等質ジーゲル領域の対称性条件をめぐって

野 村 隆 昭

（京都大学大学院理学研究科）

於：東京理科大学理工学部

2004年11月30日

ジーゲル領域

導入は Piatetski-Shapiro (1957),
上半平面の一般化，有界領域に正則同相

もともとの導入の動機：

- Hermite 対称空間の上半平面型の記述
- チューブ領域 $V + i\Omega$ では表されないものがある
  （V : 実ベクトル空間，Ω : 開凸錐 $\subset V$）
  $\cdots\cdots$ 開単位球 $\subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqq 2)$
- 保型函数論への応用

the most unexpected application

$\cdots\cdots$「大量の」非対称有界等質領域の発見 (1959)

それ以前の有界等質領域の研究

É. Cartan, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935)
$\cdots\cdots$ $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$ では任意の有界等質領域は対称

問題： $\mathbb{C}^n$ $(n \geqq 4)$ では？

$\mathscr{D}$: 有界等質領域

Armand Borel (1954), Jean-Louis Koszul (1955)

$\mathscr{D}$ が半単純 Lie 群の等質空間 $\Longrightarrow$ $\mathscr{D}$ は対称

Jun-ichi Hano (1957)

半単純という仮定を「unimodular」まで弱める

（unimodular $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 左不変 Haar 測度は右不変でもある）

Piatetski-Shapiro (1959)

$\mathbb{C}^5$, $\mathbb{C}^4$ での非対称等質 Siegel 領域の例（第 2 種）

Vinberg (1960)

非対称等質チューブ領域 $\leftrightsquigarrow$ 非自己双対等質開凸錐

- $\mathbb{R}^5$ でのものが最低次元 $\leftrightsquigarrow$
  $\mathbb{C}^5$ に最低次元の非対称チューブ領域

自然に生じる問題：

等質ジーゲル領域の中での対称ジーゲル領域の

特徴付け

ジーゲル領域　— 定義 —

V：実ベクトル空間（有限次元）

$\cup$

Ω：正則開凸錐

（$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直線を全然含まない）

$W := V_{\mathbb{C}}$　（$w \mapsto w^*$：実型 V に関する W の共軛）

U：複素ベクトル空間（有限次元）

$Q : U \times U \to W$, Hermitian sesquilinear Ω-positive

$$i.e., \begin{cases} Q(u', u) = Q(u, u')^* \\ Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \quad (0 \neq \forall u \in U) \end{cases}$$

$$D := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}$$

第 2 種のジーゲル領域

$U = \{0\}$ も認める．このときは $D = \Omega + iV$.

（チューブ領域 or 第 1 種のジーゲル領域 ）

仮定：　D は 等質

$i.e.,$ $\mathrm{Hol}(D) \curvearrowright D$ は推移的

D: 等質ジーゲル領域

D : 対称 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall z \in D,\ \exists \sigma_z \in \mathrm{Hol}(D)$ s.t.

$$\begin{cases} \sigma_z^2 = \text{identity}, \\ z \text{ は } \sigma_z \text{ の孤立固定点}. \end{cases}$$

例１：階数 1 のジーゲル領域（対称）

$V = \mathbb{R},\ \ \Omega = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\}$,
$W = \mathbb{C},\ \ U = \mathbb{C}^m\ (m = 0, 1, 2, \dots)$,
$Q(u_1, u_2) := \frac{1}{2} u_1 \cdot \overline{u}_2 \quad (u_1, u_2 \in \mathbb{C}^m)$.

$D = \{(u, w)\,;\, \mathrm{Re}\, w > \frac{1}{4}|u|^2\} \approx B^{m+1} \subset \mathbb{C}^{m+1} = U \times W$

by $\mathscr{C}(u, w) = \left(\dfrac{u}{w+1}, \dfrac{w-1}{w+1} \right)$: Cayley 変換

B^{m+1} は対称： $z \mapsto -z$ が $0 \in B^{m+1}$ での symmetry.

$\mathscr{C}$ を経て，D の $(0, 1)$ での symmetry は

$$(u, w) \mapsto (-w^{-1}u,\ w^{-1})$$

例２：非準対称ジーゲル領域

$$V = \mathrm{Sym}\,(2,\mathbb{R}),\quad \Omega = \mathrm{Sym}^{++}(2,\mathbb{R}),$$
$$W = \mathrm{Sym}\,(2,\mathbb{C}),\quad U = \mathbb{C},$$
$$Q(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\,u_1\overline{u}_2 \end{pmatrix} \quad (u_1,u_2 \in \mathbb{C}).$$

$W \ni w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{C}^3$ により

$$D = \{(u,w)\,;\,2\,\mathrm{Re}\,w - Q(u,u) \in \Omega\}$$
$$= \left\{(u,w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{C}^4\,;\,\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 - |u|^2 \end{pmatrix} \gg 0\right\}.$$

例３：準対称で非対称なジーゲル領域

V，Ω，W は例２に同じ，$U = \mathbb{C}^2$,

$$Q(u,u') = \begin{pmatrix} 2\,u_1\overline{u}'_1 & u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1 \\ u_1\overline{u}'_2 + u_2\overline{u}'_1 & 2\,u_2\overline{u}'_2 \end{pmatrix} \in W.$$

$$Q(u,u) = 2\begin{pmatrix} |u_1|^2 & \mathrm{Re}\,u_1\overline{u}_2 \\ \mathrm{Re}\,u_1\overline{u}_2 & |u_2|^2 \end{pmatrix} \in \overline{\Omega}.$$

$$D = \left\{(u,w)\,;\,\begin{pmatrix} v_1 - |u_1|^2 & v_2 - \mathrm{Re}\,u_1\overline{u}_2 \\ v_2 - \mathrm{Re}\,u_1\overline{u}_2 & v_2 - |u_2|^2 \end{pmatrix} \gg 0\right\}.$$

対称ジーゲル領域の特徴付け：

1970年代後半： Satake（1980年の本）
Dorfmeister (Habilitationsschrift, 1978)

D'Atri, Azukawa の80年代の仕事（曲率条件）

D'Atri-Dorfmeister-Y. Zhao [DDZ] (1985)
Isotropy 表現の詳細な研究

$\mathbf{G} := \mathrm{Hol}(D)^\circ$: 単位元の連結成分

DDZ の結果のいくつか：次は同値：

(1) D は対称.

(2) $T_e(D)$ 上の概複素構造は **isotropy** 群の微分表現作用素で表される.

(3) $\mathbf{G}$ 不変なベクトル場は自明なものしか存在しない.

(4) D 上の $\mathbf{G}$ 不変な微分作用素のなす代数 $\mathbf{D}(D)^{\mathbf{G}}$ は可換.

注意： D が対称ならば，さらに良く

$$\mathbf{D}(D)^{\mathbf{G}} \cong \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r] \quad (r := \mathrm{rank}(D))$$

今日の話

$\mathscr{L}$: Laplace–Beltrami 作用素
（D の標準的 Kähler 計量に関する）

> **定理 A.** [N, 2001]
> $\mathscr{L}$ と Berezin 変換が可換
> $\iff$ D は対称で，計量は Bergman
> （正の定数倍を除いて）

> **定理 B.** [N, 2003]
> Poisson–Hua 核が$\mathscr{L}$で消える（$\mathscr{L}$調和）
> $\iff$ D は対称で，計量は Bergman
> （正の定数倍を除いて）

注意： 最初から Bergman 計量のみなら，定理 B は
Hua–Look (1959), Korányi (1965) for $\Leftarrow$
Xu (1979) for $\Rightarrow$

Xu の証明をトレースした人は殆どいない？

（彼自身の N-Siegel 領域の理論を理解する必要があり，
そのためには，中国語で書かれた英訳のない彼の論文
もフォローする必要あり．）

Berezin 変換

- Berezin の量子化に現れる重要な作用素
- $L^2(D)$（測度は $\mathbf{G}$ 不変測度）上の $\mathbf{G}$ 不変な有界自己共軛積分作用素

$*$ D が対称であるとき：

- Helgason による，対称空間上の Fourier 解析を用いて，Berezin 変換の解析が可能．
  特に，積分核である Berezin 核の Fourier 変換像が explicit に求まる．

$\rightsquigarrow$ Berezin 変換の explicit なスペクトル分解を得る．

$\rightsquigarrow$ Berezin 変換は，$\mathbf{D}(D)^{\mathbf{G}}$ の代数的独立な生成元の関数　（Berezin の戦略）

$\rightsquigarrow$ Laplace-Beltrami 作用素とは当然可換．

定理 A $\Longrightarrow$ このプログラムは対称領域のみ有効！

問題：　非対称な D のときのスペクトル分解？

Piatetski-Shapiro 代数　– 正規 j 代数 –

D : 等質ジーゲル領域

$\exists G \subset \mathrm{Hol}_{\mathrm{Aff}}(D)$: 分裂可解リー群 $\curvearrowright D$ 単純推移的

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ は Piatetski-Shapiro 代数 の構造を持つ
（正規 j 代数）

$$\begin{cases} \exists J : \mathfrak{g} \text{ 上の可積分な概複素構造} \\ \exists \omega : \mathfrak{g} \text{ 上の 認容 線型形式 } \textit{i.e.}, \\ \qquad \langle x | y \rangle_\omega := \langle [Jx, y], \omega \rangle \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の } J \text{ 不変内積} \end{cases}$$
（正定値）

例 (Koszul 1955).　Koszul 形式

$$\langle x, \beta \rangle := \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}(Jx) - J\,\mathrm{ad}(x)\big) \quad (x \in \mathfrak{g}).$$

この β は認容である.

$\because$ 実際正の定数倍を除いて，$\langle x | y \rangle_\beta$ は $D \approx G$ 上の Bergman 計量から定義される $\mathfrak{g} \equiv T_e(D)$ 上の Hermite 内積の実部になっている（正の定数倍を除いて）.

$\mathfrak{g}$ の構造

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}$ $\quad \begin{cases} \mathfrak{a}：\text{可換}, \quad \mathfrak{n} := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ \mathfrak{n} \text{ は } \mathfrak{a}\text{-root 空間の和（正ルートのみ）} \end{cases}$

$ax+b$ 代数の直積に同型な部分代数をつねに持つ：

$\exists H_1,\ldots,H_r$: $\mathfrak{a}$ の基底 $(r := \operatorname{rank}\mathfrak{g})$ s.t.

$E_j := -JH_j \in \mathfrak{n}$ とおくとき，$[H_j, E_k] = \delta_{jk}E_k$.

ルートの可能な形：

$\frac{1}{2}(\alpha_k \pm \alpha_j)\ (j<k), \quad \alpha_k, \quad \frac{1}{2}\alpha_k$

$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$: $H_1,\ldots,H_r$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底

- $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k\ (k=1,\ldots,r)$.
- $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ ($\forall\omega$: adm.) に関して互いに直交

$E_k^* \in \mathfrak{g}^*$: $\langle E_k, E_k^*\rangle = 1$ and $=0$ on $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \neq \alpha_k)$.

- 認容線型形式の全体は $\mathfrak{a}^* \oplus \{0\} \oplus \sum_{k=1}^{r} \mathbb{R}_{>0}E_k^*$.

$\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して，$E_{\mathbf{s}}^* := \sum_{k=1}^{r} s_k E_k^* \in \mathfrak{g}^*$.

$s_1>0,\ldots,s_r>0$（$\mathbf{s}>0$ と書く）のとき

$\langle x|y\rangle_{\mathbf{s}} := \langle [Jx,y], E_{\mathbf{s}}^*\rangle$ は $\mathfrak{g}$ 上の J 不変な内積

$\rightsquigarrow$ G 上の左不変リーマン計量

$\rightsquigarrow$ $\mathscr{L}_{\mathbf{s}}$: G 上の対応する Laplace-Beltrami 作用素

Berezin 変換

κ : D の Bergman 核

Berezin 核の定義式

$$A_\lambda(z_1,z_2) := \left(\frac{|\kappa(z_1,z_2)|^2}{\kappa(z_1,z_1)\kappa(z_2,z_2)}\right)^\lambda \quad (z_j \in D;\ \lambda \in \mathbb{R})$$

- A_λ is G 不変 $\quad A_\lambda(g\cdot z_1,\ g\cdot z_2) = A_\lambda(z_1,z_2)$.

$D \approx G$ なので，G 上で解析をする：

$\quad a_\lambda(g) := A_\lambda(g\cdot \mathrm{e}, \mathrm{e}) \quad (g \in G,\ \mathrm{e} \in D$: fixed ref. pt.$)$

- $a_\lambda \in L^1(G)$ if $\lambda > \lambda_0$ $(0 < \lambda_0 < 1$: 明示的に計算可)

$\left(\begin{array}{l} D \text{ 上の正則函数からなるある Hilbert 空間の非消滅条件,} \\ \text{そして } \kappa^\lambda \text{ がそこでの再生核になっている} \end{array}\right)$

Berezin 変換

$$B_\lambda f(x) := \int_G f(y) a_\lambda(y^{-1}x)\, dy = f * a_\lambda(x)$$

$B_\lambda \in \mathbf{B}(L^2(G))$: 正の自己共軛作用素

$\beta \in \mathfrak{g}$: Koszul 形式. $\quad \boxed{\beta|_{\mathfrak{n}} = E^*_{\mathbf{c}}|_{\mathfrak{n}}}$ with $\mathbf{c} > 0$.

定理 A. $\lambda > \lambda_0$: 固定

B_λ と $\mathscr{L}_{\mathbf{s}}$ が可換

$\quad \Longleftrightarrow$ D は対称で $\mathbf{s} = \gamma\mathbf{c}$ with $\gamma > 0$.

Poisson–Hua 核

$S(z_1, z_2)$: D の Szegö 核（= Hardy space の再生核）

Hardy 空間

次をみたす D 上の正則函数 F からなる Hilbert 空間：

$$\boxed{\sup_{t\in\Omega} \int_U dm(u) \int_V \left|F\left(u, t+\tfrac{1}{2}Q(u,u)+ix\right)\right|^2 dx < \infty}$$

Σ : D の Shilov 境界

$$\Sigma = \left\{(u,w) \in U \times W\,;\, w + w^* = Q(u,u)\right\}$$

$z \in D$, $\zeta \in \Sigma$ のときも $S(z, \zeta)$ は意味を持つ.

$$P(z,\zeta) := \frac{|S(z,\zeta)|^2}{S(z,z)} \quad (z \in D,\ \zeta \in \Sigma) :$$

D の Poisson–Hua 核

$$P_\zeta^G(g) := P(g \cdot \mathrm{e},\ \zeta) \quad (g \in G).$$

定理 B. $\mathscr{L}_{\mathbf{s}} P_\zeta^G = 0$ for $\forall \zeta \in \Sigma$

$\Longleftrightarrow$ D は対称で $\mathbf{s} = \gamma \mathbf{c}$ with $\gamma > 0$.

幾何学的背景

定理 A や定理 B を成立せしめている幾何学的背景？

等質ジーゲル領域の有界モデルの幾何との関係

幾何 $\rightsquigarrow$ 幾何学的ノルム等式

- ノルム等式の成立 $\Longleftrightarrow$ 領域の対称性

専門家の意見

非(準)対称なジーゲル領域の最も標準的な有界モデルなど存在しない

私の立場

適切な有界モデルは取り扱う問題に依って変わる

- 対称ジーゲル領域の有界モデルとは ……
  非 cpt Hermite 対称空間の Harish-Chandra モデル
  $\left(\begin{array}{l}\text{正の Hermite JTS のスペクトル・ノルムに} \\ \text{関する開単位球}\end{array}\right)$
- 準対称ジーゲル領域の標準的モデル
  …… by Dorfmeister (1980)
  Jordan 代数構造から自然に定義される Cayley 変換
  によるジーゲル領域の像
  (C. Kai : 対称領域でない限り凸集合ではない：論文準備中)

- 一般のジーゲル領域では
  次の Cayley 変換を考えることができる：

- 開凸錐の特性函数に付随した Cayley 変換
  (Penney, 1996)
- Bergman 核に付随した Cayley 変換 (N, 2001)
- Szegö 核に付随した Cayley 変換 (N, 2003)

etc. . .

より一般に，各認容線型形式 $E_{\mathbf{s}}^*$ $(\mathbf{s} > 0)$ に付随する Cayley 変換を定義することができる．

複合べき乗函数 (compound power functions) by Gindikin

- 半直線 $\{x > 0\}$ 上の解析で基本的な函数 $\cdots$ x^λ
- $\Omega = \mathrm{Sym}^{++}(r, \mathbb{R})$ のとき，$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ として
  $\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2}\Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \cdots \Delta_r(x)^{s_r}$.
  $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$: x の principal minors.

$\exists H \subset G$: s.t. $H \curvearrowright \Omega$ 単純推移的

$E \in \Omega$（標準的に選ばれた基点）

Then, $H \approx \Omega$ (diffeo) by $h \mapsto hE$.

- $G = N \rtimes A$, $H = N(0) \rtimes A$ with $A := \exp \mathfrak{a}$

For $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$, put $\alpha_{\mathbf{s}} := \sum_{j=1}^{r} s_j \alpha_j \in \mathfrak{a}^*$

（$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$: $H_1, \ldots, H_r$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底）

$\chi_{\mathbf{s}}(\exp x) := \exp\langle x, \alpha_{\mathbf{s}}\rangle$ $(x \in \mathfrak{a})$:
A の（従って H の）1 次元表現

$\rightsquigarrow$ Ω 上の函数を次式で得る：$\Delta_{\mathbf{s}}(hE) := \chi_{\mathbf{s}}(h)$ $(h \in H)$

- $\Delta_{\mathbf{s}}$ は $\Omega + iV$ 上の正則函数に解析接続される
（Ω^* 上の Riesz 超函数の Laplace 変換）
(Gindikin, Ishi (2000))，ただし

$$\Omega^* := \{\xi \in V^* ; \langle x, \xi\rangle > 0 \ \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

$E_{\mathbf{s}}^*$ に付随する擬逆元写像

Recall: $-\frac{d}{dt}\log\det(x+tv)^{-1}\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}(x^{-1}v)$

各 $x\in\Omega$ に対して，$\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(x)\in V^*$ を次式で定義する：

$$\langle v, \mathscr{I}_{\mathbf{s}}(x)\rangle := -\frac{d}{dt}\log\Delta_{-\mathbf{s}}(x+tv)\Big|_{t=0} \quad (v\in V).$$

- $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(\lambda x) = \lambda^{-1}\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(x) \quad (\lambda > 0)$

命題. $E_{\mathbf{s}}^*$: 認容 $(\mathbf{s}>0)$.

(1) $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(x)\in\Omega^*$，かつ $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}:\Omega\to\Omega^*$: 全単射.

(2) $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}$ は有理写像 $W\to W^*$ に解析接続される.

(3) $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}^{-1}:\Omega^*\to\Omega$ の明示的公式も得て，それは有理写像 $W^*\to W$ に解析接続される.
従って，$\mathscr{I}_{\mathbf{s}}$ は 双有理.

(4) $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}:\Omega+iV\to\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ は双正則.

- 一般に $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)\not\subset\Omega^*+iV^*$.
- $\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)=\Omega^*+iV^*$

$\iff s_1=\cdots=s_r$ かつ Ω は自己双対.

(C. Kai and N, J. Math. Soc. Japan, 2005)

Cayley 変換

まず $E_{\mathbf{s}}^* = \mathscr{I}_{\mathbf{s}}(E) \in \Omega^*$. $\left(1-\frac{2}{w+1}=\frac{w-1}{w+1}\right)$

$C_{\mathbf{s}}(w) := E_{\mathbf{s}}^* - 2\,\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(w+E)$ for tube domains

$$\mathscr{C}_{\mathbf{s}}(u,w) := \underbrace{2\,\langle Q(u,\cdot),\mathscr{I}_{\mathbf{s}}(w+E)\rangle}_{\in U^\dagger} \oplus \underbrace{C_{\mathbf{s}}(w)}_{\in W^*}$$

$U^\dagger$: U 上の反線型形式の全体

> **命題.**
> (1) $\mathscr{C}_{\mathbf{s}} : D \to \mathscr{C}_{\mathbf{s}}(D)$ は双有理で双正則.
> (2) $\mathscr{C}_{\mathbf{s}}^{-1}$ も明示的に書き下せる.

> **定理 [N, 2003].** $\mathscr{C}_{\mathbf{s}}(D)$ は$U^\dagger \oplus W^*$で有界.

注意. パラメタ $\mathbf{s} > 0$ が一般だと，たとえ D が対称であっても，$\mathscr{C}_{\mathbf{s}}(D)$ の凸性は出てこない

- $C_{\mathbf{s}}(\Omega + iV)$ と $C_{\mathbf{s}}^*(\Omega^* + iV^*)$ が共に凸集合
  $\iff s_1 = \cdots = s_r$ かつ Ω は自己双対.
  $\left(\Omega^* \rightsquigarrow \mathscr{I}_{\mathbf{s}}^*(=\mathscr{I}_{\mathbf{s}}^{-1}) \rightsquigarrow C_{\mathbf{s}}^*\right)$

(C. Kai and N, Diff. Geom. Appl., 2005)

- Bergman 核も Szegö 核も正の定数倍を除くと，適当な $\mathbf{s} > 0$ に対して
$$\eta(z_1, z_2) = \Delta_{-\mathbf{s}}\big(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2)\big)$$
$$(z_j = (u_j, w_j)).$$
- Ω の特性函数も，正の定数倍を除くと，適当な $\mathbf{s} > 0$ に対して，$\Delta_{-\mathbf{s}}$ の形.

$\Longrightarrow$ Bergman 核に付随した Cayley 変換
Szegö 核に付随した Cayley 変換
Ω の特性函数に付随した Cayley 変換

ノルム等式（その１）

$E_{\mathbf{s}}^* \rightsquigarrow \langle x|y\rangle_{\mathbf{s}}$: $\mathfrak{g}$ 上の J 不変内積

$\rightsquigarrow g \mapsto g\cdot \mathrm{e}$ により $G \equiv D$ と見て
$T_{\mathrm{e}}(D) \equiv U \oplus W$ 上に Hermite 内積

$\rightsquigarrow U^\dagger \oplus W^*$ 上に Hermite 内積 $(\cdot|\cdot)_{\mathbf{s}}$
及びノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{s}}$

$\Psi_{\mathbf{s}} \in \mathfrak{g}$ をとって $\mathrm{trad}(x) = \langle x|\Psi_{\mathbf{s}}\rangle_{\mathbf{s}}$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$.

このとき $\Psi_{\mathbf{s}} \in \mathfrak{a}$がわかる.

Recall that $\beta|_{\mathfrak{n}} = E_{\mathbf{c}}^*|_{\mathfrak{n}}$ for some $\mathbf{c} > 0$.
従って， $\Delta_{-\mathbf{c}}(w_1 + w_2^* - Q(u_1,u_2))$ は
D の Bergman 核（正の定数倍を除いて）.
(Bergman 核 $\longrightarrow$ Berezin 核 $\rightsquigarrow$ Cayley 変換 $\mathscr{C}_{\mathbf{c}}$ を考える）

> **命題.** $\forall g \in G$ に対して
> $$\mathscr{L}_{\mathbf{s}} a_\lambda(g) = \lambda a_\lambda(g)\big(-\lambda\|\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(g\cdot \mathrm{e})\|_{\mathbf{s}}^2 + \langle \Psi_{\mathbf{s}}, \alpha_{\mathbf{c}}\rangle\big).$$

観察. (1) $a_\lambda(g) = a_\lambda(g^{-1})$ for $\forall g \in G$.
(2) B_λ と $\mathscr{L}_{\mathbf{s}}$ が可換
$$\iff \mathscr{L}_{\mathbf{s}} a_\lambda(g) = \mathscr{L}_{\mathbf{s}} a_\lambda(g^{-1}) \text{ for } \forall g \in G.$$

- B_λ と $\mathscr{L}_{\mathbf{s}}$ が可換
$$\iff \|\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(g\cdot \mathrm{e})\|_{\mathbf{s}} = \|\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(g^{-1}\cdot \mathrm{e})\|_{\mathbf{s}} \text{ for } \forall g \in G.$$

定理： [N, 2001]
$\|\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(g\cdot \mathrm{e})\|_{\mathbf{s}} = \|\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(g^{-1}\cdot \mathrm{e})\|_{\mathbf{s}}$ for $\forall g \in G$
$\iff$ D は対称で $\mathbf{s} = \gamma\mathbf{c}$ with $\gamma > 0$.

$\mathscr{C}_{\mathbf{c}}(\mathrm{e}) = 0$ より，定理は次のようにもいえる ：

定理：
$\|h\cdot 0\|_{\mathbf{s}} = \|h^{-1}\cdot 0\|_{\mathbf{s}}$ for $\forall h \in \mathscr{C}_{\mathbf{c}}\circ G\circ \mathscr{C}_{\mathbf{c}}^{-1}$ $\iff$
$\mathscr{D} := \mathscr{C}_{\mathbf{c}}(D)$ は対称で
$\mathbf{s} = \gamma\mathbf{c}$ $(\gamma > 0)$.

D : 対称 $\Longrightarrow$ $\mathscr{D}$ は本質的に非 cpt Hermite
対称空間の Harish-Chandra モデル

$\mathrm{G} := \mathrm{Hol}(\mathscr{D})^{\circ}$: 半単純リー群
$\mathrm{K} := \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(0)$: G の極大 cpt 部分群

$\mathrm{G} = \mathrm{KAK}$ with $\mathrm{A} := \mathscr{C}_{\mathbf{c}}\circ A\circ \mathscr{C}_{\mathbf{c}}^{-1}$ より
$\|h\cdot 0\|_{\mathbf{c}} = \|h^{-1}\cdot 0\|_{\mathbf{c}}$ $(\forall h \in \mathrm{G})$ が示せる．

単位円板の場合： $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$

$$\mathsf{G} = SU(1,1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \; ; \; |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$$g \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

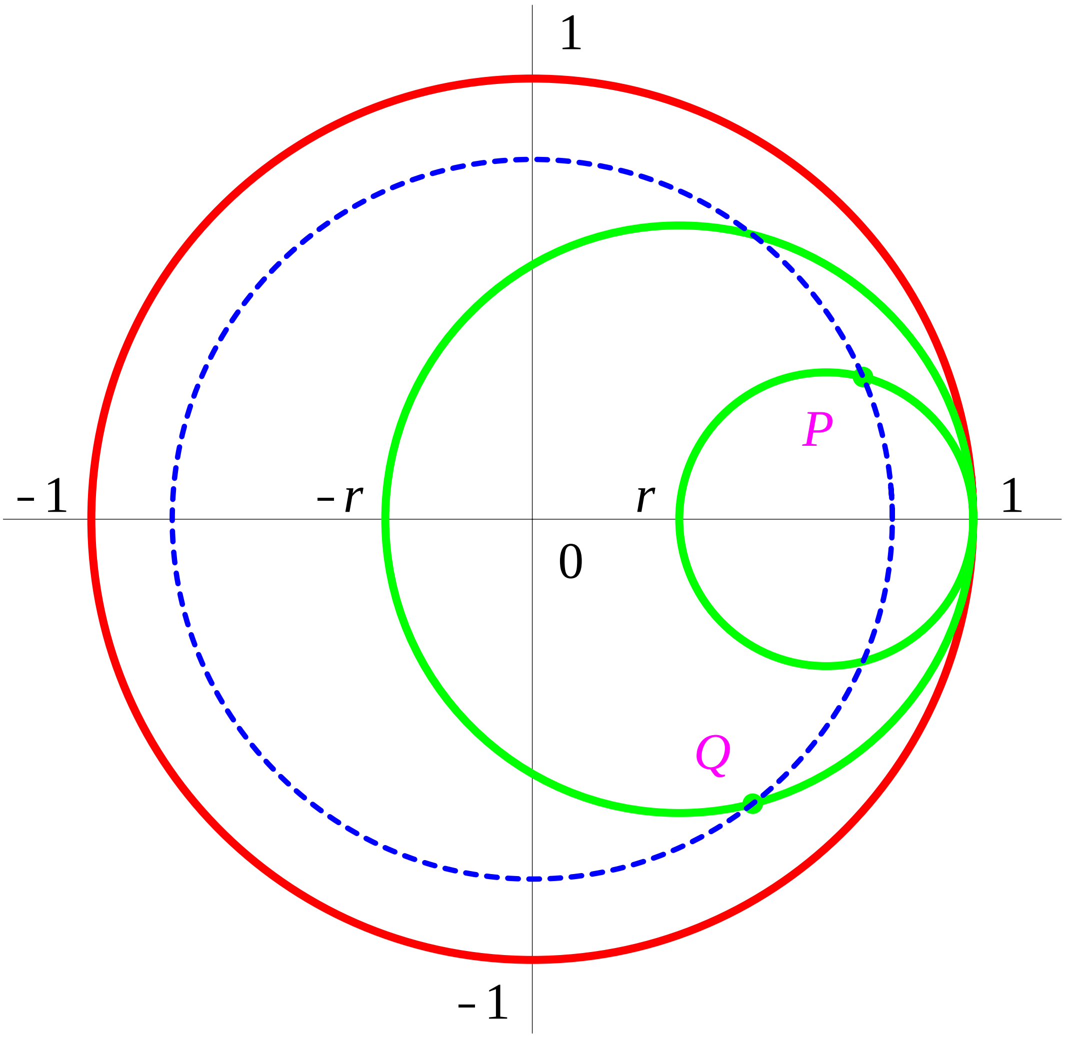
$$\begin{cases} g \cdot 0 = \dfrac{\beta}{\overline{\alpha}} \\ g^{-1} \cdot 0 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases} \Longrightarrow |g \cdot 0| = |g^{-1} \cdot 0|.$$

岩沢可解部分群に敢えて留まると興味深い絵を得る.

$$\mathsf{A} := \left\{ a_t := \begin{pmatrix} \cosh \frac{t}{2} & \sinh \frac{t}{2} \\ \sinh \frac{t}{2} & \cosh \frac{t}{2} \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathsf{N} := \left\{ n_\xi := \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{2}\xi & \frac{i}{2}\xi \\ -\frac{i}{2}\xi & 1 + \frac{i}{2}\xi \end{pmatrix} \; ; \; \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Then $\mathscr{C}_{\mathbf{c}} \circ G \circ \mathscr{C}_{\mathbf{c}}^{-1} = \mathsf{NA}$.



$r := a_t \cdot 0 = \tanh(t/2)$

P : $n_\xi a_t \cdot 0 = n_\xi \cdot r \in \mathsf{N} \cdot r$:
horocycle emanating from $1 \in \partial\mathbb{D}$ cutting $\mathbb{R}$ at r.

Q : $(n_\xi a_t)^{-1} \cdot 0 = n_{-e^{-t}\xi} a_{-t} \cdot 0 = n_{-e^{-t}\xi} \cdot (-r) \in \mathsf{N} \cdot (-r)$:
horocycle emanating from $1 \in \partial\mathbb{D}$ cutting $\mathbb{R}$ at $-r$.

ノルム等式（その２）

$\mathbf{b} > 0$ をとって $\Delta_{-\mathbf{b}}(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2))$ が D の Szegö 核としておく（正の定数倍を除く）.
(Szegö 核 $\longrightarrow$ Poisson-Hua 核 $\rightsquigarrow$ Cayley 変換 $\mathscr{C}_{\mathbf{b}}$)

命題： $\forall\zeta \in \Sigma$ に対して
$$\mathscr{L}_{\mathbf{s}} P_\zeta^G = (-\|\mathscr{C}_{\mathbf{b}}(\zeta)\|_{\mathbf{s}}^2 + \langle \Psi_{\mathbf{s}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle) P_\zeta^G.$$

ゆえに

$$\mathscr{L}_{\mathbf{s}} P_\zeta^G = 0 \text{ for } \forall\zeta \in \Sigma$$
$$\iff \|\mathscr{C}_{\mathbf{b}}(\zeta)\|_{\mathbf{s}}^2 = \langle \Psi_{\mathbf{s}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle \text{ for } \forall\zeta \in \Sigma.$$

定理： [N,2003]
$\|\mathscr{C}_{\mathbf{b}}(\zeta)\|_{\mathbf{s}}^2 = \langle \Psi_{\mathbf{s}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle$ for $\forall\zeta \in \Sigma$
$\iff$ D は対称で $\mathbf{s} = \gamma\mathbf{b}$ with $\gamma > 0$.
このとき $\mathbf{s} = \gamma'\mathbf{c}$ with $\gamma' > 0$ でもある.

- $\mathbf{c} > 0$ は $\beta|_{\mathfrak{n}} = E_{\mathbf{c}}^*|_{\mathfrak{n}}$ ととっている.
  ただし β は Koszul 形式.