書　評

高瀬幸一：群の表現論序説

岩波書店, 2013 年，234 ページ.

野　村　隆　昭

本書は「群の表現論序説」というタイトルを持つが，内容としては，MSC (Mathematics Subject Classification) 2010 において 43Axx で番号付けされている，「抽象調和解析」 (abstract harmonic analysis) と呼ばれる分野の基礎的理論を解説したものである．抽象調和解析は非可換調和解析とも呼ばれ，群という代数的構造と，フーリエ解析を抽象化し函数解析学を駆使する解析学とが交錯する大変面白い分野である一方，予備知識がいろいろと必要で，この分野を学ぼうとする初学者には少々敷居が高く感じられる事も否めない．その意味においても，高瀬氏の本書が出版された事を筆者は大いに歓迎したい．実のところ，筆者自身も学部学生の頃は抽象調和解析という分野を知らなかった．本書によって多くの若い人達にこの分野を知ってもらい，その先に広がる魅力的で多様な世界へいざなうことになればと期待する．

さて群 G が与えられたとき，G の表現とは，あるベクトル空間（無限次元も許す）上の可逆な線型作用素のなす群への G からの準同型写像（群における積を作用素の積に移す写像）のことである．G が位相群であるときは，ベクトル空間も位相ベクトル空間とし，線型作用素とともにこの準同型写像にも連続性の条件が付加されるのが普通である（後述）．有限群 G の表現を考察するとき，その群環 $\mathbb{C}[G]$ は重要な働きをする．あとでの解析の話につなげるために，ここでは次のような形で $\mathbb{C}[G]$ を定義しておこう．すなわち，$\mathbb{C}[G]$ は G 上の複素数値函数の全体がなすベクトル空間に畳み込み[1)]

$$f * h(x) = \sum_{y \in G} f(y) h(y^{-1}x) \qquad (f, h \in \mathbb{C}[G]) \tag{1}$$

で積を導入した結合的代数である（以下単に代数と呼ぶ）．各元 $g \in G$ に対して，G 上の函数 δ_g を $\delta_g(x) := \delta_{x,g}$（右辺は Kronecker のデルタ）で定義すると，g が G 全体を走るときの δ_g 達は，ベクトル空間としての $\mathbb{C}[G]$ の基底をなす．ただし，各元 $g \in G$ を基底として持つベクトル空間 $V := \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}g$ を強引に考え，その元 $a = \sum_{g \in G} a_g g \in V$ $(a_g \in \mathbb{C})$ と $f_a := \sum_{g\in G} a_g \delta_g \in \mathbb{C}[G]$ を同一視する事で得られる代数 V のことを $\mathbb{C}[G]$ とする方がなじみがあるかもしれない．

有限群 G の表現 π が与えられたとき，$\pi(f) := \sum_{x \in G} f(x)\pi(x)$ $(f \in \mathbb{C}[G])$ とおくと，$f \mapsto \pi(f)$ は群環 $\mathbb{C}[G]$ の表現になっている．逆に群環 $\mathbb{C}[G]$ の表現 π があるとき，$\pi(g) := \pi(\delta_g)$ $(g \in G)$ とおくと，$g \mapsto \pi(g)$ は群 G の表現になる．このように，G の表現と群環 $\mathbb{C}[G]$ の表現とは 1 対 1 に対応していて，一方の表現が既約であれば，他方の表現も既約である．

以上述べた枠組みは，和を Haar 測度に関する積分に置き換えることで，局所コンパクト位相群にまで拡張される．ただし，畳み込みの定義 (1) で収束が問題となるので，群環をなす函数空間としては可積分函数の空間 L^1 をとる．以下 G を局所コンパクト群とし，左 Haar 測度 dy に関する $L^1(G)$ に

$$f * h(x) = \int_G f(y) h(y^{-1}x)\, dy \qquad (f, h \in L^1(G)) \tag{2}$$

によって畳み込み[2] を定義する．式 (2) が $L^1(G)$ に結合的な積を定義していることは，$\mathbb{R}$ 上での Lebesgue 積分論における標準的な議論と全く同様にしてわかる．ただし，群 G が非可換であるときは，$L^1(G)$ での畳み込み積も非可換である．さて，内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を持つ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素による G の表現 π が与えられたとしよう．このとき π をユニタリ表現と呼ぶ．この場合，π は強連続，すなわち任意の $v \in \mathfrak{H}$ に対して，写像 $G \ni g \mapsto \pi(g)v \in \mathfrak{H}$ が連続であることを要請する．ベクトル $v_1, v_2 \in \mathfrak{H}$ を止める毎に得られる積分を通して，$\mathfrak{H}$ 上の有界作用素 $\pi(f)$ $(f \in L^1(G))$ が定義できる．

$$(\pi(f)v_1\,|\,v_2) := \int_G f(x)(\pi(x)v_1\,|\,v_2)\,dx.$$

一方，Δ を G のモジュラー函数[3]，すなわち $d(y^{-1}) = \Delta(y^{-1})\,dy$ となる G 上の函数[4] とすると，$L^1(G)$ に $f^*(x) := \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$ によって，等長な対合が定義できる．これにより $L^1(G)$ は Banach $*$–環になる．そして，$f \mapsto \pi(f)$ はこの Banach $*$–環 $L^1(G)$ の表現になり，$\pi(f^*) = \pi(f)^*$ が成り立つ（このような表現を $*$–表現という）．ただしこの $L^1(G)$ はいろいろと扱いにくいこともある[5] ので，次のようにして C^*–環に拡張する．まず G の既約ユニタリ表現の同値類全体を $\widehat{G}$ で表し，既約ユニタリ表現 π の同値類を $[\pi]$ で表す．各 $f \in L^1(G)$ に対して，$\|f\|_* := \sup_{[\pi]\in\widehat{G}} \|\pi(f)\|$ とおくと，$\|\cdot\|_*$ が実際にノルムになっていることが示される．ユニタリ表現だけを考えているので，$\|f\|_* \leqq \|f\|_{L^1(G)}$ である．そして，

$$\|f * g\|_* \leqq \|f\|_*\|g\|_*, \quad \|f^*\|_* = \|f\|_*, \quad \|f^* * f\|_* = \|f\|_*^2$$

が成り立つ．したがって，$L^1(G)$ をノルム $\|\cdot\|_*$ で完備化することで，C^*–環 $C^*(G)$ を得る．この $C^*(G)$ を G の C^*–群環と呼ぶ．上で G のユニタリ表現から得られた $L^1(G)$ の $*$–表現は一意的に $C^*(G)$ の $*$–表現に拡張される．逆に $C^*(G)$ の非退化な[6] $*$–表現は G のユニタリ表現を定義する．ただし，有限群のときとは違って，δ_g $(g \in G)$ という函数を使えないので，近似単位元を畳み込むことによる「δ_g への近似列」を用いるなど，極限操作が必要になる．

G が加法群 $\mathbb{R}$ のとき，上記の手続きは何をしていることになるのであろうか．加法群 $\mathbb{R}$ は可換であるから，その既約ユニタリ表現は 1 次元のものであり，$\lambda \in \mathbb{R}$ をパラメータとして，$\mathbb{R} \ni t \to e^{-2\pi i\lambda t}$ で尽きる[7]．$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度は，局所コンパクト群としての Haar 測度であり，したがって，$\mathbb{R}$ の群環は，Lebesgue 測度に関する L^1 空間に，通常に定義される畳み込み積を考えたものである．この群環 $L^1(\mathbb{R})$ の非退化な表現は，Fourier 変換

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

による $f \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ で尽きる．Riemann–Lebesgue の定理により，$\widehat{f}$ は無限遠で 0 になる連続函数の空間 $C_0(\mathbb{R})$ に属する[8]．$C_0(\mathbb{R})$ は sup–norm $\|\cdot\|_{\sup}$，函数値ごとの積，対合 $F^*(\lambda) := \overline{F(\lambda)}$ により C^*–環をなしている．そして，$\|f\|_* = \|\widehat{f}\|_{\sup}$，$(f*h)\widehat{\ } = \widehat{f}\,\widehat{h}$，$(f^*)\widehat{\ } = \big(\widehat{f}\big)^*$ と Fourier 変換の一意性，及び $L^1(\mathbb{R})\widehat{\ }$ が $C_0(\mathbb{R})$ で稠密であることから，$C^*(\mathbb{R})$ は C^*–環として $C_0(\mathbb{R})$ と同型である．この Fourier 変換を抽象化したものが，本書の 1.6 節で扱われる Gelfand 変換である．

前置きが長くなった．章ごとに本書を見ていこう．本書は「表現ってなんですか？」というタイト

ルの第 0 章から始まる．有限群の表現から位相群の表現への橋渡しとして，教授と学生の対話という形式が採られている．本書で扱うようなテーマの場合，読者に有限群の表現論における用語に少しは慣れていることを期待せざるを得ない．一方でそのあたりを詳しく解説していると，肝心の位相群の表現に辿り着くまでに疲れてしまう．その妥協策としてこの形式が採られたと勝手に想像するが，この第 0 章だけで十分に 1 冊の本になり得る内容である．抽象群とそれに関連する基礎概念，有限群の表現と指標や Schur の補題等の基礎事項，群環等が 0.5 節までに述べられる．0.6 節に先に述べた視点からの $\mathbb{R}$ 上の Fourier 解析が解説される．最後の 0.7 節は第 0 章の半分近くを占め，次章以降への序であるとともに，Banach 空間，Hilbert 空間，有界線型作用素のなす空間等が導入される．Lie 群，Lie 環にも触れる．しかしながら，第 0 章を初学者に対する quick introduction とするには少々無理があろう．用語の定義集を兼ねた次章以降へのいざないと位置付けるべきと思う．

第 1 章は「Banach 環の基礎」と題される章である．Banach 環，Banach $*$–環，C^*–環の定義と典型的な例が与えられ，単位元の付加や近似単位元について触れられる[9)]．次いでスペクトル[10)] について述べられ，Gelfand 変換によって，可換な C^*–環が特徴付けられる．

第 2 章はコンパクト作用素の標準的な事柄がまとめられている．Hilbert–Schmidt 作用素と Hilbert 空間のテンソル積や L^2–核を持つ積分作用素，トレース族との関係も書かれているので，便利である．ただ，作用素の積 ST をこの章でも写像の合成ということで一貫して $S \circ T$ と表し続けるのは，読者には煩わしい．函数解析学を学んだ学生には $\circ$ を付する習慣がないのが普通であると思う．

第 3 章はコンパクト群の表現である．本書の惹句である階層化された群の第 2 階層[11)] の表現論である．Peter–Weyl の理論の紹介が主であるが，Hopf 代数と淡中の双対定理まで述べてある．

第 4 章では Banach $*$–環の表現が議論される．稠密性定理を始め，まず von Neumann 環の基本事項が述べられる．次いで Banach $*$–環の正値線型形式についての節があり，Banach $*$–環の $*$–表現へと進む．最後に可換な Banach $*$–環での Gelfand 変換に対する Plancherel 定理が示される．

以上を準備した上で，第 5 章の局所コンパクト群の表現がある．まずは，局所コンパクト群 G の既約ユニタリ表現が，G の異なる点を分離できるほど十分多く存在することを保証する Gelfand–Raikov の定理が示される．後半の節の内，5.4 節では閉部分群からの誘導表現の構成，5.5 節ではユニモジュラー群での 2 乗可積分表現が議論される．いずれも局所コンパクト群の表現論においては，基本的でかつ重要なテーマである．5.6 節では，2 乗可積分表現の具体例として，正則函数の空間に実現される $SL_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現[12)] が述べられる．

最終章である第 6 章では球函数論が述べられている．この章が一番長いので，著者が最も力点を置いた章であろう．局所コンパクト群 G とそのコンパクト部分群 K を考える．G 上の函数 ω が両側 K–不変，すなわち $\omega(kxk') = \omega(x)\ (\forall k, k' \in K)$ をみたし，さらに次の函数等式もみたすときに，ω を帯球函数と呼んで，その一般的な性質がまず調べられる．

$$\int_K \omega(xky)\,dk = \omega(x)\omega(y) \quad (\text{左辺は } \textstyle\int_K dk = 1 \text{ と正規化した } K \text{ の Haar 測度に関する積分}).$$

内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ への G のユニタリ表現 π があって，その K–不変ベクトル，すなわち $\pi(k)u = u\ (\forall k \in K)$ をみたすベクトル $u \in \mathfrak{H}$ のなす部分空間は 1 次元であるとする．このような表現はクラス-1 表現と呼ばれる．K–不変な単位ベクトル u を一つとって，行列要素 $\omega_\pi(x) :=$

$(\pi(x)u|u)$ を考えると，ω_π は正定値な帯球函数である．逆に正定値な帯球函数はこの形に限ることが 6.2 節で示される．両側 K–不変な G 上の可積分函数のなす Banach $*$–環を $L^1(G//K)$ で表す．$L^1(G//K)$ が可換になるための必要十分条件が示され，帯球函数による $L^1(G//K)$ の函数の Fourier 変換が 6.3 節で議論される．そして Plancherel 定理が証明される．最後の二つの節で，$SL_2(\mathbb{R})$ と，p-進体 $\mathbb{Q}_p$ に対する $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 上の帯球函数が述べられている．

付録として，位相線型空間，局所コンパクト空間上の Radon 測度についてまとめられている．本文中の問題の略解も最後にある．

本書全体を通しての印象として，広範な内容がコンパクトによくまとめられていると思う．著者は執筆にかなりの時間を費やしたことと拝察する．記号の索引がつけられていたら，もっと読み易い本になったであろう．そして著者の責任ではなく，出版社のスタイル・ファイルの設計の問題かと思うが，地の文に埋め込まれた数式が，$a{+}b{=}c{\leq}d{\in}X$ 等のように詰めて組版されている．TEX によるデフォルトの組版ならば，$a + b = c \leq d \in X$ のように等号などの左右に少々スペースが入るはずである．本書では地の文に結構な分量の数式が埋め込まれているので，見た目でやや読みづらさを感じる点が大変残念である．最後に本書に付け加えるべき関連文献を挙げて，書評を終えたい．

注　　釈

1)　後注 2 の $\int_G dy$ を $\sum_{y\in G}$ に置き換えた上で，y を y^{-1} とすれば，本書の 16 ページにある定義式になる．
2)　y の代わりに xy とすると，左不変性から $f * h(x) = \int_G f(xy)h(y^{-1})\,dy$ となり，本書 29 ページにある定義式になる．
3)　次に定義される対合が等長であることを見易くするための Δ の定義を採ったが，本来は，左 Haar 測度が右移動にどう反応するかを表す $d(yy_0) = \Delta(y_0)\,dy$ で定義されるものである．
4)　実際は，正の実数がなす乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への G からの群準同型になる．
5)　エルミート元のスペクトルが実数だけで済まない等．
6)　$\bigcap_{x\in\mathbb{C}^*(G)} \mathrm{Ker}(\pi(x)) = \{0\}$ をみたす $C^*(G)$ の表現 π のこと．
7)　本書に合わせて -2π を入れた．これは Fourier 変換を L^2 ノルムでの等長写像にし，なおかつ Fourier 変換を $L^1(\mathbb{R})$ から $C_0(\mathbb{R})$ への準同型とするためである．
8)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|h(\lambda)| \geqq \varepsilon$ となる λ の集合がコンパクトである連続函数 h 全体がなす空間．
9)　本書では，単位的 (unital) という用語が導入されていないので，至る所で「1 をもつ環」という言い方になっている．
10)　本書ではスペクトラム (英語での発音に従って) という．
11)　第 1 階層は有限群．
12)　本書や数学辞典第 4 版において，holomorphic discrete series に正則離散系列という訳語が充てられている．表現論においては，regular representation という用語もあって，正則表現という訳になっている．二つの英単語 holomorphic と regular に同一の訳語を与えているが，これは初学者に無用の混乱を引き起こす可能性がある．離散系列表現というのは，L^2 における正則表現の既約分解に離散スペクトルで現れる系列ゆえ，それが正則函数の空間への実現を持とうが持たなかろうが，正則表現の離散部分といえる．さらに，たとえば，複素 Lie 群 G の G 上の正則函数のなす空間への正則表現は，正則な正則表現とでもいうのであろうか．機械的な直訳ではない日本語による数学用語の工夫が必要なところであろう．

文　　献

[1]　A. Deitmar and S. Echterhoff, Principles of harmonic analysis, Springer, New York, 2009.
[2]　J. Diestel and A. Spalsbury, The joys of Haar measure, GSM 150, Amer. Math. Soc., , Providence, 2014.
[3]　G. B. Folland, A course in abstract harmonic analysis, CRC Press, Boca Raton, 1995.
[4]　E. Kaniuth, A first course in commutative Banach algebras, Springer, New York, 2009.
[5]　J. Wolf, Harmonic analysis on commutative spaces, Amer. Math. Soc., Math. Surveys Monog., 142, Providence, 2007.

(年 月 日提出)

(のむら たかあき・九州大学大学院数理学研究院)