向き付けグラフを介して等質開凸錐を具現化する

山崎　貴史　(九州大学・大学院数理学研究院)[*1]
野村　隆昭　(九州大学・大学院数理学研究院)[*2]

内積を持つ有限次元実ベクトル空間 V の中の等質開凸錐を Ω とする．単純推移的に Ω に作用する分裂可解 Lie 群 H を用いて，V に非結合的代数の構造を導入できる．これは左対称代数に条件を付加したものであって，以後 **Vinberg 代数**と呼ぶ．このことにより，V の元は成分がベクトルである対称行列とみなせる：

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{21} & \dots & V_{r1} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{r1} & V_{r2} & \dots & V_{rr} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \bullet\ V_{jj} \cong \mathbb{R}\ (j = 1, \dots, r) \text{ である．} \\ \bullet\ \text{いくつかの } k > j \text{ に対して } V_{kj} = \{0\} \\ \quad \text{となることはあり得る．} \\ \bullet\ r \text{ のことを } \Omega \text{ または } V \text{ の\textbf{階数}と呼ぶ．} \end{array} \right) \cdots\cdots ①$$

この V は，T 代数と呼ばれる非結合的行列代数で対合 $*$ を持つ $\mathfrak{X}$ の自己共役部分である．$\mathfrak{X}$ の下三角部分で，対角成分がすべて正である行列がなす Lie 群を h が走るときの T 代数積 hh^* の全体として，Ω が記述される (Vinberg [1])．このことは正定値実対称行列のなす等質開凸錐の記述を一般化するものとして，理論的にはきれいであるが，実際問題としては，結合法則がない行列代数を正面から扱うのは大変である．

本講演では，部分空間 V_{ji} 達の次元情報から向き付け (oriented) グラフを描き，それを介して，元の Ω を，正定値実対称行列のなす開凸錐のスライスとして得られるいくつかの凸錐を束ねることで実現する．その手続きを正当化する定理や命題の証明は，H. Ishi，H. Nakashima および講演者が近年行なってきた基本相対不変式に関する研究成果も用いるので易しくはないが，最終的に得られる手続きは，そのような難しい部分を完全にブラック・ボックス化できており，グラフから読み取れる情報による単純作業に帰着できているので，非専門家の等質開凸錐へのアクセスを容易にするものである．以下，その作業を記述する．

V の記述①から出発する．頂点集合 (vertex set) $\mathscr{V}$ と弧集合 (arc set) $\mathscr{A}$ を

$$\mathscr{V} := \{1, 2, \dots, r\}, \qquad \mathscr{A} := \{[j \to i]\ ;\ j > i,\ \dim V_{ji} > 0\}$$

とすることで，有向グラフ (digraph) $\Gamma(V) := (\mathscr{V}, \mathscr{A})$ を描く．ただし，$[j \to i]$ は j から出て i に入る有向弧を表す．$j > i$ のとき $[i \to j] \notin \mathscr{A}$ であり，また任意の j で $[j \to j] \notin \mathscr{A}$ でもあるので，$\Gamma(V)$ は向き付け (oriented) グラフである．$\Gamma(V)$ の源頂点 (source) の全体を $\mathscr{S}$ とする．したがって，$\mathscr{S}$ は入ってくる弧がない頂点の全体である．つねに $r \in \mathscr{S}$ ゆえ，$\mathscr{S} \neq \varnothing$ である．各 $\omega \in \mathscr{S}$ に対して，ω の出先隣接頂点 (out-neighbor)，すなわち $[\omega \to j] \in \mathscr{A}$ である頂点 j の全体を $N^{\mathrm{out}}(\omega)$ とし，$N^{\mathrm{out}}[\omega] := \{\omega\} \cup N^{\mathrm{out}}(\omega)$ とおく．

$$V_{[\omega]} := \bigoplus_{\substack{i \le j \\ i, j \in N^{\mathrm{out}}[\omega]}} V_{ji}, \qquad E_{[\omega]} := \bigoplus_{i \in N^{\mathrm{out}}[\omega]} V_{\omega i}$$

本研究は科研費 (課題番号:24540177) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17D25, 15B48, 22F30, 05C25
キーワード：left-symmetric algebras, homogeneous cones, positive-definite matrices, oriented graphs
[*1] 〒819-0395 福岡市西区元岡 744，九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: t-yamasaki@math.kyushu-u.ac.jp
[*2] e-mail: tnomura@math.kyushu-u.ac.jp
web: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/

と定義すると，$V_{[\omega]}$ は V の部分 Vinberg 代数，$E_{[\omega]}$ は $V_{[\omega]}$ の両側 ideal である．そして，

$$\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \triangle x \qquad (x \in V_{[\omega]},\ \eta \in E_{[\omega]}\ ;\ \triangle \text{は左対称代数の積})$$

とおく，$E_{[\omega]}$ の1次元部分空間 $V_{\omega\omega}$ のノルムを調節することにより，各 $\varphi_{[\omega]}(x)$ は自己共役作用素となり，$\varphi_{[\omega]} : V_{[\omega]} \to \mathrm{Sym}(E_{[\omega]})$ である．そして，$\varphi_{[\omega]}$ は Vinberg 代数 $V_{[\omega]}$ の忠実な表現になっている．さて，$\Omega_{[\omega]}$ を Vinberg 代数 $V_{[\omega]}$ に対応する等質開凸錐とする．

定理1 $x \in V_{[\omega]}$ とする．このとき，$x \in \Omega_{[\omega]} \iff \varphi_{[\omega]}(x) \in \mathscr{P}(E_{[\omega]})$：正定値錐.

線型写像 $\varphi_{[\omega]}$ は，$\Omega_{[\omega]}$ の単純推移的分裂可解 Lie 群 $H_{[\omega]}$ の作用と，$\mathscr{P}(E_{[\omega]})$ の単純推移的分裂可解 Lie 群の作用との間で共変であり，さらに次の意味で最小である．すなわち，左対称代数としての任意の単射準同型 $\Phi : V_{[\omega]} \to \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ に対して，$N \geqq \dim E_{[\omega]}$.

さて，$\mathscr{S} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ とする．$s = 1$ のときは定理1で Ω の実現を得ているので，$s \geqq 2$ とする．以下，各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して，$\pi_{[\omega]}$ は直交射影作用素 $V \to V_{[\omega]}$ とする．

定理2 $\Omega = \{x \in V\ ;\ \varphi_{[\omega]}(\pi_{[\omega]}(x)) \in \mathscr{P}(E_{[\omega]})\}$.

Ωの実現 $V^0_{[\omega_i]} := \varphi_{[\omega_i]}(V_{[\omega_i]}) \subset \mathrm{Sym}(E_{[\omega_i]})$ とし，$V^0 := V^0_{[\omega_1]} \oplus \cdots \oplus V^0_{[\omega_s]}$（外部直和）とおいて，$V^0$ の部分空間 $V^0_{[\mathscr{S}]}$ を次で定義する.

$$V^0_{[\mathscr{S}]} := \bigl\{(X_1, \ldots, X_s) \in V^0\ ;\ \pi_{[\omega_j]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_i]}(X_i) = \pi_{[\omega_i]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_j]}(X_j) \text{ for any } i \neq j\bigr\}.$$

この $V^0_{[\mathscr{S}]}$ を $\bigl[V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}\bigr]$ と表す．線型同型 $V \cong V^0_{[\mathscr{S}]}$ は $V = V_{[\omega_1]} + \cdots + V_{[\omega_s]}$ において，次式で $\dim V$ を勘定することに対応している.

$$\dim V = \sum_{p=1}^{s} (-1)^{p-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq s} \dim(V_{[\omega_{i_1}]} \cap \cdots V_{[\omega_{i_p}]}).$$

$\Omega^0_{[\omega_i]} := \varphi_{[\omega_i]}(\Omega_{[\omega_i]})$ とおき，$V^0_{[\mathscr{S}]}$ の形成方法に従って，$\Omega^0_{[\mathscr{S}]} := \bigl[\Omega^0_{[\omega_1]}, \ldots, \Omega^0_{[\omega_s]}\bigr]$ とすると，我々の実現 $\Omega \cong \Omega^0_{[\mathscr{S}]}$ を得る．そして，$H^0_{[\omega_i]} := \exp L(V^0_{[\omega_i]}) \subset GL(E_{[\omega_i]})$ （$L(x)$ は Vinberg 代数の左乗法作用素）が $\Omega^0_{[\omega_i]} \subset \mathscr{P}(E_{[\omega_i]})$ の単純推移的な分裂可解 Lie 群であり，$H^0_{[\mathscr{S}]} := \bigl[H^0_{[\omega_1]}, \ldots, H^0_{[\omega_s]}\bigr]$ が $\Omega^0_{[\mathscr{S}]}$ への単純推移的な分裂可解 Lie 群である．そして，自然な線型同型写像 $\varphi_{[\mathscr{S}]} : V \xrightarrow{\sim} V^0_{[\mathscr{S}]}$ は，H 作用と $H^0_{[\mathscr{S}]}$ 作用との間で共変である．さらに，ω_i と ω_j に対する合流頂点 (junction) 集合 $\mathscr{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\mathrm{out}}[\omega_i] \cap N^{\mathrm{out}}[\omega_j]$ を導入することにより，

$$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \bigoplus_{\substack{k \leq l \\ k,l \in \mathscr{J}(\omega_i, \omega_j)}} V_{lk}$$

と書け，これにより $\Omega^0_{[\omega_i]}$ 達の束ね方も見えてくる．最後に，部品凸錐達 (component cones) $\{\Omega^0_{[\omega_1]}, \ldots, \Omega^0_{[\omega_s]}\}$ は，順序を除いて，Ω から一意的に定まることに注意しておく.

参考文献

[1] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[2] T. Yamasaki and T. Nomura, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, Kyushu J. Math., **69** (2015), 11–48.