微分積分学 A・試験問題

(2001/09/18)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

* **[1]** ～ **[4]** のすべての問題に解答せよ．
* 解答用紙は片面のみを使用すること．
* 上から第 n 枚目に問題 [n] の解答を書くこと（$n = 1, 2, 3, 4$）．
* 計算用紙の提出は不要．

---

[1] 次の級数の収束・発散を判定せよ： $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log(\log n)}}$.

[2] $f(x) := (\mathrm{Arcsin}\, x)^2$ とする．

（1） $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$ が成り立つことを示せ．

（2） $n = 1, 2, \ldots$ に対して次式を示せ：

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$$

[3] $\{a_n\}$ は実数列で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$ をみたしているとする．次の極限値を求めよ：

$$\lim_{n\to\infty} e^{-a_n} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n.$$

[4] $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値函数であるとし，函数列 $\{g_n\}$ を次式で定義する：

$$g_n(x) := \frac{f(x)^2}{\sqrt{f(x)^2 + \dfrac{1}{n}}}; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$n \to \infty$ のとき，$\{g_n\}$ はある函数に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

以上