等質開凸錐，クラン，そして基本相対不変式

九大・数理　野村隆昭

論文 [7] において，認容線型形式をパラメタに持つ等質 Siegel 領域の Cayley 変換を定義するときに，逆行列の一般化として，同パラメタを持つ擬逆元なるものを導入した．擬逆元を対応させる写像は有理写像になり，従って Cayley 変換も有理写像になるのであるが，それは，開凸錐の接空間に導入される「クラン」と呼ばれる非結合的な代数構造に関する右乗法作用素の逆写像に認容線型形式を合成したものが擬逆元に等しくなることから導かれる．このことはクランにおける右乗法作用素が重要な情報を含み，とくにその行列式は興味深い多項式函数であることを意味する．本稿ではこの右乗法作用素やその行列式の構造，及びそれらに関連する事柄について述べる．

§1. 準備

有限次元の実ベクトル空間を V とし，簡単のため，V にはあらかじめ内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ が備わっているとする．Ω を V の正則な[1]開凸錐とする．ここでいう正則性とは，Ω は直線を含まないということである．これはまた，Ω の双対錐

$$\Omega^* := \bigl\{y \in V\ ;\ \langle\, x\,|\,y\,\rangle > 0\ \ (\text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\bigr\}$$

が空集合でないことと同値である．Ω の線型同型群を $G(\Omega)$ で表す：

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}.$$

$G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であり，従って線型リー群である．以下 $G(\Omega)$ は Ω に推移的に作用していると仮定する．このとき Ω は等質であると言う．Ω が自己双対であるとは，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_0$ があって，

$$\Omega = \bigl\{y \in V\ ;\ \langle\, x\,|\,y\,\rangle_0 > 0\ \ (\text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\bigr\}$$

となることである．言い換えれば，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_0$ で考えた Ω の双対錐が Ω に一致することである．自己双対な等質開凸錐のことを，Faraut–Korányi [1] に従って，対称錐と呼ぶ．

さて，$\Omega \subset V$ は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関して自己双対な等質開凸錐とする．すなわち対称錐とする．このとき，Vinberg と Koecher により，V には Euclid 型 Jordan 代数の構造が入る．すなわち，V には双線型な積 $x, y \mapsto xy$ が定義されて

$$xy = yx, \qquad x(x^2y) = x^2(xy)$$

がすべての $x, y \in V$ に対して成り立っていて（V が Jordan 代数であるということ），さらに

$$\langle\, xy\,|\,z\,\rangle = \langle\, x\,|\,yz\,\rangle \qquad (\forall x, y, z \in V)$$

[1] 今後この正則性はつねに仮定し，特に断らない．

が成り立っている（Jordan 代数が Euclid 型であるということ）．既約な対称錐のリストは以下の通りである．

Ω	V	Jordan 積
$\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++}$	$\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$	$A \circ B := \frac{1}{2}(AB+BA)$
$\mathrm{Herm}(r,\mathbb{C})^{++}$	$\mathrm{Herm}(r,\mathbb{C})$	同上
$\mathrm{Herm}(r,\mathbb{H})^{++}$	$\mathrm{Herm}(r,\mathbb{H})$	同上
$\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})^{++}$	$\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$	同上
Lorentz cone	$\mathbb{R}^n$	(略)

今の場合 $G(\Omega)$ は簡約可能な Lie 群で，$K = \mathrm{Aut}(V)$（Jordan 代数 V の自己同型群），$\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$，$\mathfrak{p} := \{M(x)\ ;\ x \in V\}$（Jordan 代数 V における乗法作用素の全体）とおくと，Cartan 分解 $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を得る．

次に $\Omega \subset V$ を一般の等質開凸錐とする．このとき，V にはクランと呼ばれる非結合的な代数構造が入る：すなわち，双線型な積 $x \triangle y = L(x)y = R(y)x$ が定義されて

(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ (for all $x, y \in V$),

(2) $s \in V^*$ が存在して，$\langle x \triangle y, s\rangle$ は V に内積を定義する，

(3) 各左乗法作用素 $L(x)$ は実固有値のみを持つ．

実際，この代数構造は $G(\Omega)$ の岩沢部分群（Borel 部分群）S と密接に関係して定義されていて，$\mathfrak{s} := \mathrm{Lie}(S)$ はこのクラン構造における左乗法作用素の全体になっている：$\mathfrak{s} = \{L(x)\ ;\ x \in V\}$.

§2. 基本相対不変式

$\Omega \subset V$ を等質開凸錐とする．このとき，$G(\Omega)$ の岩沢部分群 S（分裂可解）があって，Ω に単純推移的に作用している．

定義 2.1. Ω 上の函数 f が（S に関して）相対不変であるとは，S の 1 次元表現 χ が存在して

$$f(gx) = \chi(g)f(x) \qquad (\text{for all } g \in S,\ x \in \Omega)$$

が成り立つことである．

相対不変な多項式函数については次の定理が基本的である．アイデアは M. Sato の概均質ベクトル空間の理論に拠っている．

定理 2.2 (Ishi [2]). 既約な相対不変多項式函数

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r \qquad (r =: \mathrm{rank}(\Omega))$$

が存在して，V 上の任意の相対不変多項式函数 $P(x)$ は

$$P(x) = c\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \qquad (c = \text{const.},\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0})$$

と表される．

V にはクランの構造が入っていることを思い出すと，次のようにして，$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ の本質的な特徴付けを得る：

定理 2.3 (Ishi–N. [3])**.** $W = V_{\mathbb{C}}$ を複素化されたクランとし，$R(w)$ ($w \in W$) を W での右乗法作用素とする：$R(w)z = z \triangle w$．このとき，$\det R(w)$ の既約因子は丁度 $\Delta_1(w), \ldots, \Delta_r(w)$ である．

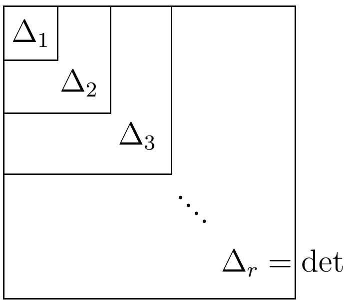
以上に依拠して，$\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を（Ω に付随する）基本相対不変式と呼ぶ．

注意 2.4. パラメタ $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r_{>0}$ を持つ擬逆元写像 $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は，認容線型形式 $E^*_{\mathbf{s}}$ を用いて，$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w) = E^*_{\mathbf{s}} \circ R(w)^{-1}$ と表される（cf. [6, Lemma 2.4]）ので，$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は有理写像であり，$\Delta_1(w), \ldots, \Delta_r(w)$ の零点さえ避ければ，$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w)$ が正則であることがわかる．もちろん，$E^*_{\mathbf{s}}$ との合成により，$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ の実際の正則領域はそれよりも拡がることもある．

§3. 対称錐の場合

例から始めよう．

例 3.1. ここでは，$\Omega = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ を考える．$GL(r, \mathbb{R})$ は Ω に，$\rho(g)x = gx{}^tg$ ($g \in GL(r, \mathbb{R})$, $x \in \Omega$) で作用している．S を $GL(r, \mathbb{R})$ の部分群で，対角成分がすべて正の下三角行列からなる群とする．行列 $x \in V$ の左上からの首座小行列式を $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ とする：



この $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ が基本相対不変式である．相対不変であることは，次の行列の計算によりわかる：$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ {}^tY & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ 0 & {}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX{}^tA & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

さてこの V には次式によってクラン構造が入る：$x \triangle y = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x})$．ただし $x \in V$ に対して

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{r1} & x_{r2} & & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix} \in \mathfrak{s} := \mathrm{Lie}(S).$$

ここで $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$ となっていることに注意．このとき

$$\det R(y) = \Delta_1(y) \cdots \Delta_r(y)$$

が成り立つ．この式は，定理 2.3 を認めれば，$\det R(y)$ と $\Delta_1(y)\cdots\Delta_r(y)$ の次数を比べるだけで（両方の次数は $\frac{1}{2}\cdot r(r+1)$ に等しい），計算なしで導ける．

一般の対称錐で今の例を繰り返してみよう．$\Omega\subset V$ を階数 r の対称錐とする．先に述べたように V には Euclid 型の Jordan 代数の構造が入り，さらに

$$\Omega=\mathrm{Int}\{x^2\,;\,x\in V\}$$

となっている．Jordan 枠（原始べき等元の完全直交系）$c_1,\ldots,c_r$ を固定することにより，Jordan 代数版の principal minors $\Delta_1(x),\ldots,\Delta_r(x)$ を得る．これらは実際基本相対不変式である．簡約可能 Lie 群 $G(\Omega)$ の岩沢部分群 S は Ω に単純推移的に働いている．Jordan 代数 V の単位元 e は Ω に属していて，軌道写像 $S\ni g\mapsto ge\in\Omega$ は微分同相である．従って，S の単位元における微分 $\mathfrak{s}\ni X\mapsto Xe\in V$ は線型同型である．この逆写像を $V\ni v\mapsto X_v\in\mathfrak{s}$ と表す．定義により，X_v は $Xe=v$ となる一意な $\mathfrak{s}$ の元である．この X_v を用いて，V のクラン構造を次式で導入する：

$$x\,\triangle\,y=X_xy=R(y)x.$$

命題 3.2 ([8])．$\det R(y)=\Delta_1(y)^d\cdots\Delta_{r-1}(y)^d\Delta_r(y)$ が成立する．ただし，

Ω	d
$\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++}$	1
$\mathrm{Herm}(r,\mathbb{K})^{++}$	$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$)
n 次元 Lorentz 錐 ($n\geqq 3$)	$n-2$

実のところ，$\det R(y)$ を計算するだけなら，対応する 1 次元表現が割とすぐにわかる (cf. proof of Lemma 2.7 in [6]) ので，命題そのものは大したことではない．しかしながら，ここではより詳しく右乗法作用素の帰納的構造もわかるということを強調しておきたい．

Jordan 枠 $c_1,\ldots,c_r$ から得られる V の Peirce 分解を $V=\sum^{\oplus}_{1\leqq j\leqq k\leqq r}V_{jk}$ とする ($V_{jj}=\mathbb{R}c_j$)．ここで，$V':=\sum^{\oplus}_{1\leqq j\leqq k\leqq r-1}V_{jk}$ かつ $\Xi:=\sum_{j=1}^{r-1}V_{jr}$ とおくと，$V=V'\oplus\Xi\oplus\mathbb{R}c_r$ となる（下図イメージ参照）：

$$V=\begin{array}{|c|c|}\hline \quad V' \quad & \Xi \\ \hline \Xi & \mathbb{R}c_r \\ \hline\end{array}$$

$$\mathrm{rank}(V)=r,\ \ \mathrm{rank}(V')=r-1$$
$$V=V'\oplus\Xi\oplus\mathbb{R}c_r$$
$$W:=\Xi\oplus\mathbb{R}c_r$$

このとき容易に，$W:=\Xi\oplus\mathbb{R}c_r$ がクラン V の両側イデアルであることがわかる．V のトレース内積を W では適当に正規化しなおして，それを $\langle\cdot|\cdot\rangle_W$ で表すと，V の分解 $V=V'\oplus W=V'\oplus\Xi\oplus\mathbb{R}c_r$ に従って作用素 $R(v)$ は次のように書かれる：

$$R(v)=\left(\begin{array}{c|c|c} R'(v') & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & \phi(v') & \langle\cdot\,|\,c_r\rangle_W\,\xi \\ \cline{2-3} \ast & \langle\cdot\,|\,\xi\rangle_W\,c_r & v_rI_{V_{rr}} \end{array}\right)\qquad(v=v'+\xi+v_rc_r).$$

命題 3.3. $R(V')\Xi \subset \Xi$ であり，$\phi(v') := R(v')\big|_{\Xi}$ とおくと，対応 $V' \ni v' \mapsto \phi(v') \in \mathrm{End}(\Xi)$ は Jordan 代数の表現になっている．実際，$\phi(v')\xi = 2v'\xi$ $(v' \in V', \xi \in \Xi)$ である．

§4. 基本相対不変式に関係する問題

階数が r の既約対称錐の場合，基本相対不変式の次数は $1, 2, \ldots, r$ であった．そうすると，ただちに次の問題が生じる：

問題 4.1. 階数 r の既約な等質開凸錐 Ω に付随する基本相対不変式の次数が $1, 2, \ldots, r$ ならば，Ω は自己双対か？

この問題には，任意の階数 $r \geqq 3$ で反例がある．以下その反例を述べよう．これは [3] に書き，2005 年の表現論シンポジウムでも話した例の任意階数 $(\geqq 3)$ への一般化である．

例 4.2. I_m を m 次の単位行列とし，$\mathbb{R}^{rm}$ はサイズが $r \times m$ の列ベクトル全体とする（行列としては書かない）．ベクトル空間 V は

$$V := \left\{ x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array} \right) \; ; \; x_0 \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}), \, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{rm}, \, z \in \mathbb{R} \right\}$$

と表される行列の空間とする．$V \subset \mathrm{Sym}(rm+1, \mathbb{R})$ であることに注意．$m = r = 2$ のときは x は次の 5×5 行列であり，5 年前の講演で，別の文脈で現れた例である：

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{21} & 0 & y_{11} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{21} & y_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 & y_{21} \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{22} & y_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{21} & y_{22} & z \end{pmatrix} \qquad \text{（この場合 } \dim V = 8 \text{ である.）}$$

Ω としては，V の元で，正定値なもの全体をとる：

$$\Omega := \{x \in V \; ; \; x \gg 0\} \qquad (\mathrm{rank}(\Omega) = r + 1).$$

以下 $m \geqq 2$ かつ $r \geqq 2$ を仮定する．なぜなら，$m = 1$ のときは $\Omega = \mathrm{Sym}(r+1, \mathbb{R})^{++}$ であり，$r = 1$ の場合の Ω は Lorentz 錐の普通とは異なる実現になっているからである．Ω が等質であることを見るために次の群 A, N を導入する：

$$A := \left\{ a = \left(\begin{array}{c|c} a_0 \otimes I_m & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & a_{r+1} \end{array} \right) \; ; \; \begin{array}{l} a_0 := \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_r] \;\; \text{with} \\ a_1 > 0, \ldots, a_r > 0 \text{ and } a_{r+1} > 0 \end{array} \right\},$$

$$N := \left\{ n = \left(\begin{array}{c|c} n_0 \otimes I_m & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\boldsymbol{\xi} & 1 \end{array} \right) \; ; \; \begin{array}{l} n_0 \text{ is strictly lower triangular in } GL(r, \mathbb{R}), \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{rm} \end{array} \right\}.$$

このとき，半直積群 $S := N \rtimes A$ は Ω に $S \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx{}^th \in \Omega$ で作用する．そしてこの作用は単純推移的である．実際，$x \in \Omega$ が与えられたとき，$n \in N$, $a \in A$

の方程式 $x = na{}^t n = na^{1/2} I_{rm+1} a^{1/2}({}^t n)$ は一意解を持つ．特に a_k は次で与えられる：$a_k = \dfrac{\Delta_k(x)}{\Delta_{k-1}(x)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r+1)$, with $\Delta_0(x) \equiv 1$, ただし

$$\begin{cases} \Delta_k(x) := \Delta_k^0(x_0) \ \ (x_0 \text{ の } k \text{ 次首座小行列式；} k = 1, \ldots, r), \\ \Delta_{r+1}(x) := z \det(x_0) - {}^t\boldsymbol{y}({}^{\mathrm{co}}x_0 \otimes I_m)\boldsymbol{y}. \end{cases}$$

ここで，行列 T に対して，${}^{\mathrm{co}}T$ は T の余因子行列を表す．従って，$T({}^{\mathrm{co}}T) = ({}^{\mathrm{co}}T)T = (\det T)I$ が成り立つ．

多項式 $\Delta_{r+1}(x)$ は次のように解釈できる．各 $x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array}\right) \in V$ に対して，次のような（スカラー成分とベクトル成分が入り混じる）形式的な行列 ${}^{\mathrm{d}}x$ を考える：

$${}^{\mathrm{d}}x := \left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & x_{r1} & \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} & \boldsymbol{y}_r \\ \hline {}^t\boldsymbol{y}_1 & \cdots & {}^t\boldsymbol{y}_r & z \end{array}\right), \quad x_0 = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_j \in \mathbb{R}^m.$$

このとき，$\Delta_{r+1}(x) = \det {}^{\mathrm{d}}x$ である．ただし，ここで $\det {}^{\mathrm{d}}x$ は ${}^{\mathrm{d}}x$ があたかも通常の行列であるかのように計算するのである．その際に，もし $\boldsymbol{y}_i$ と出会うなら，必ずどれかの ${}^t\boldsymbol{y}_j$ とも出会うので，そのときは積として $\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の内積をとるのである．この考察から，多項式 $\Delta_{r+1}(x)$ の既約性も納得できよう．従って，$\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x), \Delta_{r+1}(x)$ は基本相対不変式になっている．ここで，$\deg \Delta_k(x) = k$ $(k = 1, 2, \ldots, r+1)$ であることに注意．そして Ω は既約であって，自己双対ではない（ルート空間の次元の一様性が崩れている）．問題 4.1 を修正して，次の予想が考えられる：

予想 4.3. 階数 r の等質開凸錐 Ω とその双対錐 Ω^* に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \ldots, r$ ならば Ω は自己双対である．

注意 4.4. (1) 例 4.2 において，$m = r = 2$（従って階数は 3）のとき，Ω^* に付随する基本相対不変式の次数は $1, 2, 4$ である (cf. [3])．
(2) Y. Watanabe の修士論文（京都大学，2006 年 2 月）において，弱い形で予想が証明されている．

§5. 自己双対ではないが，双対錐に線型同型な既約等質開凸錐

V は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．V の内積と V 上の正定値自己共役作用素とを同一視することにより，等質開凸錐 $\Omega \subset V$ が自己双対であるためには，正定値な自己共役作用素 T が存在して，

$$T(\Omega) = \left\{ y \in V \,;\, \langle x \,|\, y \rangle > 0 \ \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\} =: \Omega^*$$

となることが必要十分条件である．従って，正定値性の条件を落とせば，自己双対でなくても，$T(\Omega) = \Omega^*$ をみたす作用素 T を見いだせる可能性は十分にある．もっとも，Ω が既約でなくてもよいとすると，等質開凸錐 Ω_0 を一つ持ってきて $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_0^*$

とすると，Ω は明らかに双対錐と線型同型になるので，この問題においては，Ω の既約性が意味を持ってくる．また [1] の Exercise には，Vinberg 錐がその双対錐と決して線型同型にならないことを示すための誘導設問があって，Vinberg 錐が自己双対でないことはそのことから直ちに導かれるとしている．従って，自己双対性と，双対錐に線型同型であること，とはどのくらいの違いがあるのかというのは，興味深い問題設定である．

ここでは，3 以上の任意階数で，非自己双対で，双対錐に線型同型な既約等質開凸錐の例を挙げる．これは [4] での例をほんの少しだけ簡単にしたものである．

次のような行列のなすベクトル空間 V を考える：

$$V := \left\{ x := \left(\begin{array}{cc|c|c} x_1 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & {}^t\mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \boldsymbol{x}' & \mathbf{0} & X & \boldsymbol{x}'' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{R},\, X \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}) \\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^m,\, \boldsymbol{x}'' \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}. \tag{5.1}$$

$V \subset \mathrm{Sym}(m+3, \mathbb{R})$ であることに注意．Ω としては，V の正定値な元全体をとる：

$$\Omega := \{x \in V \;;\; x \gg 0\}.$$

Ω の等質性を見るために次の群を導入する：

$$\mathbf{S} := \left\{ h := \left(\begin{array}{cc|c|c} h_1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & h_1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \boldsymbol{h}' & \mathbf{0} & H & \mathbf{0} \\ \hline \zeta_1 & \zeta_2 & {}^t\boldsymbol{h}'' & h_2 \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{l} h_1 > 0,\, h_2 > 0 \\ \boldsymbol{h}' \in \mathbb{R}^m,\, \boldsymbol{h}'' \in \mathbb{R}^m,\, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \\ H \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角線成分が} \\ \qquad\qquad\qquad \text{正の下三角行列} \end{array} \right\}.$$

$\mathbf{S}$ は Ω に，$\mathbf{S} \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx{}^th$ により作用している．そしてこの作用は単純推移的である．実際

$$\mathbf{A} := \left\{ a := \left(\begin{array}{cc|c|c} a_1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & a_1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{0} & a_2 \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{l} a_1 > 0,\, a_2 > 0, \\ A \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角成分が} \\ \qquad\qquad\qquad \text{正の対角行列} \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{N} := \left\{ n := \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \boldsymbol{n}' & \mathbf{0} & N & \mathbf{0} \\ \hline \nu_1 & \nu_2 & {}^t\boldsymbol{n}'' & 1 \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{c} \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'' \in \mathbb{R}^m,\, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R} \\ N \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角成分が 1 の} \\ \text{下三角行列} \end{array} \right\}$$

とおくと，$\mathbf{S} = \mathbf{N} \rtimes \mathbf{A}$ であり，$x \in \Omega$ が与えられたときの $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{A}$ に関する方程式 $x = na{}^tn$ は一意的に解ける．その際に，次ページの式で与えられる基本相対不変式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_{m+1}(x), \Delta_{m+2}(x)$ が現れる：$x \in V$ を V の定義 (5.1) に現れる

一般元とするとき

$$\Delta_1(x) := x_1,$$

$$\Delta_j(x) := \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}'_{j-1} \\ \hline \boldsymbol{x}'_{j-1} & X_{j-1} \end{array}\right) \qquad (j = 2, \ldots, m+1)$$

$$\left(\text{ただし}, X_k := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'_k := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \right),$$

$$\Delta_{m+2}(x) := x_1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ \boldsymbol{x}' & X & \boldsymbol{x}'' \\ \xi_1 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{pmatrix} - \xi_2^2 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' \\ \hline \boldsymbol{x}' & X \end{array}\right).$$

ここで，$\deg \Delta_{m+2} = m+3$ であることに注意しておこう．そして，一意解 a, n の内の a の方は次のように書かれる：$A = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ とするとき

$$a_1 = \Delta_1(x), \quad \alpha_k = \frac{\Delta_{k+1}(x)}{\Delta_k(x)}\ (k = 1, \ldots, m), \quad a_2 = \frac{\Delta_{m+2}(x)}{\Delta_1(x)\Delta_m(x)}.$$

V には内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を，それから得られるノルムが

$$\|x\|^2 := x_1^2 + \mathrm{tr}(X^2) + x_2^2 + 2\big(\|\boldsymbol{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{x}''\|^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2\big)$$

となるように入れる．この内積に関する Ω の双対錐を Ω^* とする：

$$\Omega^* := \big\{ y \in V\ ;\ \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \ \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \big\}.$$

V 上の線型作用素 T_0 を次式で定義する：

$$T_0 x = \left(\begin{array}{cc|c|c} x_2 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}''J & \xi_1 \\ 0 & x_2 & {}^t\boldsymbol{0} & \xi_2 \\ \hline J\boldsymbol{x}'' & \boldsymbol{0} & JXJ & J\boldsymbol{x}' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'J & x_1 \end{array}\right) \quad (\,x \text{ は } (5.1) \text{ での表示とする}).$$

ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ である．

定理 5.1. $\Omega^* = T_0(\Omega)$.

注意 5.2. 双対錐に線型同型な既約等質開凸錐は結構見つかるようである．このようなクラスの等質開凸錐上で調和解析を展開するのは興味深い問題であると思われる．いきなり一般の等質開凸錐上での調和解析は，現時点では時期尚早なような気がする．その際には，クランよりもむしろ，Dorfmeister が，彼自身の Siegel 領域の研究で強力に用いてきた接続代数（開凸錐 Ω の ambient vector space である V に入る非結合的な代数構造で，Ω が自己双対であるための必要十分条件は，この接続代数が Jordan 代数であること）を使う方がいいかもしれない．

参 考 文 献

[1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[3] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[4] H. Ishi and T. Nomura, An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone, in "Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV", J. Hilgert et al., (ed.), 129–134, World Scientific, Singapore, 2009.

[5] S. Kaneyuki and T. Tsuji, Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1–46.

[6] T. Nomura, On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, J. Lie Theory, **11** (2001), 185–206.

[7] T. Nomura, Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms, Diff. Geom. Appl., **18** (2003), 55–78.

[8] T. Nomura, Right multiplication operators in the clan structure of a Euclidean Jordan algebra, to appear in Vestnik Tambov University.