調 和 解 析 の 問 題

野 村 隆 昭

九大数理

RIMS 短期共同研究「複素幾何学の諸問題」

2010 年 **9** 月 **6** 日

Siegel 領域

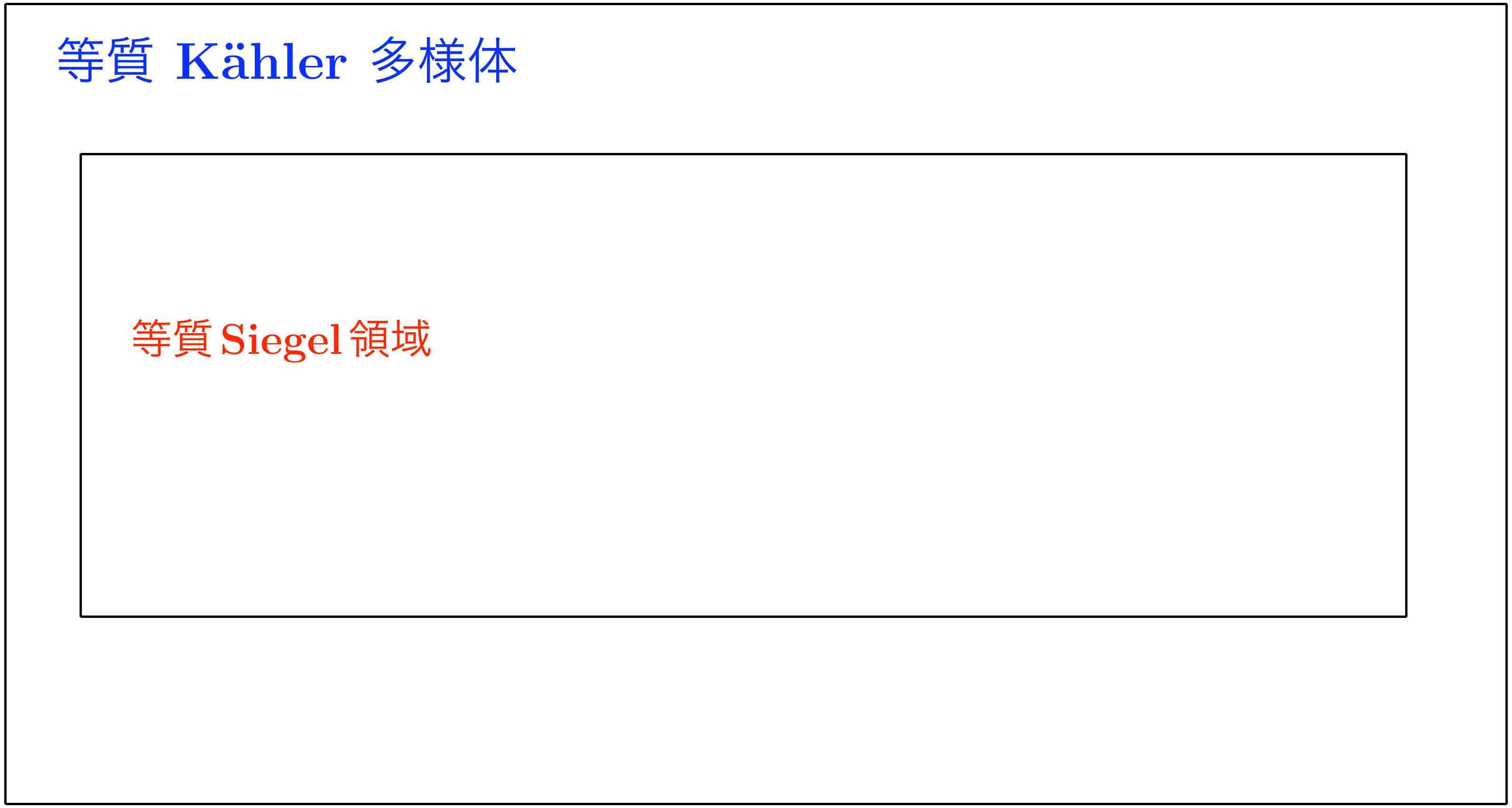
- **1957**年 **Piatetski-Shapiro** によって導入
- 有界領域に正則同値
- **Cartan** の問題 **(1935)**

「$n \geqq 4$ ならば $\mathbb{C}^n$ に非対称な等質有界領域がある」
に肯定的な解答を与えた

- **Dorfmeister–Nakajima (Kazufumi Nakajima)**

等質 **Kähler** 多様体に関する基本予想 **(1967 by Vinberg–Gindikin)** の解決 **(1988)**

任意の等質 Kähler 多様体 $=$ Holomorphic Fiber Bundle over 等質有界領域 Fiber $=$ Flat Homogeneous Kähler Mfd $\times$ Compact Simply Connected Homogeneous Kähler Mfd



領域 D が等質 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{Hol}(D)$ が D に推移的に作用する

等質 Kähler 多様体

等質 Siegel 領域

$\cong$

等質有界領域

D が Siegel 領域のとき，$\mathrm{Hol}(D)$ は有限次元の Lie 群

等質 **Kähler** 多様体

等質 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称 **Siegel** 領域

$\cong$

等質有界領域

- 領域 D が対称 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall z \in D$, $\exists \sigma_z \in \mathrm{Hol}(D)$ s.t. $\begin{cases} (1)\ \sigma_z^2 = \mathrm{Id} \\ (2)\ z \text{ は } \sigma_z \text{ の孤立固定点} \end{cases}$

等質 Kähler 多様体

等質 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称管状領域

$\wr\wr$

等質有界領域

管状領域 D $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直線を含まない開凸錐 $\Omega \subset V$ をとって，$D = V + i\Omega$

等質 Kähler 多様体

等質管状領域

$\cap$

等質 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称管状領域

$\cong$ （**Cayley** 変換） $\cong$

等質有界領域 $\supset$ 対称有界領域

（**Hermite** 対称空間の **Harish-Chandra** 実現）

（**JTS** でのスペクトル・ノルムでの開単位球）

等質 Kähler 多様体

等質管状領域

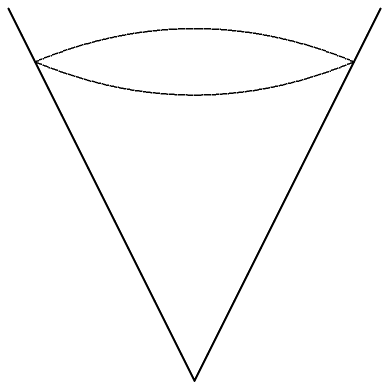
$\cap$

等質 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称 **Siegel** 領域 $\supset$ 対称管状領域

$\wr\|$ （**Cayley** 変換） $\wr\|$

等質有界領域 $\supset$ 対称有界領域 $\supset$ 開球 **in** $\mathbb{C}^N$ （階数 **1**）

（**Hermite** 対称空間）

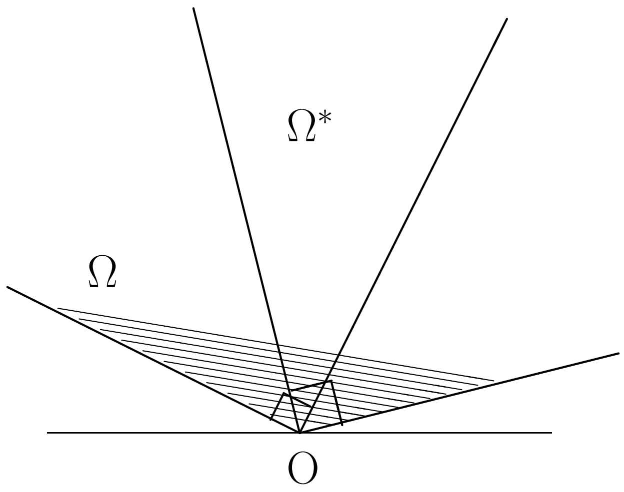


正則開凸錐　$\Omega \subset V$

- 正則 ＝ 直線を含まない
- Ω の双対錐

$$\Omega^* := \left\{\lambda \in V^* \,;\, \langle \lambda, x\rangle > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\right\}$$

- Ω が正則 $\iff$ $\Omega^* \neq \varnothing$

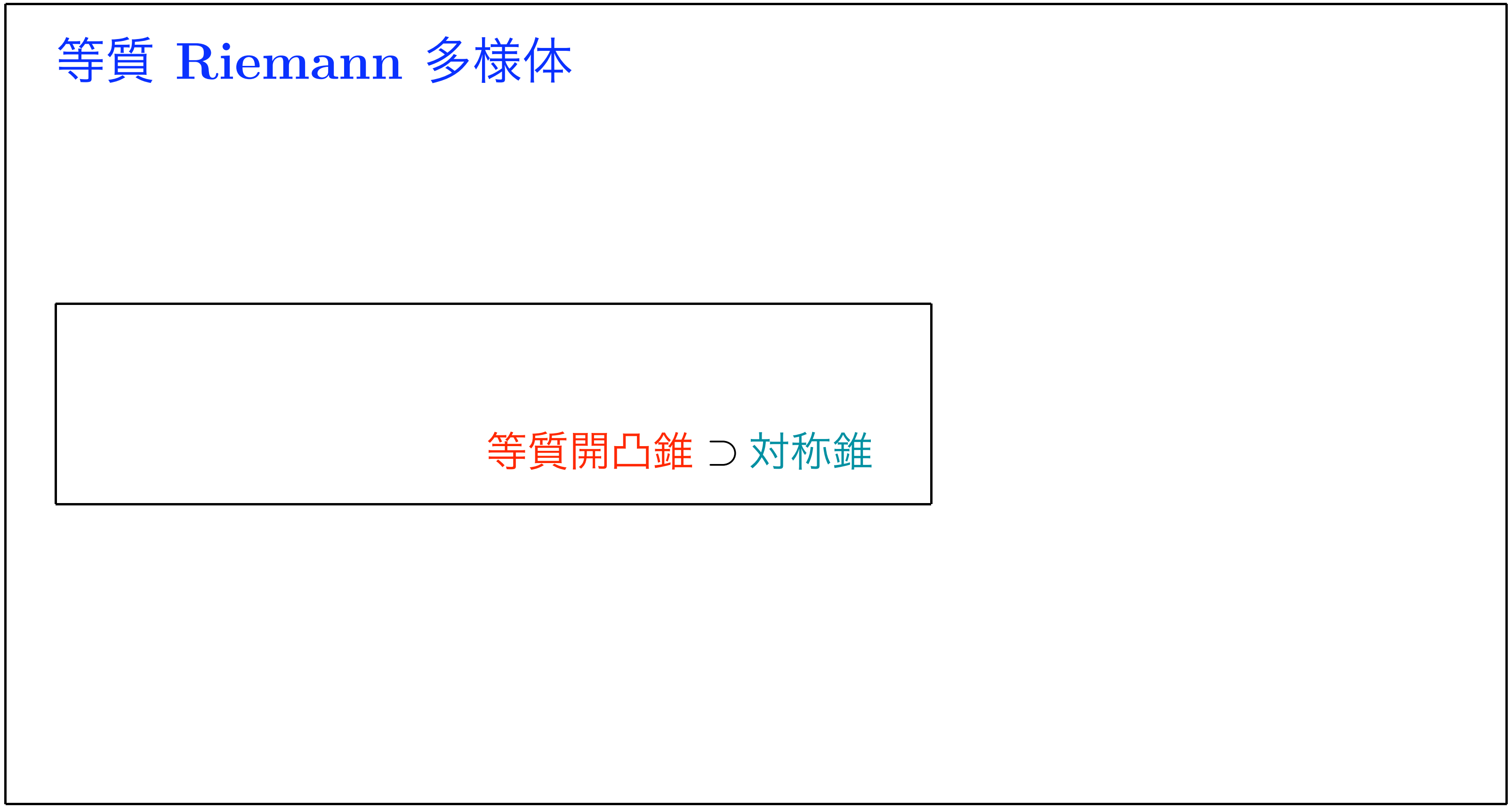


等質 Riemann 多様体

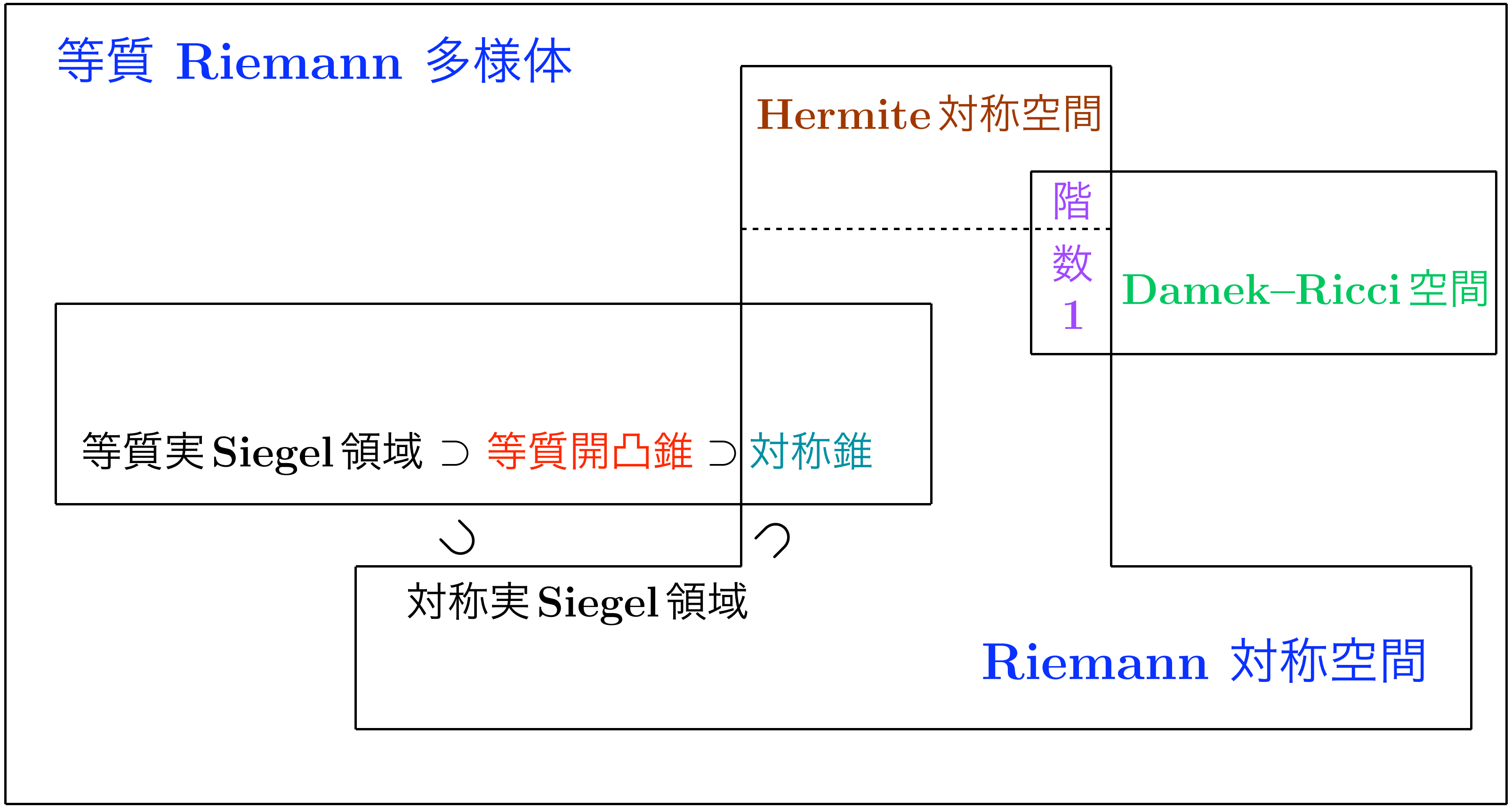
等質開凸錐

開凸錐 $\Omega \subset V$ が等質 $\overset{\text{def}}{\iff}$ Ω の線型同型群 $G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用する

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$$



- 対称錐 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 自己双対な等質開凸錐
- 開凸錐 $\Omega \subset V$ が自己双対 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 適当な正定値内積で $V^* \equiv V$ とするとき，$\Omega^* \equiv \Omega$
- 初めから内積を指定して，その内積に関して自己双対である，と言うときもある．


等質 Riemann 多様体
Hermite 対称空間
階数 1
Damek–Ricci 空間
等質実 Siegel 領域 ⊃ 等質開凸錐 ⊃ 対称錐
∪
∩
対称実 Siegel 領域
Riemann 対称空間

等質開凸錐について：

(1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^{++}$：正定値実対称行列の全体 $\subset \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$

- 内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \mathrm{tr}(xy)$ に関して自己双対
- $GL(n,\mathbb{R})$ が $\rho(g)x := gx{}^t g$ $(g \in GL(n,\mathbb{R}))$ で推移的に作用している

(2) $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})^{++}$, $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{H})^{++}$, $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})^{++}$, Lorentz 錐
　(1) と併せてこれらで既約な対称錐は尽きる.

(3) 対称錐でない等質開凸錐で最低次元のものは 5 次元 (Vinberg)

(4) 対称錐でない等質開凸錐は階数は 3 以上
　（階数が $1 =$ 半直線,　既約で階数が $2 =$ Lorentz 錐）

(5) 10次元以下の既約な等質開凸錐の線型同型類は有限個

等質 Siegel 領域について：

定義：

Ω：正則開凸錐 $\subset V$, $W := V_{\mathbb{C}}$：V の複素化, $w \mapsto w^*$：W での V に関する conjugation,
U：複素ベクトル空間, $Q : U \times U \to W$ は Hermitian sesqui-linear, Ω-positive, i.e.,

$$Q(u_2, u_1) = Q(u_1, u_2)^*, \qquad Q(u,u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \text{ for } u \neq 0.$$

このとき,

$$D := \{(u,w) \in U \times W \;;\; \mathrm{Im}\, w - Q(u,u) \in \Omega\}$$ ：第 2 種 Siegel 領域

注意： $U = \{0\}$ を許す．このときは $D = V + i\Omega$：管状領域（第 1 種 Siegel 領域）

- $D = \{(u,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \;;\; \mathrm{Im}\, w - \|u\|^2 > 0\}$：階数 1 の Siegel 領域 $\cong$ 開単位球 $\subset \mathbb{C}^{n+1}$.
  対称領域である． $z_0 := (0, i) \in D$ における symmetry σ_{z_0} は $(u,w) \mapsto \left(-i\,\dfrac{u}{w}, -\dfrac{1}{w}\right)$
- 対称でない等質 Siegel 領域で最低次元のものは 4 次元 (Piatetski-Shapiro)
- 階数 2 の準対称で非対称な Siegel 領域がある
  （最低次元は 5 で，これも Piatetski-Shapiro による）

準対称 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ D の Bergman 計量から導かれる $U \times W$ の Hermite 内積を V に制限して得られる V の実内積に関して，Ω は自己双対.

等質 Siegel 領域について：

> **定義：**
>
> Ω：正則開凸錐 $\subset V$，$W := V_{\mathbb{C}}$：V の複素化，$w \mapsto w^*$：W での V に関する conjugation，
> U：複素ベクトル空間，$Q : U \times U \to W$ は Hermitian sesqui-linear，Ω-positive，i.e.,
>
> $$Q(u_2, u_1) = Q(u_1, u_2)^*, \qquad Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \text{ for } u \neq 0.$$
>
> このとき，
>
> $$D := \{(u, w) \in U \times W\ ;\ \mathrm{Im}\, w - Q(u, u) \in \Omega\}$$ ：第 2 種 Siegel 領域

注意： $U = \{0\}$ を許す．このときは $D = V + i\Omega$：管状領域（第 1 種 Siegel 領域）

- $D = \{(u, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\, w - \|u\|^2 > 0\}$：階数 1 の Siegel 領域 $\cong$ 開単位球 $\subset \mathbb{C}^{n+1}$. 対称領域である．$z_0 := (0, i) \in D$ における symmetry σ_{z_0} は $(u, w) \mapsto \left(-i\,\dfrac{u}{w}, -\dfrac{1}{w}\right)$
- 対称でない等質 Siegel 領域で最低次元のものは 4 次元 (Piatetski-Shapiro)
- 階数 2 の準対称で非対称な Siegel 領域がある
（最低次元は 5 で，これも Piatetski-Shapiro による）
- 6 次元以下の既約な等質 Siegel 領域の正則同型類は有限個

G：連結 Lie 群，K：G の compact 部分群，このとき，G/K は等質 Riemann 多様体.
$X := G/K$ には G 不変測度 μ が存在する：$d\mu(g \cdot x) = d\mu(x) \quad (\forall g \in G)$.
この不変測度 μ に関する $L^2(X)$ を考えると，$L^2(X)$ は G の自然なユニタリ表現を持つ：

$$U : G \ni g \mapsto U(g) \in \mathbf{U}(L^2(X)), \qquad \big(U(g)f\big)(x) := f(g^{-1} \cdot x) \quad (g \in G,\, x \in X)$$

*** いつでも生じる問題：G のユニタリ表現 $(U, L^2(X))$ を既約分解せよ.

- X が **Riemann** 対称空間の場合（**Helgason** の本：**Geometric Analysis** 参照）
  （従って特に **Hermite** 対称空間の場合 $\equiv$ 対称 **Siegel** 領域の場合）

G：連結半単純 Lie 群（中心有限），K：G の極大コンパクト部分群，$X := G/K$.
$G = KAN$：G の岩沢分解（$A = \exp \mathfrak{a}$，$\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^r$：$r = \mathbb{R}\text{-rank}(G)$，$N$：べき零），
$M = Z_K(A)$：K における A の中心化群，$MAN = MA \ltimes N$：極小放物型部分群，
$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して，

$$\tau_\lambda\big(m(\exp H)n\big) = \exp i\lambda(H) \qquad (m \in M,\, H \in \mathfrak{a},\, n \in N).$$

τ_λ は MAN の 1 次元ユニタリ表現．この τ_λ から G のユニタリ誘導表現を作る：

$$\pi_\lambda := \mathrm{Ind}_{MAN}^G \tau_\lambda \qquad \text{（球主系列表現）.}$$

- π_λ は $L^2(K/M)$ で実現されて，既約である．$\big(G/(MAN) \cong K/M\big)$

$\mathbf{1} \in L^2(K/M)$：K/M 上の恒等的に 1 という函数 ($\pi_\lambda(k)\mathbf{1} = \mathbf{1}, \forall k \in K$).

$$\Psi f(\lambda) := \int_G f(g \cdot o)\pi_\lambda(g)\mathbf{1}\, dg = \int_{G/K} f(gK)\pi_\lambda(g)\mathbf{1}\, d\mu(gK) \qquad (f \in C_c^\infty(X))$$

Ψf は $\mathfrak{a}^*$ 上の $L^2(K/M)$ 値函数である.

Well-Known Theorem. $f \mapsto \Psi f(\lambda)$ を拡張して

$$L^2(X) \cong \frac{1}{\# W} \int_{\mathfrak{a}^*/W}^{\oplus} L^2(K/M)\, \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}$$ を得る.

この分解に従って，$U \cong \dfrac{1}{\# W} \displaystyle\int_{\mathfrak{a}^*/W}^{\oplus} \pi_\lambda \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2}$ となる.

• 記号の説明：$W := M'/M$：Weyl 群（有限群），ただし $M' := N_K(A)$,

$\boldsymbol{c}$：Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$函数.

$$\boldsymbol{c}(\lambda) := \int_{\overline{N}} e^{-(i\lambda+\rho)(H(\overline{n}))}\, d\overline{n} \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}^*).$$

$N = \exp \mathfrak{n}$ with $\mathfrak{n} \leftrightarrow$ positive $\mathfrak{a}$-root 空間の和，$\overline{N} = \exp \overline{\mathfrak{n}}$ with $\overline{\mathfrak{n}} \leftrightarrow$ negative $\mathfrak{a}$-root 空間の和,
$g = k(\exp H(g))n \in K(\exp \mathfrak{a})N$：元 $g \in G$ の岩沢分解，$\rho(H) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, H)\big|_{\mathfrak{n}}$ $(H \in \mathfrak{a})$.

問題*** 同様の分解を，一般の等質 Siegel 領域や等質錐で得られないか？

• Damek–Ricci 空間では得られている（$L^2(X)$ の分解．しかし既約分解ではない...）.

Damek–Ricci 空間について：

Lichnerowicz の問題 (1944)：調和空間は対称か？

調和空間：
Laplacian が，局所的に，測地線距離だけの函数を基本解として持つような Riemann 多様体

- Compact で基本群が有限位数なら OK (Szabó (1990)).
- Damek–Ricci 空間は非コンパクトで非対称な調和空間の例になっている.

- Damek–Ricci 空間は，$\mathbb{R}_{>0} \ltimes N$ （N は Heisenberg type の群，従って 2-step nilpotent）という，分裂可解 Lie 群の土台の多様体
- 球フーリエ解析 (without K) $\cdots$ 球函数の導入と活用（$L^2(X)$ の分解に大変有用）.
- 等質開凸錐や等質 Siegel 領域でも，それらに単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群（岩沢部分群）あるので，それの活用.

- 球函数の活用

  Riemann 対称空間のとき：$\phi_\lambda(g) := (\pi_\lambda(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1})_{L^2(G/K)}$．Recall $\pi_\lambda(k)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ $(\forall k \in K)$.
  ゆえに，$\phi_\lambda(an) = (\pi_\lambda(an)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1})_{L^2(G/K)}$ $(an \in AN)$.

Fact: $\pi_\lambda\big|_{AN} \cong \mathrm{Ind}_A^{AN} e^{-i\lambda\circ\log}$．ただし $\log$ は $\exp : \mathfrak{a} \to A$ の逆写像.

- Mackey の誘導表現の一般論での「部分群定理」を使えるが，実際には，intertwining 作用素を explicit に与えることができる．

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ind}_{MAN}^G \tau_\lambda & \xrightarrow{\text{表現の } AN \text{ への制限}} & & \cong & \mathrm{Ind}_A^{AN} e^{-i\lambda\circ\log} \\
\wr\| & & & & \wr\| \\
(\pi_\lambda, L^2(K/M)) & & & & (T_\lambda, L^2(N)) \\
L^2(K/M) \ni \mathbf{1} & \longrightarrow & & & p_\lambda \in L^2(N)
\end{array}
$$

$$p_\lambda(n) := \exp\big(-(i\lambda+\rho)(H(m_0 n m_0^{-1}))\big) \quad (n \in N).$$

ただし $m_0 \in M' := N_K(A)$ は，$\overline{N} = m_0 N m_0^{-1}$ となるもの.

$p_\lambda(n) := \exp\bigl(-(i\lambda+\rho)(H(m_0 n m_0^{-1}))\bigr)$ について

- 階数 **1** の場合： $H(\overline{n})$ を（すなわち $H(m_0 n m_0^{-1})$ を）explicit に計算できる．
  $\rightsquigarrow$ その表示を読み替えて Damek–Ricci 空間で球函数が定義できる．
- 実際には，測地球面上の平均（K 平均の代わり）により球函数を導入し，
  それが $(T_\lambda(x)p_\lambda \,|\, p_\lambda)$ に等しい事を示している (Anker–Damek–Ricci, Di Blasio).
- 対称錐の場合

対称錐 $\Omega \leftrightarrow V$ Euclid 型 Jordan 代数（一点の接空間 = ambient VS に入る代数構造）

対称錐 $\Omega = G(\Omega)\cdot e = S\cdot e \overset{\text{diffeo}}{\approx} S$ （$S := AN$：$G(\Omega)$ の岩沢部分群，$e \in V$：JA の単位元）

一般に $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ のとき，
$e^{\lambda\circ\log}$：A の 1 次元表現 $\rightsquigarrow$ $S = A \ltimes N$ の 1 次元表現 $\rightsquigarrow$ Ω 上の函数 Δ_λ：

$$\Delta_\lambda(an\cdot e) := e^{\lambda(\log a)} = \Delta_\lambda(na\cdot e)$$

岩沢分解 $g = n_1 \exp(l(g))k_1 \in N(\exp\mathfrak{a})K$ とすると，

$$g^{-1} = k_1^{-1}\exp(-l(g))n_1^{-1} \in K(\exp\mathfrak{a})N$$

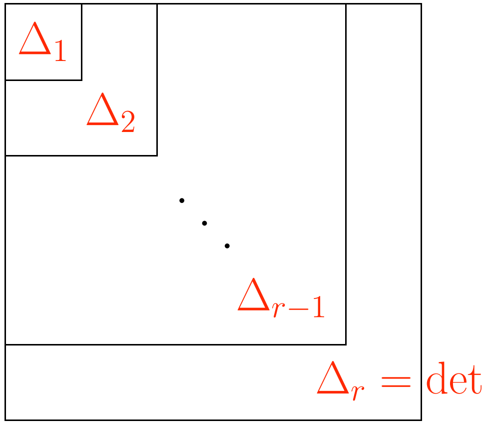
より，$H(g^{-1}) = -l(g)$．従って

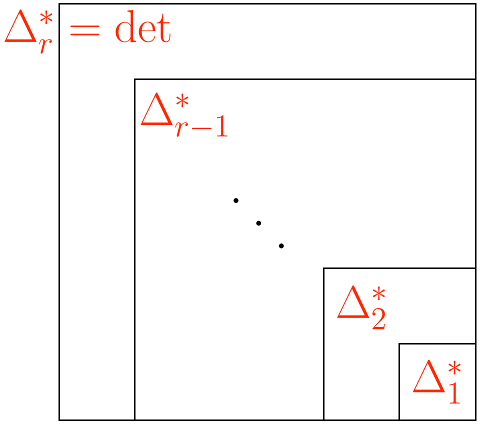
$$\exp(-(i\lambda+\rho)(H(\overline{n})) = \exp((i\lambda+\rho)(l(\overline{n}^{-1})) = \Delta_{i\lambda+\rho}(\exp l(\overline{n}^{-1})\cdot e) = \Delta_{i\lambda+\rho}(\overline{n}^{-1}\cdot e)$$

ゆえに

$$p_\lambda(n) = \Delta_{i\lambda+\rho}(\overline{n}^{-1}\cdot e) \qquad (\overline{n} := m_0 n m_0^{-1})$$

$r = \dim A$ とする．$x \in V$ に対して





左上から小行列式をとっていく．　　右下から小行列式をとっていく．

$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ のとき，$\Delta_\lambda(x) = \Delta_1(x)^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r} \Delta_r(x)^{\lambda_r}$．
そして，$\Delta_k^*(x) = \Delta_k(m_0 x)$ より，$\Delta_\lambda^*(x) := \Delta_1^*(x)^{\lambda_1-\lambda_2} \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r} \Delta_r^*(x)^{\lambda_r}$ とおくとき，

$$p_\lambda(n) = \Delta_{i\lambda+\rho}(m_0 n^{-1} m_0^{-1} \cdot e) = \Delta_{i\lambda+\rho}^*(n^{-1} \cdot e).$$

- $p_\lambda(n) := \Delta_{i\lambda+\rho}^*(n^{-1} \cdot e)$ として，一般の等質開凸錐でも，$p_\lambda(n)$ が定義できるのでは？

等質開凸錐の場合

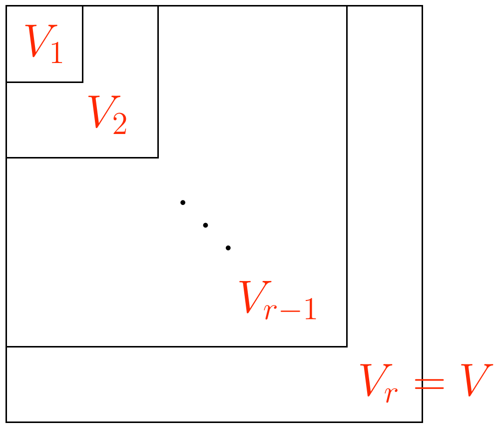
等質開凸錐 $\Omega \leftrightarrow V$ 単位元を持つ Clan　(一点の接空間 = ambient VS に入る代数構造)

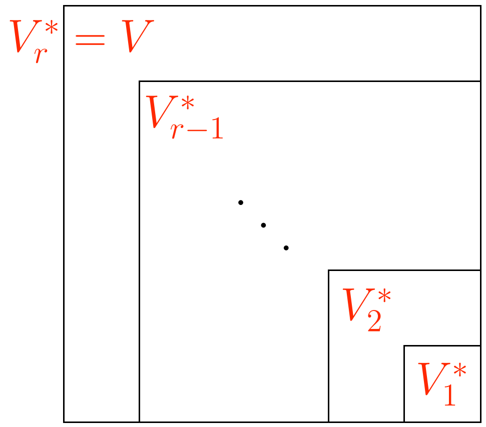
Clan: V に双線型な積 $\triangle$，左乗法作用素を $L(x)$ とする：$L(x)y := x \triangle y$.

$$\begin{cases} (1) \quad [L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x) \\ (2) \quad \operatorname{tr} L(x \triangle y) \text{ は } V \text{ に内積を与える} \\ (3) \quad \text{各 } L(x)\ (x \in V) \text{ の固有値は実数のみ} \end{cases}$$

(1) $\Longrightarrow$ $\mathfrak{h} := \{L(x)\,;\, x \in V\}$ は線型リー代数で，(3) より $\mathfrak{h}$ は分裂可解.
$H := \exp \mathfrak{h}$ は Ω に単純推移的に作用する．実は $H = A \ltimes N$ の形.

- $r = \dim A$ とする．V を次のように区分けする：





$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\Omega}_1 & \subset & \overline{\Omega}_2 & \subset \cdots \subset & \overline{\Omega}_r & = & \overline{\Omega} \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ V_1 & & V_2 & & & & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} (\overline{\Omega^*})_1 & \subset & (\overline{\Omega^*})_2 & \subset \cdots \subset & (\overline{\Omega^*})_r & = & \overline{\Omega^*} \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ V_1^* & & V_2^* & & & & V \end{array}$$

$p_\lambda(n^{-1}) = \Delta^*_{i\lambda+\rho}(n \cdot e)$ （e はクラン V の単位元）
$n \cdot e \in \Omega$ であるが，Δ^* は Ω^* に付随する V の区分けに対応する？

問題** • 階数 3 ではどうか？
• （V の内積を正規化すれば）$(\Omega^*)_1$，$(\Omega^*)_2$ は自己双対で，Ω の射影になっている．

• 対称錐のとき：

$$\Delta_\lambda^*(n\cdot e) = \Delta_1^*(n\cdot e)^{\lambda_1-\lambda_2}\cdots\Delta_{r-1}^*(n\cdot e)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r}\underbrace{\Delta_r(n\cdot e)^{\lambda_r}}_{=1} = \Delta_1^*(n\cdot e)^{\lambda_1-\lambda_2}\cdots\Delta_{r-1}^*(n\cdot e)^{\lambda_{r-1}-\lambda_r}.$$

• 階数 3 の等質開凸錐のとき

$$\Delta_\lambda^*(n\cdot e) = \Delta_1^*(n\cdot e)^{\lambda_1-\lambda_2}\Delta_2^*(n\cdot e)^{\lambda_2-\lambda_3}$$

として，$\Delta_{i\lambda+\rho}^*$ を定義すればよいのではないか．ただし，$\rho(H) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,H)\big|_{\mathfrak{n}}$．

問題* $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ のとき，$p_\lambda\in L^2(N)$？

ある定積分の計算

V：階数 2 の Euclid 型 Jordan 代数.　　$V = \mathbb{R}E_1 + V_{21} + \mathbb{R}E_2$.

V での対称錐 Ω は

$$\Omega = \left\{x = x_1 E_1 + x_{21} + x_2 E_2 \,;\, x_1 > 0,\, x_1 x_2 - \tfrac{1}{2}\|x_{21}\|^2 > 0\right\}.$$

$W := \mathbb{R}(E_1 - E_2) + V_{21}$ とし,

$$B\big(\alpha(E_1 - E_2) + v,\, \alpha'(E_1 - E_2) + v'\big) = \alpha\alpha' + \tfrac{1}{2}\langle\, v \,|\, v' \,\rangle$$

とおくとき,

$$\Omega = \left\{\lambda(E_1 + E_2) + w \in \mathbb{R}(E_1 + E_2) + W \,;\, \lambda > B(w, w)^{1/2}\right\}$$

となるので，Ω は **Lorentz** 錐である.

命題：$d\mu$：Ω 上の $G(\Omega)$ 不変測度.

$$I(x) := \int_\Omega e^{-\langle x \,|\, y \rangle} y_1^\alpha y_2^\beta (y_1 y_2 - \tfrac{1}{2}\|y_{21}\|^2)^\gamma \, d\mu(y) \qquad (x \in \Omega).$$

$\mathrm{Re}\,\gamma > \frac{1}{2}n$ ($n := \dim V_{21}$)，$\mathrm{Re}(\alpha+\gamma) > 0$，$\mathrm{Re}(\beta+\gamma) > 0$ のとき

$$I(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{x_1^{\alpha+\gamma} x_2^{\beta+\gamma}} \Gamma(\gamma - \tfrac{1}{2}n) \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} F\left(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma; \frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1 x_2}\right).$$

ただし，$F(a,b,c;x)$ は Gauss の超幾何函数.

- $\beta = 0$ のとき（$\alpha = 0$でも同様）

$$F\left(\alpha+\gamma, \gamma, \gamma; \frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1 x_2}\right) = \left(1 - \frac{\|x_{21}\|^2}{2\,x_1 x_2}\right)^{-(\alpha+\gamma)}$$

より既知の結果を得る.

命題：$d\mu$：Ω 上の $G(\Omega)$ 不変測度.

$$I(x) := \int_\Omega e^{-\langle x \,|\, y \rangle} y_1^\alpha y_2^\beta (y_1 y_2 - \tfrac{1}{2}\|y_{21}\|^2)^\gamma \, d\mu(y) \qquad (x \in \Omega).$$

$\mathrm{Re}\,\gamma > \frac{1}{2}n$ ($n := \dim V_{21}$)，$\mathrm{Re}(\alpha+\gamma) > 0$，$\mathrm{Re}(\beta+\gamma) > 0$ のとき

$$I(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{x_1^{\alpha+\gamma} x_2^{\beta+\gamma}} \Gamma(\gamma - \tfrac{1}{2}n) \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} F\Big(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma; \frac{\|x_{21}\|^2}{2\, x_1 x_2}\Big).$$

ただし，$F(a,b,c;x)$ は Gauss の超幾何函数.

問題*** 一般に対称錐 Ω 上の次の定積分は求まるのか？

$$I(x) := \int_\Omega e^{-\langle x \,|\, y \rangle} \Delta_\lambda(y) \Delta^*_{\lambda'}(y) \, d\mu(y) \quad (x \in \Omega)$$

$\lambda = 0$ または $\lambda' = 0$ のときは既知.

$\phi_\lambda(x) := (T_\lambda(x)p_\lambda \,|\, p_\lambda)_{L^2(N)}$ $(x \in H := AN)$ について

• より話を進めるには，まだまだ実験が必要．
階数 3 の既約なクラン：$V = \mathbb{R}E_1 + V_{21} + \mathbb{R}E_2 + V_{31} + V_{32} + \mathbb{R}E_1$.
(1) $\dim V_{21} = \dim V_{31} = \dim V_{32} \implies$ その共通次元は $1, 2, 4, 8$.
V には Euclid 型の Jordan 代数構造が入って，$d = 1, 2, 4, 8$ に応じて，

$$V = \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{C}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{H}), \quad \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$$

(2) $\dim V_{21} \neq 0$ かつ $\dim V_{32} \neq 0$ のとき，次元の条件は，$\dim V_{31} \geqq \max(\dim V_{21}, \dim V_{32})$.
(3) $V_{21} = \{0\}$ のときは，$\dim V_{32}$，$\dim V_{31}$ は任意.

• 階数 3 でも例がたくさんある．
• 等質 Siegel 領域，特に階数 2 の準単純な等質 Siegel 領域でも p_λ を捉えられるか？
(関係する等質開凸錐は階数 2 以下で，自己共役)
• ϕ_λ を固有函数とする微分作用素は？
• 球 Fourier 解析が構築できるか？
特に Berezin 函数 b（右からたたみ込むと Berezin 変換になる）に対して

$$\widehat{b}(\lambda) := \int_\Omega b(x)\phi_\lambda(x)\, d\mu(x)$$

は計算可能か．$\widehat{b}$ から b が反転できるか？ そのときの Plancherel 測度は？