平成 12 年度　函数解析　試験問題

（担当：野村隆昭）

2001年2月15日実施　　時間 **10:30 〜 12:30**

⋆ **[1]** 〜 **[4]** のすべての問題に解答のこと．

⋆ 解答用紙は **片面のみ** を **縦長** に使用のこと．使用枚数に制限はない．

⋆ すべての解答用紙の上部に入学年度，氏名，学生番号を（理学部以外の人は所属学部も）記入のこと．１枚目の氏名にはふりがなを添えて下さい．

⋆ 1 枚の解答用紙に，たとえば **[2]**，**[4]** の小問の解答を混在させぬこと（従って全問を解答する場合，解答用紙は最低 4 枚ということになる）．

---

[1]　エルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を持つ複素 Hilbert 空間を H とし，この内積より定まるノルムを $\|\cdot\|$ で表す．H の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\|x_n\| \leqq 1$, $\|y_n\| \leqq 1$ をみたし，さらに $\lim_{n\to\infty}(x_n\,|\,y_n) = 1$ となっているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ であることを示せ．

[2] (1) 有界な複素数列 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ の全体を ℓ^{∞} で表す．空間 ℓ^{∞} は $\|x\| := \sup_n |x_n|$ で Banach 空間になっていることを示せ．

(2) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n(x) := x_n$ $(x \in \ell^{\infty})$ とおくとき，f_n は ℓ^{∞} 上の連続な線型形式であることを示せ．

(3) (2) の列 $\{f_n\}$ からは汎弱収束（各点収束）するような部分列は選べないことを示せ．

[3]　X は Banach 空間であるとする．T_n $(n = 1, 2, \dots)$ および T は X 上の有界線型作用素とし，各点 $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ となっているとする．このとき，この収束は X の任意のコンパクト集合上で一様であることを示せ．

（本問では，函数解析における重要定理の一つを使うことが想定されている．）

[4]　閉区間 $[0,1]$ 上の連続函数全体に sup-norm を入れた Banach 空間 $C[0,1]$ で考える（$C[0,1]$ の完備性についての証明は本問では要求されていない）．函数 $\varphi \in C[0,1]$ を一つ固定して線型作用素

$$(Tf)(t) := \varphi(t)f(t) \qquad (t \in [0,1],\ f \in C[0,1])$$

を考える．

(1) T は有界作用素であることを示し，そのノルムを求めよ．

(2) T がコンパクト作用素ならば φ は $[0,1]$ 上恒等的に 0 となることを示せ．

（Hint: 結論を否定して，「可逆なコンパクト作用素」なるものに思いを馳せよ．）

以上