平成12年度 解析学特論 I（学部）複素解析学（大学院） レポート問題

出題：2000年7月6日　　　　（担当：野村隆昭）

A4 レポート用紙にて数学教室事務室に提出すること．

提出期限：2000年9月22日（金）**厳守**

以下 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ とする．

また，$d\sigma$ は $\mathcal{D}$ 上の測度で $d\sigma(z) := \dfrac{4\,dxdy}{(1-|z|^2)^2}$ $(z = x+iy)$ となるものとする．

[1] $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への全単射 F で，F と F^{-1} がともに正則 (holomorphic) なものは

$$F(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$$

と書けることを示せ.

[2] $\mathcal{D}$ 上の正則函数 f が

$$\int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2\, d\sigma(z) < \infty$$

をみたせば $f = 0$ であることを示せ.

[3] 2点 $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ の双曲距離を $d(z_1, z_2)$ で表す．講義で示したように

$$d(z_1, z_2) = 2\,\mathrm{Arc}\tanh\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|$$

である．各複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{D}$ 上の函数 $f_\mu(z) := [\cosh d(0,z)]^\mu$ $(z \in \mathcal{D})$ を考える．

(1) $\mathcal{D}$ の双曲極座標（Cartan 座標）$z = e^{i\varphi}\tanh(\tau/2)$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi,\ \tau \geqq 0)$ により $d\sigma(z) = \sinh\tau\, d\tau d\varphi$ となることを示せ．またこれより $f_\mu \in L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ となるための μ の条件を求めよ.

(2) a_t $(t \in \mathbb{R})$, n_ξ $(\xi \in \mathbb{R})$ はそれぞれ次の一次分数変換とする：

$$a_t(z) := \frac{(\cosh\frac{t}{2})z + \sinh\frac{t}{2}}{(\sinh\frac{t}{2})z + \cosh\frac{t}{2}}, \qquad n_\xi(z) := \frac{(1+\frac{i}{2}\xi)z - \frac{i}{2}\xi}{\frac{i}{2}\xi z + 1 - \frac{i}{2}\xi}.$$

このとき，$\cosh d(0,\ a_t \circ n_\xi(0)) = \cosh t + \frac{1}{2}e^t\xi^2$ であることを示せ.

(3) $f_\mu \in L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ となる μ に対して，函数 f_μ の Harish-Chandra 変換 $\mathcal{H}f_\mu$ を直接求めよ．ただし

$$\mathcal{H}f_\mu(t) := e^{t/2}\int_{-\infty}^{\infty} f_\mu(a_t \circ n_\xi(0))\, d\xi.$$

以上