n - a| \leqq \varepsilon \quad \text{for } \forall n \geqq N$.

[5]　次の各集合の上限と下限を求めよ．それらは最大数，最小数になっているか．

(1) $A = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \ ; \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$,　(2) $B = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(3) $C = \left\{ n \sin \dfrac{\pi}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

[6]　（**4 月 27 日提出のレポート問題**）

次の命題 (1), (2) を全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ を使って表して，その真偽を述べ，偽であるものは否定を作って，真の命題になるようにせよ．

(1) どんな自然数 n に対しても，ある自然数 k をとれば，$k > n$ である．

(2) ある自然数 k をとると，どんな自然数 n に対しても $k > n$ である．

微分積分学 A・演習問題 3

(2001/04/27)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[1]　数列 $\{y_n\}$ は収束して極限値は b であるとする：$\lim_{n\to\infty} y_n = b$. もし $b \neq 0$ であれば，ある番号 N が存在して，任意の $n \geqq N$ に対して $y_n \neq 0$ となることを示せ．また，$n \geqq N$ のみで考えることにすれば，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$ であることを示せ．

[2]　実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ $(\forall n)$ をみたし，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} b_n$ も存在して α に等しいことを示せ(はさみうちの原理).

[3]　$a \in \mathbb{R}$ とする．「$\lim_{n\to\infty} x_n = a$」ではないということを $\forall$ と $\exists$ を用いて肯定的に表現せよ．それにより，数列 $x_n := (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ が発散することを示せ．

[4]　$0 < a < b$ とし，$a_1 = a$, $b_1 = b$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束し，等しい極限値を持つことを示せ．
(Hint: $\{a_n\}$ は増加列，$\{b_n\}$ は減少列である.)

[5]　r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする．実数列 $\{x_n\}$ が

$$|x_{n+1} - x_n| \leqq r\,|x_n - x_{n-1}| \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

をみたすとき，$\{x_n\}$ は収束することを示せ．
(Hint: Cauchy 列であることを示す.)

[6]　（**5 月 11 日提出のレポート問題**）
p は実数とする．実数列 $\{x_n\}$ が $x_n < p$ $(\forall n)$ をみたしているとし，さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となっているとする．

(1) $a = p$ となり得ることを実例で示せ．
(2) 一般に $a \leqq p$ であることを背理法で示してみよ．

微分積分学 A・演習問題 4

(2001/05/11)　　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[1]　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ も絶対収束することを示せ.

[2]　すべての n について $a_n < b_n$ であるが $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ となることがあるか.

[3]　次の各級数の収束・発散について調べよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\,)$

(2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log(\log n)}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)} \quad (a > 0)$

[4]　$a > 0, b > 0$ のとき，次の級数の収束・発散について調べよ：

$$\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots$$

[5]　次の各級数はいずれも発散であることを示せ.

(1)　$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$

(2)　$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6} + \cdots$

（Hint: いずれも 2 項ずつかっこでくくってみよ.）

[6]　（**5 月 18 日提出のレポート問題**）次の各正項級数の収束を判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$.　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

微分積分学 A・演習問題 5

(2001/05/18)　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　$f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ で定義される函数 f は有界であることを示せ.

[2]　各実数 x に対して，$f(x) = \lim_{m\to\infty}\Bigl(\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n\Bigr)$（$m, n$ は自然数）とおくとき，$f(x)$ を求めよ.（極限の順序に注意.）

[3]　X 君は $\lim_{x\to a} f(x) = l$ の定義として，次のように記憶してしまった：

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|f(x) - l\,| < \varepsilon$ ならば $|x - a| < \delta$.

X 君が正しくないことを，

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = l$ であるが $(*)$ をみたさない函数 f の例,

(2) $(*)$ をみたすが，$\lim_{x\to a} f(x) = l$ とならない函数の例

を挙げることで示せ.

[4]　f は区間 $[0, \infty) := \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 0 \leqq x < \infty\}$ で定義された連続函数とする. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ となる，正または 0 の数からなる適当な数列 $\{x_n\}$ に対して，$l = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ と表されるような $l \in \mathbb{R}$ の全体からなる集合を L とする．集合 L が a, b $(a < b)$ を含めば，区間 $[a, b]$ 全体が L に含まれることを示せ.

[5]　$\mathbb{R}$ を定義域とする連続函数 f で，次の性質を持つものは存在するか：

どの $y \in f(\mathbb{R})$ に対しても，集合 $\{x\ ;\ f(x) = y\}$ の元の個数は 2 個である.

[6]　**（5 月 25 日提出のレポート問題）**

定義域 D_1 で連続な函数 f と定義域 D_2 で連続な函数 g があり，$f(D_1) \subset D_2$ であれば，合成函数 $g \circ f$，すなわち $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ は連続であることを ε-δ を使って示せ.

微分積分学 A・演習問題 6

(2001/05/25)　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1] a は正の定数とする．$f(x) = \sinh ax$ には $\mathbb{R}$ 全体で定義された逆函数 f^{-1} が存在することを示せ．また f^{-1} を実際に求めよ．

[2] $f(x) = (1 + e^x)^{1/x}$ のとき，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$,　(2) $\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x)$,　(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$,　(4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

[3] $f_0(x) = \cosh x$, $f_1(x) = \sinh x$ とする．このとき次式が成立するような右辺の和の取り方を記述せよ：

$$f_r(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum f_{s_1}(x_1) \cdots f_{s_n}(x_n).$$

（Hint: $n = 1, 2, 3$ で実験をして，右辺に現れる f_1 の個数の偶奇に注目する．）

[4] 函数 $f(x) = xe^x$ は開区間 $(0, \infty)$ において狭義増加函数で，値域が $(0, \infty)$ である（確かめよ）から，狭義増加函数である逆函数 f^{-1} が存在する．このとき，次を示せ：

$$\lim_{y \to \infty} \frac{f^{-1}(y)}{\log y} = 1.$$

[5] 函数 f は閉区間 $I := [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ において連続な函数であるとする．もし f が単射ならば，f は I において狭義の増加函数であるか，狭義の減少函数であることを次の手順で示せ．

(1) まず，$f(a) < f(b)$ としてよいことに注意．このとき，$a < x < b$ ならば，$f(a) < f(x) < f(b)$ である．

(2) $a \leqq x < y \leqq b$ ならば $f(x) < f(y)$ である．

[6] **（6 月 1 日提出のレポート問題）**

次の極限値を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$,　(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{x^x}$.

微分積分学 A・演習問題 7

(2001/06/01)　　　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

2 回以上前に出て発表した人は，* 印の問題を前に出て解くことを他の人に譲ること．

---

[1]* 　函数 $\mathrm{Arcsin}(\sin x)$ のグラフを描け．

（周期函数であるから，x に等しいはずがない．値域も $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ のはず．）

[2] 　次の等式を示せ：

$$5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} + 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}.$$

検算用に数値を書いておく：$\tan\alpha = 1/7$, $\tan\beta = 3/79$ とおくと

$$\tan 2\alpha = \frac{7}{24}, \quad \tan 3\alpha = \frac{73}{161}, \quad \tan 5\alpha = \frac{2879}{3353}, \quad \tan 2\beta = \frac{237}{3116}.$$

[3] 　$x \to 0$ のとき，次の各函数は何位の無限小か．

(1)　$\cosh x - 1$,　　(2)　$\tan x - \sin x$,　　(3)　$\sqrt[3]{1+x^4} - 1$.

[4] 　$f(x) = e^{-1/x}$ $(x > 0)$, $f(x) = 0$ $(x \leqq 0)$ で定義される函数 f は $x = 0$ で微分可能であり，$f'(0) = 0$ であることを示せ．

[5] 　函数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるとする．$h, k \to +0$ のとき，次式を示せ：

$$\frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k} \to f'(a).$$

[6] 　**（6 月 8 日提出のレポート問題）**

$f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ とすると，$f(x)$ は $x = 0$ でも微分可能であるが，導函数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ．

微分積分学 A・演習問題 8

(2001/06/08)　　　　　　　　　　　　　　(担当：野村隆昭)

２回以上前に出て発表した人は，* 印の問題を前に出て解くことを他の人に譲ること.

[1]　$f_{ij}(x)$ $(i,j=1,\dots,n)$ はすべて微分可能であるとする．$F(x) := \det(f_{ij}(x))$とおくとき，次式を示せ.

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f'_{1j}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \cdots & f'_{2j}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f'_{nj}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{j1}(x) & \dots & f'_{jn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

[2]*　次の函数 F に Rolle の定理を適用して平均値の定理を証明せよ.

$$F(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & f(x) \end{pmatrix}$$

[3]　(1)　$f(x) := \dfrac{1}{2}x + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, で定義される函数 f は $f'(0) > 0$ であるが，どんな小さな区間 $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ でも増加函数ではないことを示せ.

(2)　$f(x) := 2x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, で定義される函数 f は $x = 0$ で最小値をとる（従って極小値でもある）が，どんな小さな $\delta > 0$ をとっても,「区間 $[-\delta, 0]$ で減少，区間 $[0, \delta]$ で増加」とはならないことを示せ.

[4]　$x > 0$ のとき次の不等式を示せ.

$$1 < \frac{\operatorname{Arctan} x}{\tanh x} < \frac{\pi}{2}.$$

[5]　$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値連続函数とする．もし $|f(x)|$ が $x = a$ で微分可能ならば，$f(x)$ も $x = a$ で微分可能であることを示せ.
(Hint: $f(a) = 0$ のときのみが考察の対象となる（理由は？)．このとき $|f|'(a)$ はどのような値であるべきか.)

[6]　（**6 月 15 日提出のレポート問題**）
次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$.　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{Arctan} x)^{1/x}$.

微分積分学 A・演習問題 9

(2001/06/15)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

２回以上前に出て発表した人は，＊印の問題を前に出て解くことを他の人に譲ること．

---

[1]*　各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$P_n(x) := \dfrac{1}{2^n\, n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．Leibniz の公式を使って

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 t^k = (1-t)^n\, P_n\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

となることを示せ．

[2]　$f(x) = \cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ が $x \to 0$ のとき最も高位の無限小となるように実数 a, b を定めよ．　　　（答：$a = -\frac{5}{12}$, $b = \frac{1}{12}$）

[3]　次の函数 f に対して $f^{(6)}(0) = 120$ であることを示せ（6 回も微分しないこと）．

$$f(x) = \log\cos(x\sin x).$$

[4]　$f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ とするとき，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $f^{(n)}(0) = 0$ であることを示せ．

[5]　a は正の定数とする．すべての $x > 0$ で不等式 $a\tanh x > \sin(ax)$ が成立するための必要十分条件を求めよう：

(1)　$f(x) := a\tanh x - \sin(ax)$ の $x \to +0$ のときの挙動を調べて，必要条件としてまず $a \geqq \sqrt{2}$ を出せ．

(2)　逆に $a \geqq \sqrt{2}$ が十分条件でもあることを示せ．

Hint: $a \geqq \sqrt{2}$ ならば，$x > 0$ が十分小さくても十分大きくても $f(x) > 0$ なので，結論を否定すれば，$f(x)$ は $(0, \infty)$ に含まれる適当な閉区間の内部で負または 0 の最小値（従って極小値）を持つことになる．

[6]　**（6 月 22 日提出のレポート問題）**

$x \to 0$ のとき，$(\tan x)^3\bigl(1 - (\cos x)^{x^2}\bigr) = \dfrac{1}{2}x^7 + O(x^9)$ であることを示せ．

微分積分学 A・演習問題 10

(2001/06/22)　　　　　　　　　　(担当：野村隆昭)

2 回以上前に出て発表した人は，* 印の問題を前に出て解くことを他の人に譲ること．

---

[1]* 次の函数項級数の指定された区間における一様収束性を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$,　$I=[0,1]$,　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n+1)^2x^2}\right)$,　$I=[0,1]$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^n}$,　$I=[-q,q]$　(q は $0<q<1$ をみたす定数)．

[2] 閉区間 $I=[0,1]$ で定義された連続函数の列 $\{f_n\}$ が函数 f に I 上一様収束しているとする．このとき，I の一点 x_0 に収束するどんな数列 $\{x_n\}$（ただし $x_n\in I$ $(\forall n)$）についても，数列 $\{f_n(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束することを示せ．

[3] f は区間 $I=[0,\infty)$ 上定義された連続函数で，$f(0)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ をみたしているとする．このとき，函数列 $\left\{f(nx)f\left(\dfrac{x}{n}\right)\right\}$ は I 上一様収束することを示せ．

[4] 次の等式

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^nt^n}{1+t}\qquad(t\neq-1)$$

を 0 から x まで積分することにより，

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

が $-1<x\leqq 1$ で成り立つことを示せ．

[5] $f(x)=1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(nx)$（$a$ は $|a|<1$ をみたす定数）とおく．

(1) 右辺の級数は閉区間 $[0,2\pi]$ において一様収束することを示せ．

(2) f は微分可能で，$f'(x)=-2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na^n\sin(nx)$ となることを示せ．

(3) $f(x)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$ であることを示せ．

[6] （**7 月 6 日提出のレポート問題**）

次の函数列の指定された区間における一様収束性を判定せよ．

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+n^2x^2}$,　$I=[0,1]$,　　(2) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,　$I=[0,1]$,

(3) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{nx}$　$I=(0,\infty)$.