Berezin 変換と Lie 群の表現

野村隆昭　（京大・理学研究科）

Berezin 変換は Berezin の量子化において重要な働きをする作用素である [2], [3], [26]. この変換はまた，symbol が必ずしも有界函数ではない Fock 空間上の Toeplitz 作用素の有界性の判定に使われたり [5]，単位円板上の正則函数のなす函数空間上でも重要な働きをしている [1], [8]. 本稿では，筆者の最近の研究である重複度フリーな作用に関連する Berezin 変換についていくつかの一般的なことと，２つのケース・スタディについて報告する．なおこの研究の一部は藤田悦郎氏と共同のものであり，同氏の京都大学修士論文（平成８年２月）として提出されたものである.

§1. 導入

$\mathbb{C}^n$ の領域 D を考え，μ を D 上の Borel 測度とする． 測度 μ に関する L^2 空間 $L^2(D, d\mu)$ の閉部分空間 $\mathfrak{H}$ を一つ固定する． $\mathfrak{H}$ への直交射影作用素を P で表す． 各 $\varphi \in L^\infty(D)$ に対して，φ を symbol とする $\mathfrak{H}$ 上の **Toeplitz 作用素**を $T(\varphi)$ とする：

$$T(\varphi)h := P(\varphi h) \qquad (h \in \mathfrak{H}).$$

以下 $\mathfrak{H}$ に属する函数はすべて連続であり，かつ $\mathfrak{H}$ は再生核 $\kappa(z,w)$ を持つと仮定する：

$$h(w) = (h \,|\, \kappa(\cdot, w))_{\mathfrak{H}} \qquad (\forall h \in \mathfrak{H},\ \forall w \in D).$$

各 $w \in D$ に対して，E_w は階数 1 の直交射影作用素 $\mathfrak{H} \to \mathbb{C}\kappa(\cdot, w)$ を表すものとする． このとき，$\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素 A に対して，A の **Berezin symbol** $\sigma(A)$ とは次式で定義される D 上の函数のことである：

$$\sigma(A)(w) := \operatorname{tr}(AE_w) \qquad (w \in D).$$

二つの線型写像 $T : \varphi \mapsto T(\varphi)$, $\sigma : A \mapsto \sigma(A)$ は次に述べる意味で互いに adjoint の関係にある [2], [28]：

$d\mu_0(z) := \kappa(z,z)\, d\mu(z)$ とおくとき

(1) T を $L^\infty(D) \cap L^1(D, d\mu_0)$ に制限すると (note : $L^\infty \cap L^1 \subset L^2$)，それは $L^2(D, d\mu_0)$ から $\mathfrak{H}$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素全体のなす Hilbert 空間 $\mathbf{HS}(\mathfrak{H})$ への有界線型作用素に拡張され，$\|T\| \leqq 1$ である.

(2) σ を $\mathbf{HS}(\mathfrak{H})$ に制限すると, それは $\mathbf{HS}(\mathfrak{H})$ から $L^2(D, d\mu_0)$ への有界線型作用素であり，(1)の作用素 T の adjoint となっている.

従って以後 T を σ^* と書くことにする.

定義. 正の自己共役作用素 $\sigma\sigma^* : L^2(D, d\mu_0) \to L^2(D, d\mu_0)$ を $\mathfrak{H}$ に付随する **Berezin 変換** と呼ぶ.

簡単な計算によって，Berezin 変換は次で表示される $L^2(D, d\mu_0)$ 上の積分作用素になることがわかる：

$$\sigma\sigma^* f(z) = \int_D f(w) \frac{|\kappa(z,w)|^2}{\kappa(z,z)\kappa(w,w)}\, d\mu_0(w) \qquad (f \in L^2(D, d\mu_0)).$$

§2. Lie 群の表現との関係

Berezin 変換が私にとって興味の対象となるのは，$\mathfrak{H}$ が Lie 群 G の既約ユニタリ表現 π の表現空間となっているときである．このときは表現 π のユニタリ性が再生核 $\kappa(z,w)$ にある種の G-不変性を持たせ，それが $\sigma\sigma^*$ に遺伝するのである．一般的に述べるといろいろと準備が必要なので，ここでは例で述べることにする.

(1) Fock 空間のとき： $D = \mathbb{C}^n$, $\lambda > 0$ として $d\mu_\lambda(z) := \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n e^{-\lambda\|z\|^2} dm(z)$, ただし dm は $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ 上の Lebesgue 測度を表す.
§1 の $\mathfrak{H}$ としては Fock 空間 $\mathfrak{F}_\lambda$ をとる：

$$\mathfrak{F}_\lambda := L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_\lambda) \cap \{\mathbb{C}^n \text{ 上の正則函数}\}.$$

$\mathfrak{F}_\lambda$ の再生核 κ_λ は

$$\kappa_\lambda(z,w) := e^{\lambda z\cdot\overline{w}} \qquad (z\cdot\overline{w} := z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n).$$

そして，$\mathfrak{F}_\lambda$ は $(2n+1)$ 次元 Heisenberg 群 H_n の既約ユニタリ表現を実現する空間である．実際，H_n は $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ に積

$$(z,t)(z',t') := (z+z', t+t' - \operatorname{Im} z\cdot\overline{z}')$$

を入れたもので，H_n の既約ユニタリ表現 π_λ が次式で実現されている：

$$\pi_\lambda(z,t)f(w) = e^{i\lambda t} e^{-\lambda w\cdot\overline{z}} e^{-\lambda\|z\|^2/2} f(w+z).$$

$\left(\begin{array}{l}\lambda < 0 \text{ のとき，} \pi_\lambda(z,t) := \pi_{-\lambda}(\overline{z}, t) \text{ とすれば，} \{(\pi_\lambda, \mathfrak{F}_{|\lambda|})\,;\, \lambda \in \mathbb{R}^\times\} \text{ で } H_n \\ \text{の無限次元既約ユニタリ表現を，ユニタリ同値を除いて尽くすことになる.}\end{array}\right)$

ここで，$\kappa_\lambda(z,z)\, d\mu_\lambda(z) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n dm(z)$ であるから，$\mathfrak{F}_\lambda$ に付随する Berezin 変換 $\sigma_\lambda\sigma_\lambda^*$ は

$$\frac{|\kappa_\lambda(z,w)|^2}{\kappa_\lambda(z,z)\kappa_\lambda(w,w)} = e^{-\lambda\|z-w\|^2}$$

を積分核とする $L^2\big(\mathbb{C}^n, \big(\frac{\lambda}{\pi}\big)^n \, dm(z)\big)$ 上の積分作用素である．この $\sigma_\lambda \sigma_\lambda^*$ を（trivial に）$L^2(\mathbb{C}^n)$ に移したものを B_λ とすると

$$B_\lambda f(z) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{-\lambda\|z-w\|^2} \, dm(w)$$

となるから，$B_\lambda = \exp \frac{1}{4\lambda} \varDelta$ である．ただし，$\varDelta = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_j}$ は $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ の Laplacian で，$\exp t\varDelta := e^{-t\,(-\varDelta)}$ $(t > 0)$ は正の自己共役作用素 $-\varDelta$ が生成する作用素の半群である（[2] 他）．

(2) 開単位円板上の weighted Bergman 空間のとき： D として $\mathbb{D}$（開単位円板）をとり，$\alpha > -1$ として

$$d\mu_\alpha(z) := \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha \, dxdy \qquad (z = x + iy).$$

とおき，$\mathfrak{H}$ としては $\mathbb{D}$ 上の weighted Bergman 空間 $\mathfrak{H}_\alpha$ をとる：

$$\mathfrak{H}_\alpha := L^2(\mathbb{D}, d\mu_\alpha) \cap \{\mathbb{D} \text{ 上の正則函数}\}.$$

$\mathfrak{H}_\alpha$ の再生核 κ_α は

$$\kappa_\alpha(z,w) := (1 - z\overline{w})^{-(\alpha+2)}.$$

$\mathfrak{H}_\alpha$ は Lie 群 $SU(1,1)$ の普遍被覆群 G の（相対）離散系列表現 π_α を実現する空間である： G は $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ に積

$$(\gamma,\omega)(\gamma',\omega') = \left(\frac{\gamma e^{-2i\omega'} + \gamma'}{1 + \gamma\overline{\gamma}' e^{-2i\omega'}},\ \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \gamma\overline{\gamma}' e^{-2i\omega'}}{1 + \overline{\gamma}\gamma' e^{2i\omega'}} \right)$$

を入れたものとして実現され，表現 π_α は，$g^{-1} = (\gamma,\omega)$ とおくとき

$$\pi_\alpha(g) f(z) = e^{i\omega(\alpha+2)} (1-|\gamma|^2)^{1+\alpha/2} (1 + \overline{\gamma} z)^{-(\alpha+2)} f\left(e^{2i\omega} \cdot \frac{z+\gamma}{\overline{\gamma} z + 1} \right)$$

で与えられる．ここで

$$d\mu_0(z) := \kappa_\alpha(z,z) \, d\mu_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^{-2} \, dxdy$$

であるから，$\mathfrak{H}_\alpha$ に付随する Berezin 変換 $\sigma_\alpha \sigma_\alpha^*$ は

$$\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}(1-|w|^2)^{\alpha+2}}{|1 - z\overline{w}|^{2\alpha+4}}$$

を積分核とする $L^2(\mathbb{D}, d\mu_0)$ 上の積分作用素である．この $\sigma_\alpha\sigma_\alpha^*$ は [1] により，Riemann 対称空間である $\mathbb{D}$ の球 Fourier 変換を用いて次の様に記述された：[15] により，球函数 ϕ_λ は

$$\phi_\lambda(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{(i\lambda+1)/2} d\theta \qquad (\lambda\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{D})$$

で与えられ，$(1-|z|^2)^{-2}\,dxdy$ は $\mathbb{D}$ 上の G-不変測度であることに注意すると，球 Fourier 変換は

$$\widetilde{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{D}} f(z)\phi_{-\lambda}(z)\,d\mu_0(z)$$

となる．$\Delta_{\mathbb{D}} = (1-|z|^2)^2\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}$ を $\mathbb{D}$ 上の G-不変な Laplacian とするとき

$$(\sigma_\alpha\sigma_\alpha^* f)^{\widetilde{}}(\lambda) = \widetilde{a}(\lambda)\widetilde{f}(\lambda) \qquad \text{with} \qquad \widetilde{a}(\lambda) := \frac{|\Gamma(\alpha+\frac{3}{2}+\frac{i\lambda}{2})|^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

$\Delta_{\mathbb{D}}\phi_\lambda = -\dfrac{1}{4}(\lambda^2+1)\phi_\lambda$ より

$$\sigma_\alpha\sigma_\alpha^* = \frac{\left|\Gamma\left(\alpha+\dfrac{3}{2}+i\sqrt{-\Delta_{\mathbb{D}}-\frac{1}{4}}\right)\right|^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

この例は [28] により有界対称領域上の weighted Bergman 空間の場合に拡張されている．

§3. 重複度フリーな作用に関連した Berezin 変換

§1 で見たように，L^2 空間の閉部分空間で再生核を持つものがあれば，そしてそれが Lie 群のユニタリ表現を実現していれば，群不変性を備えた Berezin 変換が定義できる．このようなことが起きる場合で興味深いのは，コンパクト Lie 群 K が有限次元複素ベクトル空間 V に重複度フリーに作用しているときである．すなわち，K は V 上の正則 (holomorphic) 多項式函数のなす空間 $\mathcal{P}(V)$ にも $\pi(k)p(z) := p(k^{-1}z)$ で作用するが，この $\mathcal{P}(V)$ が互いに同値でない K の既約表現に重複度 1 で分解されるときである：

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{\alpha\in A}\mathcal{P}_\alpha(V) \qquad (\alpha\neq\alpha' \implies \mathcal{P}_\alpha(V)\not\cong\mathcal{P}_{\alpha'}(V)). \tag{3.1}$$

この様な作用の分類は [17] によりなされ, [16] によってさらに深く研究されている．

さて V に K-不変なエルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を入れ，測度

$$d\mu(z) := \frac{1}{\pi^n}e^{-\|z\|^2}\,dm(z) \qquad (n := \dim V)$$

を考えると，$\mathcal{P}_\alpha(V)$ は（コンパクト群の既約表現の空間であるから有限次元ではあるが）$L^2(V,d\mu)$ の閉部分空間で再生核を持つものとなっている．Fock 空間 $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F} := L^2(V,d\mu) \cap \{V \text{ 上の正則函数}\},$$

を考えると，$\mathfrak{F}$ は (3.1) の完備化として次の直交分解を持つ：

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{P}_\alpha(V).$$

この分解に沿って $\mathfrak{F}$ の再生核 $\kappa(z,w) = e^{(z\,|\,w)}$ を $\kappa(\cdot,w) = \sum_{\alpha\in A} \kappa_\alpha(\cdot,w)$ と分解すると，$\kappa_\alpha(z,w)$ が $\mathcal{P}_\alpha(V)$ の再生核であることが容易にわかる．また，$\mathcal{P}_\alpha(V)$ が K のユニタリ表現を実現していることから

$$\kappa_\alpha(kz,kw) = \kappa_\alpha(z,w) \qquad (\forall k \in K,\ z,w \in V) \tag{3.2}$$

が成り立っている．さらに $H \subset GL(V)$ を K の複素化とすると, [27], [30] から対 (H,V) は概均質ベクトル空間になり，$\kappa_\alpha(z,z)$ が H の稠密開軌道上で決して 0 にならないこともわかる [12].

そして各 $\alpha \in A$ に対して

$$d\mu_\alpha(z) := \frac{1}{\pi^n}\kappa_\alpha(z,z)e^{-\|z\|^2}dm(z)$$

とおくとき，$\mathcal{P}_\alpha(V)$ に付随する Berezin 変換 $\sigma_\alpha\sigma_\alpha^*$ は $L^2(V,d\mu_\alpha)$ 上の積分作用素である．これを自然に $L^2(V)$ に移したものを B_α で表す．作用素 B_α は次で表示される積分作用素である：

$$B_\alpha f(z) = \int_V b_\alpha(z,w)f(w)\,dm(w) \qquad (f \in L^2(V))$$

$$\text{with} \qquad b_\alpha(z,w) := \frac{1}{\pi^n}e^{-\|z\|^2/2}e^{-\|w\|^2/2}\frac{|\kappa_\alpha(z,w)|^2}{\kappa_\alpha(z,z)^{1/2}\kappa_\alpha(w,w)^{1/2}}.$$

(3.2)より $b_\alpha(kz,kw) = b_\alpha(z,w)$ $(\forall k \in K)$ が出るので，B_α は K の作用と可換である．すなわち $\pi(k)f(z) := f(k^{-1}z)$ とおくとき，$B_\alpha\pi(k) = \pi(k)B_\alpha$ $(\forall k \in K)$ が成り立つ．

K-不変な $L^2(V)$ の函数の全体を $L^2(V)^K$ と記す：

$$L^2(V)^K := \{f \in L^2(V)\,;\, \pi(k)f = f \quad (\forall k \in K)\}.$$

B_α は $L^2(V)^K$ を不変にする．そこでの作用は次の通り．

定理 3.1 [12]. $B_\alpha|_{L^2(V)^K}$ は $\phi_\alpha(z) := \kappa_\alpha(z,z)^{1/2}e^{-\|z\|^2/2}$ で張られる 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\phi_\alpha$ への直交射影作用素である．

次の命題 3.2 は B_α と表現のテンソル積との関連を示すものである．まず記号の準備をする．

$$\overline{\mathcal{P}_\alpha(V)} := \{\overline{f}\text{（複素共役値）}\,;\, f \in \mathcal{P}_\alpha(V)\},$$

$$d\lambda_\alpha(z) := \frac{1}{\pi^n}\kappa_\alpha(z,z)^{-1}e^{-\|z\|^2}\,dm(z) \qquad (d\mu_\alpha \text{ との微妙な違いに注意}),$$

$$J_\alpha : L^2(V,d\lambda_\alpha) \to L^2(V) \qquad \text{（自然なユニタリ写像）}.$$

$\boxed{\textbf{命題 } 3.2\ [13].}$ $A_\alpha F(z) := F(z,z)$ $(F \in \mathcal{P}_\alpha(V) \otimes \overline{\mathcal{P}_\alpha(V)}\,)$ とおく.
(1) $B_\alpha = J_\alpha A_\alpha A_\alpha^* J_\alpha^{-1}$.
(2) A_α は $L^2(V, d\lambda_\alpha)$ への K-同変な単射で, $\|A_\alpha\| = 1$.
(3) $J_\alpha^{-1} f \in (\mathrm{Range}\, A_\alpha)^\perp$ ならば $B_\alpha f = 0$.

$\boxed{\textbf{注意 } 1.}$ §2 の例(1)では

$$\pi_\lambda \otimes \overline{\pi}_\lambda \cong \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n}^{\oplus} \xi_w \, dm(w) \qquad (\xi_w(z,t) := e^{i\mathrm{Re}\, z \cdot \overline{w}})$$

を反映しているし, 例(2)では

$$\pi_\alpha \otimes \overline{\pi}_\alpha \cong \mathrm{Ind}_{S(U(1)\times U(1))}^{SU(1,1)} \mathbf{1} \qquad (\mathbf{1} \text{ はtrivial 表現})$$

を反映している [24].

$\boxed{\textbf{注意 } 2.}$ 一般に $\pi \otimes \overline{\pi}$ のタイプのテンソル積の既約分解は, 指標のレベルにおいてすでに複雑な様相を呈する [19]. ここでは函数空間を分解することになるので, 一般には結構大変な作業になる.

§4. $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用の場合

ユニタリ群 $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用は §3 で云う所の重複度フリーな作用になっている. $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の k 次斉次の正則な多項式函数の空間を表すと

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \qquad (k \neq k' \implies \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \not\cong \mathcal{P}_{k'}(\mathbb{C}^n) : U(n) \text{ の表現として}).$$

$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ の再生核は

$$\kappa_k(z,w) := \frac{(z \cdot \overline{w})^k}{k!}$$

であるから, $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ に付随する Berezin 変換を $L^2(\mathbb{C}^n)$ に移した B_k は

$$B_k f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} b_k(z,w) f(w)\, dm(w) \qquad (f \in L^2(\mathbb{C}^n))$$

$$\text{with} \qquad b_k(z,w) := \frac{1}{\pi^n k!} e^{-\|z\|^2/2} e^{-\|w\|^2/2} \frac{|z \cdot \overline{w}|^{2k}}{\|z\|^k \|w\|^k}.$$

極座標 $z = ru$ $(r > 0,\ u \in S^{2n-1})$ で $dm(ru) = r^{2n-1} dr d\sigma(u)$ (σ は S^{2n-1} 上の標準的な回転不変測度) であるから

$$L^2(\mathbb{C}^n) = L^2((0,\infty), r^{2n-1} dr) \otimes L^2(S^{2n-1}, d\sigma).$$

そして $L^2(S^{2n-1}, d\sigma)$ の $U(n)$-既約分解は次の通り： $\mathbb{C}^n$ 上の多項式函数 $h(z,\overline{z})$ で z について p 次斉次，$\overline{z}$ について q 次斉次なもののなす空間を $\mathcal{P}_{pq}$ とする．また

$$\mathcal{H}_{pq} := \{h \in \mathcal{P}_{pq}\ ;\ \Delta h = 0\} \qquad (\Delta \text{ は } \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n} \text{ の Laplacian})$$

とおく（調和多項式の空間）と

$$\mathcal{P}_{pq} = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} \|z\|^{2j} \cdot \mathcal{H}_{p-j,q-j} \tag{4.1}$$

が成り立つ．さらに

$$\mathcal{Y}_{pq} := \{h|_{S^{2n-1}}\ ;\ h \in \mathcal{H}_{pq}\} \qquad ((p,q) \text{ 型の球面調和函数の空間})$$

とすると

$$L^2(S^{2n-1}, d\sigma) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{pq}.$$

このとき，Berezin 変換 B_k は次の定理 4.1 の様にスペクトル分解される：

$$\varphi_k(r) := \sqrt{\frac{2}{(n+k-1)!}}\, r^k e^{-r^2/2} \qquad (r > 0)$$

とおき，E_{kj} は $\mathbb{C}\varphi_k \otimes \mathcal{Y}_{jj}$ への直交射影作用素を表すとする．

定理 4.1 [12]. $$B_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+k+j-1}{j}^{-1} \binom{k}{j} E_{kj}.$$

証明のポイントとなる事実を書き並べておく．$\mathbf{e}_n := {}^t(0,\ldots,0,1) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ における $U(n)$ の固定部分群を L とする．そして $\mathcal{Y}_{jj}$ に属する函数で L-不変なもののなす部分空間を $\mathcal{Y}_{jj}^L$ とする．

(1) $\mathcal{Y}_{jj}^L = \mathbb{C}Y_j$．ただし

$$Y_j(u) := P_j^{(n-2,0)}(2\,|u \cdot \mathbf{e}_n|^2 - 1) \qquad (u \in S^{2n-1})$$

で $P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$ は j 次の Jacobi 多項式（Szegö の記号）．

(2) $\mathcal{Y}_{jj}$ の再生核 $\Phi_j(u,v)$ は

$$\Phi_j(u,v) := \frac{(n+2j-1)(n+j-2)!}{2\pi^n j!}\, P_j^{(n-2,0)}(2\,|u \cdot \overline{v}|^2 - 1) \qquad (u, v \in S^{2n-1}).$$

(3) $$\int_{S^{2n-1}} |u\cdot \mathbf{e}_n|^{2k} P_j^{(n-2,0)}(2\,|u\cdot\mathbf{e}_n|^2-1)\,d\sigma(u) = \frac{2\pi^n k!}{(n+k-1)!}\binom{n+j-2}{j}\binom{n+k+j-1}{j}^{-1}\binom{k}{j}.$$

以上を使うと B_k の積分核 b_k が次の様になるのである $(s, r > 0,\ u, v \in S^{2n-1})$：

$$b_k(sv, ru) = \varphi_k(s)\varphi_k(r)\sum_{j=0}^{k}\binom{n+k+j-1}{j}^{-1}\binom{k}{j}\,\Phi_j(u,v).$$

§5. $U(2)\times U(2)$ の $\mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C})$ への作用の場合

2 次の複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間 $V := \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C})$ への，左，右からの 2 次のユニタリ群 $U(2)$ の作用

$$U(2) \curvearrowright \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \curvearrowleft U(2)$$

も §3 で云う所の重複度フリーな作用になっている．以下 $K := U(2)\times U(2)$ とおく．$\mathcal{P}(V)$ の K-既約分解を記述するために，まず $U(2)$ 自身の既約ユニタリ表現についてその記号法を確定しておこう．各 $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ := \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$ について，$\mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の $2l$ 次斉次の正則な多項式函数の空間とする（§4 では別の記号を用いた；また半整数の l を用いるのは後で $SU(2)$ の既約表現のテンソル積の分解に現れる Clebsch-Gordan 係数の文献からの引用を容易にするためである）．各 $m \in \mathbb{Z}$ について

$$T^{m,l}(u)p(z) := (\det u)^m p(zu) \qquad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ u \in U(2),\ p \in \mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2))$$

とおくと，$(T^{m,l}, \mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2))$ は $U(2)$ の既約ユニタリ表現であり，これらで $U(2)$ の既約ユニタリ表現をすべて尽くす．また $T^{0,l}|_{SU(2)}$ $(= T^{m,l}|_{SU(2)})$ で $SU(2)$ の既約ユニタリ表現を尽くす．$T^{m,l}$ をそのままの形で $GL(2,\mathbb{C})$ の複素解析的表現に拡張しておく．そして $\mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2)$ の Fock 内積に関する正規直交基底として

(5.1) $$e_j^l(z) := \frac{z_1^{l-j} z_2^{l+j}}{\sqrt{(l-j)!\,(l+j)!}} \qquad (j = -l, -l+1, \dots, l)$$

をとり，この基底に関する $T^{m,l}$ の行列要素を $t_{ij}^{m,l}$ とする：

(5.2) $$t_{ij}^{m,l}(g) := (T^{m,l}(g)e_j^l \,|\, e_i^l) \qquad (g \in GL(2,\mathbb{C}),\ i, j = -l, -l+1, \dots, l).$$

以上の準備の下で $V = \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C})$ 上の正則な多項式函数 $\mathcal{P}(V)$ の分解を記述しよう：各 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\mathcal{P}_k(V) := \{p \in \mathcal{P}(V)\,;\ p \text{ は } k \text{ 次斉次}\},$$
$$\mathcal{H}_k(V) := \{p \in \mathcal{P}_k(V)\,;\ (\det\partial\,)p = 0\}$$

とおく．ただし

$$\det \partial = \frac{\partial^2}{\partial Z_{11}\partial Z_{22}} - \frac{\partial^2}{\partial Z_{12}\partial Z_{21}}.$$

そして各 $m \in \mathbb{Z}_+$ と $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ に対して

$$\mathcal{P}^{m,l}(V) = (\det Z\,)^m\, \mathcal{H}_{2l}(V)$$

とおくと

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+,\, l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+} \mathcal{P}^{m,l}(V)$$

となる．一方 $m \in \mathbb{Z}_+$ のとき，$T^{m,l}$ は $GL(2,\mathbb{C})$ の複素解析的多項式表現となっているから，その行列要素 $t^{m,l}_{ij}$ は $\mathcal{P}(V)$ に属する．細かく述べると，$m \in \mathbb{Z}_+$ の条件下で

(1) $t^{m,l}_{ij}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は a, c について $(m+l-j)$-次斉次，b, d について $(m+l+j)$-次斉次,

(2) $t^{m,l}_{ij}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は a, b について $(m+l-i)$-次斉次，c, d について $(m+l+i)$-次斉次.

そして

$$\mathcal{P}^{m,l}(V) = \mathrm{span}\,\{t^{m,l}_{ij}\ ;\ i, j = -l, -l+1, ..., l\}$$

であり，$\mathcal{P}^{m,l}(V)$ では

$$T^{-(m+2l),l}\,\widehat{\otimes}\,T^{m,l} \qquad \text{（外部テンソル積）}$$

に同値な $K = U(2) \times U(2)$ の既約ユニタリ表現が実現されている（$T^{-(m+2l),l}$ は $T^{m,l}$ の反傾表現に同値であることに注意）．

$GL(2,\mathbb{C})$ の多項式表現 $T^{m,l}$ $(m \in \mathbb{Z}_+,\ l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+)$ の指標を $\xi^{m,l}$ とする：

$$\xi^{m,l}(Z) := \mathrm{tr}\, T^{m,l}(Z) \qquad (Z \in V).$$

ここで，$\xi^{0,l}\begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix}$ は分割 $\lambda = (2l, 0)$ に対応する 2 変数の Schur 函数 $s_\lambda(t_1, t_2)$ に等しいことに注意しておく [22]．この $\xi^{m,l}$ を用いて $\mathcal{P}^{m,l}(V)$ の再生核 $\kappa^{m,l}(Z, W)$ は次のように表される：

$$\kappa^{m,l}(Z, W) = \frac{2l+1}{m!\,(m+2l+1)!}\,\xi^{m,l}(W^*Z).$$

より明示的には Jacobi-Trudi 公式 [22] を使うと

$$\kappa^{m,l}(Z, W) = \frac{2l+1}{m!\,(m+2l+1)!}\ \det(W^*Z)^m \times$$

$$\times \det \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\,(W^*Z) & \det\,(W^*Z) & & & \mathbf{0} \\ 1 & \mathrm{tr}\,(W^*Z) & \det\,(W^*Z) & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \det\,(W^*Z) \\ \mathbf{0} & & & 1 & \mathrm{tr}\,(W^*Z) \end{pmatrix}}_{2l \times 2l}.$$

次に §3 で示唆されたテンソル積 $\mathcal{P}^{m,l}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}^{m,l}(V)}$ の分解について述べる．$K = U(2) \times U(2)$ の表現としては，指標 $|\xi^{m,l}(u)|^2 |\xi^{m,l}(v)|^2 \quad (u, v \in U(2))$ の簡単な計算により

$$(T^{-(m+2l),l} \mathbin{\widehat{\otimes}} T^{m,l}) \otimes \overline{(T^{-(m+2l),l} \mathbin{\widehat{\otimes}} T^{m,l})} \cong \bigoplus_{k,k'=0}^{2l} (T^{-k,k} \mathbin{\widehat{\otimes}} T^{-k',k'})$$

となることがわかる．これを実際に函数空間で実現しよう．まず §4 でも出てきた分解 (4.1) と同じことであるが，記号が変わったので再述する．各 $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2) &:= \{F(z, z)\ ;\ F \in \mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2) \otimes \overline{\mathfrak{H}_l(\mathbb{C}^2)}\}, \\ \mathcal{H}_{ll}(\mathbb{C}^2) &:= \{h \in \mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)\ ;\ \Delta h = 0\} \qquad \text{（調和多項式）} \end{aligned}$$

とおくと

$$\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2) = \sum_{k=0}^{2l} \|z\|^{2(2l-k)} \cdot \mathcal{H}_{k/2,\, k/2}(\mathbb{C}^2). \tag{5.3}$$

これは $U(2)$ の表現のテンソル積の分解 $T^{-(m+2l),l} \otimes T^{m,l} \cong \bigoplus_{k=0}^{2l} T^{-k,k}$ を実現するものである．ここでは命題 3.2 に従って $\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)$ には

$$\|f\|^2 = \frac{(2l)!}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}^2} |f(z)|^2 \frac{e^{-\|z\|^2}}{\|z\|^{4l}}\, dm(z)$$

という Hilbert-norm を入れる（Schur の補題により，$L^2(S^3)$-norm とは正数倍しか違わないが）．$\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)$ の正規直交基底で分解 (5.3) に即したものを下記の様にして取る．まず簡単な補題として

補題 5.1 [6]. $q(z) := \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \quad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)$ とおくと

$$t^{0,l}_{ij} \circ q \in \mathcal{H}_{\frac{l-i}{2}, \frac{l+i}{2}}(\mathbb{C}^2) \qquad \text{（右辺は } j \text{ に無関係）}.$$

従って，$|\omega^{l,k}_j| = \sqrt{\dfrac{2k+1}{(2l)!\,(2l+1)!}}$（偏角は当分自由度を持たせておく）として

$$\phi^{l,k}_j(z) := \omega^{l,k}_j \cdot t^{2l-k,k}_{0j}(q(z)) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2l,\ |j| \leqq k,\ j \in \mathbb{Z}) \tag{5.4}$$

とおくと，$\phi^{l,k}_j \in \|z\|^{2(2l-k)} \cdot \mathcal{H}_{k/2,\, k/2}(\mathbb{C}^2)$ であり，これら（k, j を動かしたとき）が分解 (5.3) に沿った $\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)$ の正規直交基底になっている．

さて $\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)$ は自然に $GL(2,\mathbb{C})$ の表現空間になっている：

$$\tau^l(g)F(z,\overline{z}) = F(zg,\overline{zg}) \qquad (g \in GL(2,\mathbb{C})).$$

上述の正規直交基底 $\{\phi_j^{l,k}\}$ に関する表現 τ^l の行列要素を $\tau_{j'j}^{l,k'k}$ とする：

$$\tau_{j'j}^{l,k'k}(g) := (\tau^l(g)\phi_j^{l,k} \mid \phi_{j'}^{l,k'}). \tag{5.5}$$

τ^l が多項式表現なので，$\tau_{j'j}^{l,k'k}$ は V 上の（一般には反正則な部分も含む）多項式函数である．さらに

$$\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V) := \mathrm{span}\,\{|\det(\,\cdot\,)|^{2m}\cdot\tau_{j'j}^{l,k'k}\ ;\ j,j' = -k,-k+1,\dots,0,\dots,k\},$$
$$\mathfrak{H}^{m,l}(V) := \{F(Z,Z)\ ;\ F \in \mathcal{P}^{m,l}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}^{m,l}(V)}\}.$$

とおくとき，次の命題が成立する．

命題 5.2 [13]. $\mathfrak{H}^{m,l}(V) = \displaystyle\sum_{k,k'=0}^{2l}\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$ であり，$\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$ は $T^{-k',k'}\,\widehat{\otimes}\,T^{-k,k}$ に同値な K の既約表現を実現している．

注意. 定義 (5.5) より，$k \neq k'$ ならば，$\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$ に属する函数はすべて $U(2)$ 上消えている．

本題の Berezin 変換に入ろう．命題 3.2 に従って

$$d\lambda_{m,l}(Z) := \frac{1}{\pi^4}\kappa^{m,l}(Z,Z)^{-1}e^{-\mathrm{tr}\,(Z^*Z)}\,dm(Z)$$

とおき，$\mathcal{P}^{m,l}(V)$ に付随する Berezin 変換を $L^2(V,d\lambda_{m,l})$ 上で考えると，それは次の積分作用素 $B_{m,l}$ となる：

$$B_{m,l}f(Z) = \int_V |\kappa^{m,l}(Z,W)|^2 f(W)\,d\lambda_{m,l}(W) \qquad (f \in L^2(V,d\lambda_{m,l})).$$

$L^2(V,d\lambda_{m,l})$ の部分空間と見た $\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$ の再生核を $\Xi_{k'k}^{m,l}(Z,W)$ とし

$$\alpha_{k'k}^{m,l} = \|\tau_{j'j}^{m,l,k'k}\|^2 \qquad （ノルムは\ L^2(V,d\lambda_{m,l})\ でのもの）$$

とおくと，$\alpha_{k'k}^{m,l}$ は j',j には関係せず

$$|\kappa_{k'k}^{m,l}(Z,W)|^2 = \left[\frac{2l+1}{m!\,(m+2l+1)!}\right]^2\sum_{k,k'=0}^{2l}\alpha_{k'k}^{m,l}\cdot\Xi_{k'k}^{m,l}(Z,W)$$

となる．これから直ちに Berezin 変換 $B_{m,l}$ のスペクトル分解が導かれる．

残るは $\alpha_{k'k}^{m,l}$ の明示的な表示である．現時点 (96/10/28) においては完全に満足のいく記述には到達していないのであるが，与えられたページ数に余裕があるようなので，$k+k' \equiv 0 \pmod 2$ の場合に書き下しておこう（暫くは $k+k' \equiv 0$ でなくても成り立つ事柄である）．まず定義 (5.5) より

$$\tau_{j'j}^{l,k'k}(uZv) = \sum_{a,b} t_{j'a}^{-k',k'}(u)\tau_{ab}^{l,k'k}(Z)t_{bj}^{-k,k}(v) \qquad (u,v \in U(2))$$

となることに注意．次に Schur の直交関係式と積分公式から

$$\alpha_{k'k}^{m,l} = \frac{m!\,(m+2l+1)!}{(2l+1)(2k+1)(2k'+1)} \times$$
$$\times \sum_{|j| \leqq \min(k,k')} \iint_{0<s<t} s^{2m}t^{2m} \left| \tau_{jj}^{l,k'k}\begin{pmatrix} s^{1/2} & \\ & t^{1/2} \end{pmatrix} \right|^2 \frac{e^{-(s+t)}}{\xi^{m,l}\begin{pmatrix} s & \\ & t \end{pmatrix}}(s-t)^2\,dsdt.$$

ここで $\tau_{jj}^{l,k'k}\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}$ を記述するために Hahn 多項式を導入する．すなわち $Q_k(x;\alpha,\beta,N)$ $(k=0,1,\ldots,N)$ を k-次の Hahn 多項式とする（ここでの記号は [20], [29] に従っており，公式集 [18] のものとは若干異なる）：

$$(5.6) \qquad Q_k(x;\alpha,\beta,N) := {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k,\ k+\alpha+\beta+1,\ -x\ ; \\ \alpha+1,\ -N\ ; \end{matrix}\ 1 \right) \quad (x=0,1,\ldots,N).$$

${}_3F_2$ は超幾何函数

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\ b,\ c\ ; \\ d,\ e\ ; \end{matrix}\ z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n\,(c)_n}{(d)_n\,(e)_n}\,\frac{z^n}{n!} \qquad (|z|<1)$$

であり，$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$（Pochhammer の記号）である．ただし，(5.6) の右辺では第 1 パラメタ a が正でない整数ゆえ，超幾何級数が有限級数となり，変数 z を何の差し障りもなく 1 とおけることに注意．Hahn 多項式は次の直交関係を持つ [18]：

$$\sum_{x=0}^{N} \rho(x;\alpha,\beta,N)Q_k(x;\alpha,\beta,N)Q_{k'}(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\delta_{kk'}}{\pi_k(\alpha,\beta,N)},$$

ただし

$$\rho(x;\alpha,\beta,N) = \binom{x+\alpha}{x}\binom{N-x+\beta}{N-x}\binom{N+\alpha+\beta+1}{N}^{-1}$$
$$\pi_k(\alpha,\beta,N) = \frac{(-1)^k\,(-N)_k\,(\alpha+1)_k\,(\alpha+\beta+1)_k}{k!\,(N+\alpha+\beta+2)_k\,(\beta+1)_k} \cdot \frac{2k+\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+1}.$$

命題 5.3 [13]. 以上の記号下で，$|j| \leqq \min(k, k')$ のとき

$$\tau_{jj}^{l,k'k}\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} = \nu_j^{l,k'k} \cdot \sum_{n=0}^{2l-|j|} \rho(n;|j|,|j|,2l-|j|) Q_{k'-|j|}(n;|j|,|j|,2l-|j|) \times$$
$$\times Q_{k-|j|}(n;|j|,|j|,2l-|j|) x^{2n+|j|} y^{4l-(2n+|j|)},$$

ただし $\nu_j^{l,k'k}$ は次式で定義されるものである：

$$\nu_j^{l,k'k} = \frac{(2l-|j|)!\,(2l+|j|+1)!}{(2|j|+1)!} \sqrt{\frac{(2k'+1)\,(k'+|j|)!}{(2l-k')!\,(2l+k'+1)!\,(k'-|j|)!}} \sqrt{\frac{(2k+1)\,(k+|j|)!}{(2l-k)!\,(2l+k+1)!\,(k-|j|)!}}.$$

注意. より正確には，(5.4) で保留しておいた $\omega_j^{l,k}$ の絶対値 1 の定数分を調節して，[20] の Clebsch-Gordan 係数に関する結果を使う．命題 5.3 で Hahn 多項式や，$\nu_j^{l,k'k}$ といった量が現れるのはそこが出所である．また $k' = k$ のとき，$\nu_j^{l,kk} = \pi_{k-|j|}(|j|,|j|,2l-|j|)$ となっていることにも注意しておく．これは Hahn 多項式の直交関係と $\tau_{jj}^{l,k'k}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_{kk'}$（命題 5.2 直後の注意参考）が対応していることを示しており，興味深い．

以上より $k + k' \equiv 0$ のとき，$\alpha_{kk'}^{m,l}$ が記述できる．まず

$$a_{j,n}^{l,k'k} := \rho(n;|j|,|j|,2l-|j|) Q_{k'-|j|}(n;|j|,|j|,2l-|j|) Q_{k-|j|}(n;|j|,|j|,2l-|j|)$$

とおき，$b_{jn}^{l,k'k} := a_{jn}^{l,k'k} - a_{j,n-1}^{l,k'k}$ とおく．ただし $a_{j,-1}^{l,k'k} = 0$ と約束する．そうすると

$$\alpha_{k'k}^{m,l} = \frac{m!\,(m+2l+1)!}{(2l+1)(2k+1)(2k'+1)} \sum_{|j| \leqq \min(k,k')} \left(\nu_j^{l,k'k}\right)^2 \sum_{n,n'=0}^{[l-|j|/2]} b_{jn}^{l,k'k} b_{jn'}^{l,k'k} I_{nn'}^{m,l}$$

となる．ここで $I_{nn'}^{m,l}$ は次の定積分である：

$$I_{nn'}^{m,l} := \iint_{0<s<t} (st)^{m+|j|+n+n'} e^{-(s+t)} (s-t)^2 \times$$
$$\times \frac{\xi^{0,l-n-|j|/2}\begin{pmatrix} s & \\ & t \end{pmatrix} \xi^{0,l-n'-|j|/2}\begin{pmatrix} s & \\ & t \end{pmatrix}}{\xi^{0,l}\begin{pmatrix} s & \\ & t \end{pmatrix}} \, dsdt.$$

この定積分を求めるために，Meijer の G 函数[1]を導入する [10]：

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)} z^s \, ds.$$

[1] 手許の広告によれば Mathmatica Ver. 3.0 では Meijer の G 函数がサポートされるようである．

ただし積分路 C は $-i\infty$ から $i\infty$ へと走り，$\Gamma(b_j-s)$ 達の極を右に見，$\Gamma(1-a_j+s)$ 達の極を左に見る様にそれらを避けてカーブする．また $\beta:=2l-2n-|j|+1$，$\beta':=2l-2n'-|j|+1$ とおき，$\left(\frac{1}{2}-\frac{m+p+1}{2l+1}-\frac{\beta'}{4l+2}\right)_{p=0}^{2l}$ は array

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{m+1}{2l+1}-\tfrac{\beta'}{4l+2},\quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{m+2+1}{2l+1}-\tfrac{\beta'}{4l+2},\quad \ldots,\quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{m+2l+1}{2l+1}-\tfrac{\beta'}{4l+2}$$

を表すものとし，Meijer の G-函数を用いて

$$\mathcal{G}^{m,l}_{\beta\beta'}(z):=G^{2l+3,2l+3}_{2l+3,2l+3}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4l+2},\ \frac{1}{2}+\frac{\beta}{4l+2},\ \left(\frac{1}{2}-\frac{m+p+1}{2l+1}-\frac{\beta'}{4l+2}\right)_{p=0}^{2l}\\ \frac{1}{2}-\frac{\beta}{4l+2},\ \frac{1}{2}+\frac{\beta}{4l+2},\ \left(\frac{1}{2}+\frac{m+p+1}{2l+1}-\frac{\beta'}{4l+2}\right)_{p=0}^{2l}\end{matrix}\right)$$

と定義すると，積分 $I^{m,l}_{nn'}$ が求めることができて

$$I^{m,l}_{nn'}=\frac{(2l+1)^{2(m+l)+3}\,\sin\frac{\pi\beta}{2l+1}}{2^{2(l+1)}\,\pi^{2l+1}}\left\{\left(\frac{d}{dz}\mathcal{G}^{m,l}_{\beta\beta'}\right)(1)+\frac{\beta'}{4l+2}\,\mathcal{G}^{m,l}_{\beta\beta'}(1)\right\}.$$

ただしこれは $\beta<2l+1$ のとき（すなわち $n\neq 0$ または $j\neq 0$ のとき）である．$\beta=2l+1$ でも $\beta'<2l+1$ ならば β と β' の役割を交換すればよい．残った場合 $n=n'=j=0$ のときは簡単で

$$m!\,(m+2l+1)!\,(2l+1)$$

となる．

$k+k'\equiv 1 \pmod 2$ のときも同様な表示が得られる．

§6. 今後の課題

(1) 本稿で扱ったのはいずれも §3 でのテンソル積 $\pi_\alpha\otimes\overline{\pi}_\alpha$ が重複度フリーに既約分解する場合ばかりである．それが実際に重複度を持って分解される場合（この方が普通である）を具体例で調べ，一般の場合の手がかりを得るべきである．

(2) 有界対称領域の接空間の isotropy 表現は重複度フリーな作用になっている．特にその有界対称領域が tube domain に正則同型な場合が面白いであろう．この場合接空間はユークリッド型の Jordan 代数の複素化になっており，その上の正則多項式函数の空間の重複度フリーな分解は [11] に記述されているし，これは Hua や Schmid をはじめとして，いろんな研究者がいろんな文脈で繰り返しとり扱ってきた題材である．その既約成分での再生核も，Jack 多項式のパラメタを特殊化したもので書けることがわかっている [11], [21]．この作用に関連する Berezin 変換を調べるのは様々な事柄と関係してきて面白い研究対象であろう．

(3) 対称でない有界等質領域上の weighted Bergman 空間に付随する Berezin 変換を扱うとき，何を目的とすればよいのであろうか．対称領域のときは，不変微分作用素のなす代数が可換（しかも多項式環）であったので，Berezin 変換をそれら生成元の「函数」で表そうという問題意識だったのである．

REFERENCES

[1] J. Arazy, S. Fisher and J. Peetre, *Hankel operators on planar domains*, Amer. J. Math. **110** (1988), 989–1053.

[2] F. A. Berezin, *Quantization*, Math. USSR Izv. **8** (1974), 1109–1165.

[3] F. A. Berezin, *General concept of quantization*, Comm. Math. Phys. **40** (1975), 153-174.

[4] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Wiener-Hopf operators on* U_2, Integ. Eq. Operator Th. **2** (1979), 139–173.

[5] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 813–829.

[6] R. R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Springer Lecture Notes in Math. **242** (1971), Berlin.

[7] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister and Zhao Yan Da, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math. **120** (1985), 295–326.

[8] M. Engliš, *Functions invariant under the Berezin transform*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 133-154.

[9] M. Engliš, *Berezin transform and the Laplace-Beltrami operator*, St. Petersburg Math. J. **7** (1996), 633–647.

[10] A. Erdélyi et al., *Higher transcendental functions* I, McGraw-Hill, New York, 1953.

[11] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1994.

[12] E. Fujita and T. Nomura, *Spectral decompositions of Berezin transformations on* C^n *related to the natural* $U(n)$*-action*, to appear in J. Math. Kyoto Univ. **37** (1997).

[13] E. Fujita and T. Nomura, *Spectral decompositions of Berezin transforms on* $\mathrm{Mat}\,(2, C)$ *related to the* $U(2) \times U(2)$*-action*, draft (1996).

[14] V. Guillemin, *Toeplitz operators in* n*-dimensions*, Integ. Eq. Operator Th. **7** (1984), 295–326.

[15] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.

[16] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and the multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[17] V. G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.

[18] S. Karlin and J. L. McGregor, *The Hahn polynomials, formulas and an application*, Scripta Math. **26** (1961), 33–46.

[19] K. Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups : by means of the universal characters*, Adv. Math. **74** (1989), 57–86.

[20] T. H. Koornwinder, *Clebsch-Gordan coefficients for* $SU(2)$ *and Hahn polynomials*, Nieuw Arch. Wisk. **29** (1981), 140–155.

[21] I. G. Macdonald, *Commuting differential operators and zonal spherical functions*, Springer Lecture Notes in Math. **1271** (1987), 189–200.

[22] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed.*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[23] V. F. Molchanov, *Quantization on para-hermitian symmetric spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. **175** (1996), 81–95.

[24] B. Ørsted and G. Zhang, *Weyl quantization and tensor products of Fock and Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 551–583.

[25] J. Peetre, *The Berezin transform and Ha-plitz operators*, J. Operator Th. **24** (1990), 165-186.

[26] J. Rawnsley, M. Cahen and S. Gutt, *Quantization of Kähler manifolds* I : *geometric interpretation of Berezin's quantization*, J. Geom. Phys. **7** (1990), 45–62.

[27] F. J. Servedio, *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 421–444.

[28] A. Unterberger and H. Upmeier, *The Berezin transform and invariant differential operators*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 563–597.

[29] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representations of Lie groups and special functions,* Vol. 1, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

[30] E. B. Vinberg and B. N. Kimelfeld, *Homogeneous domains in flag manifolds and spherical subgroups of semi-simple Lie groups*, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), 12–19.