等質 Siegel 領域の Poisson 核と Cayley 変換の幾何学的関係

京大・理　野村隆昭　(Takaaki NOMURA[1])

序.

本研究の動機付けとなった定理から始めることにしよう．等質 Siegel 領域 D を考え，その Shilov 境界を Σ で表す．Hua の本 [14] にあるように，D の Poisson 核 $P(z,\zeta)$ ($z \in D$, $\zeta \in \Sigma$) を Szegö 核から定義する（定義は本文で述べる）．一方 D には Bergman 計量があるから，それに関する Laplace–Beltrami 作用素を $\mathcal{L}$ とする．

定理 A (Hua–Look, Korányi, Xu).　固定された任意の $\zeta \in \Sigma$ に対して $\mathcal{L}P(\cdot,\zeta) = 0$ となるための必要十分条件は，領域 D が対称なことである．

ここで D が**対称**であるとは，各 $z \in D$ に対して，D の正則自己同相 σ_z があって

(1) σ_z^2 は D の恒等写像,

(2) z は σ_z の孤立固定点

となっていることである．

非常に不完全であるが，この定理の歴史について少し触れておこう．1959 年に出版された論文 [15]（原著英語）において，Hua と Look は，古典型有界対称領域のそれぞれの場合において，直接計算によって Poisson 核の調和性を示した．その後 Korányi は論文 [20] で，一般の<u>対称</u> Siegel 領域で Poisson 核の調和性を証明した．Korányi の証明はいわゆる mean-value property を経るものであり，そのことで，より強い結果，すなわち Poisson 核が定数項のない<u>任意の</u> $\mathbf{G}$ 不変な微分作用素で消えることを示している．ただし，$\mathbf{G}$ は D の正則自己同相全体がなす <u>Lie 群</u>の単位元の連結成分で，D が対称ならば $\mathbf{G}$ は半単純である．逆方向の主張について，筆者が現時点で知る限りでは，Poisson 核が非調和となる非対称な Siegel 領域の例をあげた最初の論文は Lu [26]（原著中国語，英訳有）である．後になって，Xu が [45] で一般的に，「Poisson 核の調和性 $\Longrightarrow$ D の対称性」を証明している．ただし Xu の証明は大変読みづらく，証明を完全にフォローするには彼自身の理論「N-Siegel 領域」なるものも理解しなければならないし([46] も参照)，そのための文献には中国語で書かれた英訳のない論文もある．一方で，上述の Korányi の証明についても，不変微分作用素を Laplace–Beltrami 作用素に限ったときには，直接証明（ただし有界対称領域の分類にはよらない）があってもよいのではないかという感情も拒めない．

このように定理 A をみるとき，それが大変興味深い定理でありながら，その証明についてはそれほど好ましい状態にあるとはいえない．これを何とか改善したいというのがこの研究の直接の動機であるが，同じような方向性のはっきりしない複雑な計算で定理を再証明するというのではなく，幾何学的により理解しやすい形で，なぜ定理 A が「必要十分」という形

[1] `E-mail:nomura@kusm.kyoto-u.ac.jp`
`http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nomura/`

で成立するのかという問に答えられる形にしたい．それが標題の「Cayley 変換との幾何学的関係」の意味するところである．

我々が実際にとる道筋は，Shilov 境界に関するノルム等式の成立と領域の対称性とが同値であることを示し，そこから定理 A を導くというものである．ノルム等式はある Cayley 変換を含むものであり，その特定の Cayley 変換による Siegel 領域の像である有界領域の幾何学的性質が，Poisson 核の調和性に関わっていると解釈できる．本稿で述べる定理は元の定理 A と比べて，特に次の点で強くなっている： Bergman 計量以外の，しかし Siegel 領域にとっては標準的な（認容線型形式に付随する）エルミート計量まで考えても，非対称領域では Poisson 核は調和ではない（本文の定理 6.2 参照）．

ところで，簡単に「有界領域の幾何」と云ってしまったが，専門家の間では，非対称（より正確には非準対称）Siegel 領域の「標準的な有界モデル」なんて存在しないという伝承がある．対称 Siegel 領域の標準的有界モデルとは，云うまでもなく，エルミート対称空間の Harish-Chandra 模型である．これは今日では，正の Hermitian Jordan 3 項系のスペクトル・ノルムに関する開単位球 — というように一言で言い表すことができる([25, §4], [39, Chapter II] 参照)．準対称 Siegel 領域のときには，1980 年に Dorfmeister [7] が，Jordan 構造を用いて自然に定義される Cayley 変換による像として，標準的有界モデルと呼べるものを得ている(準対称 Siegel 領域の定義は本文で与える；1.3 節参照．ここでは対称領域よりも一般で，しかも Jordan 代数とその表現といったものが依然として使える非対称 Siegel 領域 — ということで理解していただければ十分である．既約なものの分類もある [39, p. 240])．

さて一般の Siegel 領域では，上に述べた伝承に合致して様々な Cayley 変換を考えることができ，そして取り扱う問題に応じて，適切な Cayley 変換を選ばなければならないことが筆者の最近の研究で明らかになってきた．プレプリント [31] では，正規 j 代数上の各認容線型形式に付随して Cayley 変換を定義し，基本的な性質を調べた．その詳細は別の機会に譲ることにするが，それらの Cayley 変換による Siegel 領域の像はいずれも有界領域になっているということに注意しておこう．そのようにして得られる Cayley 変換の族の中には

(1) Szegö 核に付随する Cayley 変換 $\mathcal{C}_S$,
(2) Bergman 核に付随する Cayley 変換 $\mathcal{C}_B$,
(3) Siegel 領域の定義データ中の凸錐の特性函数 ϕ に付随する Cayley 変換 $\mathcal{C}_\phi$

が含まれる．本稿で扱う Cayley 変換は $\mathcal{C}_S$ であり，Berezin 変換の研究 [29], [30] のときに扱ったのは $\mathcal{C}_B$ である．Penney [33] には $\mathcal{C}_\phi$ が現れる．準対称領域のときやチューブ領域（対称でなくてよい）のとき，これら 3 つの Cayley 変換は互いに正の定数倍の違いしかない．論文 [28] で示したように，準対称領域のとき，$\mathcal{C}_B$ は上述の Dorfmeister の Cayley 変換と自然に同一視される．従って特に対称領域のときは，我々の扱う Cayley 変換は，[25, 10.3] や [39, Exercise III.7.3] に現れる Jordan 3 項系の言葉で記述される Cayley 変換に本質的に同じである([1, p. 132] も参照)．そしてそれは，強直交する正の非コンパクト・ルートの極大系に付随して定義される，半単純 Lie 群を日常的に扱っておられる方々にはお馴染みの，Cayley 変換の逆変換になっている([23], [44] も参照)．

得られるノルム等式条件は，「Shilov 境界 Σ の $\mathcal{C}_S$ による像が，ある球面上にある」と言い表される（本文の定理 6.1 参照）．この性質が対称 Siegel 領域を特徴付けてしまう

(少々驚きではある)．対称領域のときにこのノルム等式がみたされることを見るのは，有界対称領域の Shilov 境界の軌道構造（例えば [21]を参照）を踏まえれば比較的容易である．

このように，幾何学的ノルム等式を介在させて作用素の性質と領域の対称性の同値性を導くという手法は，個々の段階での計算は当然異なるものの，Berezin 変換の研究のときの手法 [29], [30] にほぼ平行である．

§1. 準備

1.1. **正規 j 代数．** 等質 Siegel 領域は Pjatetskii-Shapiro による正規 j 代数によって記述できる [35] ので，その定義から入る．実分裂可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 J で $J^2 = -I$ をみたすもの，そして $\omega \in \mathfrak{g}^*$ が次の (1), (2) をみたすとき，3 つ組 $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ あるいは単に $\mathfrak{g}$ を**正規 j 代数**という：

(1) J は可積分である (Nijenhuis tensor $\equiv 0$)．すなわち

$$[Jx, Jy] = [x, y] + J[Jx, y] + J[x, Jy] \qquad (x, y \in \mathfrak{g}).$$

(2) $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_\omega := \langle\, [Jx, y], \,\omega\,\rangle$ は $\mathfrak{g}$ に J 不変な実内積を定める．

このような線型形式 ω は**認容**であるという．認容線型形式の例としては，次式で定義される Koszul 形式 β がある [24]：

$$\langle\, x, \beta\,\rangle := \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(Jx) - J\operatorname{ad}(x)) \qquad (x \in \mathfrak{g}). \tag{1.1}$$

認容線型形式の全体がどのような集合になっているかということについては [31, Proposition 3.4] を参照されたい．以下認容線型形式 ω を一つ固定して，[37] に従って正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ の構造をまとめる（[35], [36] も参照)．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の導来代数を $\mathfrak{n} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とし，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{n}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とする．このとき $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ である．ここで，$\mathfrak{a}$ は任意の認容線型形式 ω' に対する内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\omega'}$ に関して $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}^\perp$ となっていることに注意しておく．従って，以下の $\mathfrak{g}$ の構造に関する記述は認容線型形式 ω の取り方に依っていない．さて，$\mathfrak{a}$ は可換な部分代数で，$\operatorname{ad}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ 上対角化可能な作用素からなる．各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$\mathfrak{n}_\alpha := \{x \in \mathfrak{n}\,;\; [h, x] = \langle\, h, \alpha\,\rangle x \quad (\forall h \in \mathfrak{a})\}$$

とおく．ここで $\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$ かつ $J\mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{a}$ となる $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ を全部とってきてそれを $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする．このとき $\dim \mathfrak{a} = r$ であり，$\dim \mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ である．必要なら $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ の番号をつけかえると，$\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$ であるような α（正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ の**ルート**という）は次の形に限られる（すべての可能性が出てくるわけではない）：

$$\begin{array}{llll} \tfrac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k) & (1 \leqq k < m \leqq r), & \tfrac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k) & (1 \leqq k < m \leqq r), \\ \tfrac{1}{2}\alpha_k & (1 \leqq k \leqq r), & \alpha_k & (1 \leqq k \leqq r). \end{array}$$

α, β が相異なるルートであれば，任意の認容線型形式 ω' による内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\omega'}$ で $\mathfrak{n}_\alpha \perp \mathfrak{n}_\beta$ となっていることに注意しておく．また $\mathfrak{n}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$ $(\forall k)$ にも注意しておこう．以下 $\alpha_k(JE_i) = \delta_{ki}$ をみたすように $E_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ をとり，$H_i := JE_i \in \mathfrak{a}$,

$$H := H_1 + \cdots + H_r, \qquad E := E_1 + \cdots + E_r \tag{1.2}$$

とおく．次に

$$\mathfrak{g}(0) := \mathfrak{a} \oplus \sum\nolimits_{m>k} \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}, \qquad \mathfrak{g}(1/2) := \sum\nolimits_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i/2},$$
$$\mathfrak{g}(1) := \sum\nolimits_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i} \oplus \sum\nolimits_{m>k} \mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2}$$

とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1/2) + \mathfrak{g}(1)$ は作用素 $\mathrm{ad}\, H$ の固有空間分解になっている．特に，$[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subset \mathfrak{g}(i+j)$ が成り立つ．ただし $\mathfrak{g}(i) = \{0\}$ $(i > 1)$ と約束する．さらに

$$J\mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} = \mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2} \quad (m > k), \qquad J\mathfrak{n}_{\alpha_i/2} = \mathfrak{n}_{\alpha_i/2} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

である．従って，$J\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}(1)$, $J\mathfrak{g}(1/2) = \mathfrak{g}(1/2)$ が成り立つ．作用素 J の作用に関する次の事実にも注意しておく：

$$JT = -[T, E_k] \qquad (\forall T \in \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}). \tag{1.3}$$

また，後になって用いる定数もここにまとめておく：

$$\begin{aligned}
&n_{mk} := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2} && (1 \leqq k < m \leqq r),\\
&p_j := \sum\nolimits_{k>j} n_{kj}, \qquad q_j := \sum\nolimits_{i<j} n_{ji} && (1 \leqq j \leqq r),\\
&b_j := \tfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\alpha_j/2}, \quad d_j := 1 + \tfrac{1}{2}(p_j + q_j) && (1 \leqq j \leqq r),\\
&\omega_k := \langle E_k, \omega \rangle = \|E_k\|_\omega^2 > 0 && (1 \leqq k \leqq r).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2. 正規 j 代数から作られる Siegel 領域． 正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ を固定し，$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする単連結で連結な実分裂可解 Lie 群を $G := \exp \mathfrak{g}$ とする．1.1 より $\mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であるから，対応する解析部分群を $G(0) := \exp \mathfrak{g}(0)$ とする．$G(0)$ は $V := \mathfrak{g}(1)$ に adjoint で作用する．(1.2) で定義された $E \in V$ を通る $G(0)$ 軌道を Ω とする：$\Omega := G(0)E$．このとき Ω は V での正則な開凸錐になり，軌道写像 $h \mapsto hE$ によって，$G(0)$ と Ω は微分同相である．$\mathfrak{g}(1/2)$ は $-J$ によって複素ベクトル空間とみなせるから，これを U で表す．また V の複素化を W とする：$W := V_{\mathbb{C}}$. 実双線型写像

$$Q(u, u') := \frac{1}{2}\big([Ju, u'] - i[u, u']\big) \qquad (u, u' \in \mathfrak{g}(1/2)) \tag{1.5}$$

は Ω-positive なエルミート半双線型写像 $U \times U \to W$ になる（第 1 変数について複素線型，第 2 変数について反線型）．以上のデータ V, W, U, Ω, Q から Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ を次式で定義する：

$$D := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}. \tag{1.6}$$

ここで $U = \{0\}$ となる可能性を排除していない．そのときは D はチューブ領域 $\Omega + iV$ に他ならない．本稿では Siegel 領域 D は既約であると仮定する．このとき凸錐 Ω も既約である（[17, Theorem 6.3] 参照）．

部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_D := \mathfrak{g}(1) + \mathfrak{g}(1/2)$ を考える．すぐにわかるように，$\mathfrak{n}_D$ は高々 2-step のべき零 Lie 代数である．対応する単連結で連結なべき零部分群を $N_D := \exp \mathfrak{n}_D$ とする．$G = N_D \rtimes G(0)$ となっている．N_D の各元を $n(a, b)$ $(a \in \mathfrak{g}(1),\ b \in \mathfrak{g}(1/2))$ で表すと，Campbell–Hausdorff 公式から，群演算は (1.5) の Q を用いて

$$n(a, b)n(a', b') = n(a + a' - \operatorname{Im} Q(b, b'),\ b + b')$$

と表される．そして N_D は $U+W$ に次のようにアファイン変換で働く：

(1.7) $$n(a,b)\cdot(u,w)=\bigl(u+b,\ w+ia+\tfrac{1}{2}Q(b,b)+Q(u,b)\bigr).$$

この N_D の作用で $\operatorname{Re}w-\frac{1}{2}Q(u,u)$ は保たれるので，N_D は D に作用している．以後 $\mathsf{e}:=(0,E)\in D$ を D の base point とする．$G(0)$ が Ω に単純推移的に働くので G は D に単純推移的に働く．実際，$z=(u,w)\in D$ が与えられたとき，$h\in G(0)$ を $hE=\operatorname{Re}w-\frac{1}{2}Q(u,u)$ となるように一意的にとり，$n:=n(\operatorname{Im}w,u)\in N_D$ とすれば $z=nh\cdot\mathsf{e}$ となっている．

各 $\mathbf{s}=(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{R}^r$ に対して，

$$\chi_{\mathbf{s}}\Bigl(\exp\sum\nolimits_k t_kH_k\Bigr)=\exp\Bigl(\sum\nolimits_k s_kt_k\Bigr)\qquad(t_1,\dots,t_r\in\mathbb{R})$$

とおくと，$\chi_{\mathbf{s}}$ は $A:=\exp\mathfrak{a}$ の 1 次元表現（指標）である．一方

$$\mathfrak{n}(0):=\sum\nolimits_{m>k}\mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$$

とおくと，$\mathfrak{n}(0)$ は $\mathfrak{g}(0)$ のべき零な部分 Lie 代数で，$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(0)+\mathfrak{n}_D$ となっている．$N(0):=\exp\mathfrak{n}(0)$, $N:=\exp\mathfrak{n}$ をそれぞれ $\mathfrak{n}(0)$, $\mathfrak{n}$ に対応する G の解析部分群とする．G, $G(0)$ はともに半直積 $G=N\rtimes A$，$G(0)=N(0)\rtimes A$ と書けている．従って，N 上 trivial として，$\chi_{\mathbf{s}}$ を G の 1 次元表現に拡張しておく．開凸錐 Ω 上の函数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ を微分同相 $h\mapsto hE$ で $\chi_{\mathbf{s}}|_{G(0)}$ を移して定義する：

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE):=\chi_{\mathbf{s}}(h)\qquad(h\in G(0)).$$

明らかに $\Delta_{\mathbf{s}}$ は相対不変な函数である：

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hx)=\chi_{\mathbf{s}}(h)\Delta_{\mathbf{s}}(x)\qquad(h\in G(0),\ x\in\Omega).$$

$\Delta_{\mathbf{s}}$ は，双対錐 Ω^* 上の Riesz 超函数の Laplace 変換として，チューブ領域 $\Omega+iV$ 上の正則函数に拡張できる (cf. [16, Corollary 2.5]).

1.3. **準対称 Siegel 領域.** Siegel 領域 D の Bergman 核を κ とする．(1.4) の b_j, d_j を用いて，$\mathbf{b}:=(b_1,\dots,b_r)$, $\mathbf{d}:=(d_1,\dots,d_r)$ とおくと，正の定数倍を除いて

(1.8) $$\kappa(z_1,z_2)=\Delta_{-2\mathbf{d}-\mathbf{b}}(w_1+w_2^*-Q(u_1,u_2))\qquad(z_j=(u_j,w_j)\in D)$$

となる（たとえば [29, 1.3] 参照）．V に内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\kappa$ を

(1.9) $$\langle v_1\,|\,v_2\rangle_\kappa:=D_{v_1}D_{v_2}\log\Delta_{-2\mathbf{d}-\mathbf{b}}(E)\qquad(v_1,v_2\in V)$$

で導入する．Siegel 領域 $D=D(\Omega,Q)$ が**準対称**であるとは，定義データ中の Ω が内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\kappa$ に関して自己双対になるときをいう．一方で V に（非結合的な）積 v_1v_2 を次式で定義する：

$$\langle v_1v_2\,|\,v_3\rangle_\kappa=-\tfrac{1}{2}\,D_{v_1}D_{v_2}D_{v_3}\log\Delta_{-2\mathbf{d}-\mathbf{b}}(E).$$

このとき，[7, Theorem 2.1] または [6, Proposition 3] により，D が準対称であるための必要十分条件は，この積によって V が Jordan 代数になることである．この場合，明らかに $\langle\cdot|\cdot\rangle_\kappa$ は不変内積（かけ算作用素が自己共軛）なので，Jordan 代数は [9] の意味で

Euclidean である．内積 (1.9) を $W \times W$ 上の複素双線型形式に自然に拡張して（同じ記号で表す），

$$(u_1 \,|\, u_2)_\kappa := \langle\, Q(u_1, u_2) \,|\, E \,\rangle_\kappa \qquad (u_1, u_2 \in U) \tag{1.10}$$

とおく．これが U にエルミート内積を定義することは容易にわかる．そうしておいて，各 $w \in W$ に対して，U 上の複素線型作用素 $\varphi(w)$ を次式で定まるものとする：

$$(\varphi(w)u_1 \,|\, u_2)_\kappa = \langle\, Q(u_1, u_2) \,|\, w \,\rangle_\kappa \qquad (u_1, u_2 \in U). \tag{1.11}$$

$\varphi(E)$ が恒等写像であることは定義より自明だし，$\varphi(w^*) = \varphi(w)^*$（右辺は内積 (1.10) に関する $\varphi(w)$ の共軛作用素）であることも容易にわかる．Dorfmeister [7, Theorem 2.1] によれば，D が準対称であるとき，対応 $\varphi : W \ni w \mapsto \varphi(w) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$ は複素 Jordan 代数 W の表現になっている（[28, Section 4] も参照されたい；この事実に関する Dorfmeister の難解な論文への近道を書いたつもりである）．つまり

$$\varphi(w_1 w_2) = \frac{1}{2}\big(\varphi(w_1)\varphi(w_2) + \varphi(w_2)\varphi(w_1)\big) \qquad (\forall w_1, w_2 \in W)$$

が成り立つ．

我々が使う準対称 Siegel 領域の判定条件は，D'Atri と Dotti [6] による次のものである（我々は Siegel 領域が既約であるという仮定をしていることに注意）．

命題 1.1 (D'Atri–Dotti). D が準対称であるための必要十分条件は，ルートの重複度に関する次の一定値条件が成り立つことである：

(1) n_{mk} は m, k に依存しない，
(2) b_j も j に無関係である．

準対称 Siegel 領域が対称になるための，Dorfmeister による次の判定基準も述べておこう（証明は [4, Corollary 1] にある）．

命題 1.2 (Dorfmeister). D は準対称であると仮定する（従って，V には Euclidean Jordan 代数の構造が入っている）．このとき D が対称であるための必要十分条件は，V の Jordan 代数枠 $f_1, \ldots, f_r$ が存在して，$U_k := \varphi(f_k)U$ とおくとき，$\varphi(Q(u_1, u_2))u_1 = 0$ が任意の $u_1 \in U_1$ と $u_2 \in U_2$ について成り立つことである．

この命題をノルム等式条件の解析の最終段階に用いて，D を対称領域に帰着させる．

§2. Szegö 核とそれに付随する Cayley 変換

2.1. **Szegö 核.** U の Euclid 測度 $dm(u)$ と V の Euclid 測度 dx を，(1.10) と (1.9) で定義した内積 $(\cdot\,|\,\cdot)_\kappa$, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_\kappa$ に関して規格化しておく．Siegel 領域 D 上の **Hardy 空間** $H^2(D)$ とは，D 上の正則函数 F で，次をみたすものの全体がなす Hilbert 空間のことである：

$$\|F\|^2 = \sup_{t \in \Omega} \int_U dm(u) \int_V \big|F\big(u, t + \tfrac{1}{2}Q(u,u) + ix\big)\big|^2 \, dx < \infty.$$

よく知られているように（[11], [22] and [3] 等参照），$H^2(D)$ は再生核 $S(z_1, z_2)$ を持つ．この函数 S を **Szegö 核**と呼ぶ．ここでは D の等質性を仮定しているから，Szegö 核を明示

的に書き下すことができる．実際 [3, Proposition 2.8] によって，$g = n(a,b)h \in N_D G(0)$ のとき

$$S(g\cdot \mathsf{e},\, g\cdot \mathsf{e}) = S(\mathsf{e},\,\mathsf{e})(\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}(1/2)} h^{-1})(\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}(1)} h^{-1})$$

であるから，(1.8) と同様にして，適当な正の定数 $C > 0$ に対して

$$S(z_1, z_2) = C \cdot \Delta_{-\mathbf{d}-\mathbf{b}}(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2)) \qquad ((z_j := (u_j, w_j) \in D) \tag{2.1}$$

となっていることがわかる．

2.2. **Cayley 変換．** Cayley 変換の定義を動機付けるために，まず通常の複素平面 $\mathbb{C}$ で，右半平面を単位円板 $\mathbb{D}$ に写す Cayley 変換を見ておこう．

$$1 \mapsto 0 \in \mathbb{D}, \qquad 0 \mapsto -1 \in \overline{\mathbb{D}}, \qquad \infty \mapsto 1 \in \overline{\mathbb{D}}$$

となるとすると，

$$w = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

が所要の Cayley 変換である．この式を複素半単純 Jordan 代数（1 はそこの単位元と読む）での計算とすれば，そのまま一般階数の対称チューブ領域の Cayley 変換となる．従って，分母 $(z+1)^{-1}$ さえ何らかの意味で定義できるなら，一般のチューブ領域でも Cayley 変換が定義できる．その分母の取り方であるが，実はいろいろあり得るのである．一般に認容線型形式のそれぞれに付随して分母を定義することができるのであるが([31] 参照)，その詳細は別の機会に譲るとして，本稿では Szegö 核 S に付随した分母（以下擬逆元という）に限って話を進める．

Szegö 核の明示的表示 (2.1) を思い出しておいて，各 $x \in \Omega$ に対して $\mathcal{I}_S(x) \in V^*$ を

$$\langle v, \mathcal{I}_S(x) \rangle = -D_v \log \Delta_{-\mathbf{d}-\mathbf{b}}(x) \qquad (v \in V) \tag{2.2}$$

で定義する．ただし D_v は v 方向の微分 $D_v f(x) := (d/dt) f(x+tv)\big|_{t=0}$ である．$\mathcal{I}_S(x)$ を Szegö 核に付随した x の**擬逆元**と呼ぶ．Vinberg の写像 $x \mapsto x^*$（[43] 参照）は (2.2) において $\Delta_{-\mathbf{d}-\mathbf{b}}$ の所が $\Delta_{-\mathbf{d}}$ となったものであり，[28], [29], [30] で扱った Bergman 核に付随した擬逆元は $\Delta_{-2\mathbf{d}-\mathbf{b}}$ となったものである．簡単な計算で $\mathcal{I}_S$ は $G(0)$ 共変性を持っていることがわかる：$\mathcal{I}_S(hx) = h \cdot \mathcal{I}_S(x)$．ただし右辺における $G(0)$ の V^* への作用は反傾作用 $h \cdot \xi = \xi \circ h^{-1}$ ($h \in G(0)$, $\xi \in V^*$) である．特に $\mathcal{I}_S(\lambda x) = \lambda^{-1}\mathcal{I}_S(x)$ ($\lambda > 0$) が成り立っている．

擬逆元写像 $\mathcal{I}_S$ の性質をまとめる前に，まず E_j^* ($j = 1, \ldots, r$) $\in V^*$ を

$$\langle E_i, E_j^* \rangle = \delta_{ij}, \qquad E_j^* = 0 \quad \text{on } J\mathfrak{n}(0)$$

で定義し，次に各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して，

$$E_{\mathbf{s}}^* := s_1 E_1^* + \cdots + s_r E_r^* \in V^* \tag{2.3}$$

としておく．

命題 2.3 ([31]). (1) 各 $x \in \Omega$ に対して $\mathcal{I}_S(x) \in \Omega^*$（$\Omega$ の双対錐）であり，$\mathcal{I}_S$ は Ω から Ω^* の上への全単射を与える．

(2) $\mathcal{I}_S(E) = E^*_{\mathbf{d}+\mathbf{b}}$.

(3) $\mathcal{I}_S$ は有理写像 $W \to W^*$ に解析接続される．

(4) Ω^* とその base point $E^*_{\mathbf{d}+\mathbf{b}}$ および指標 $\chi_{\mathbf{d}+\mathbf{b}}$ から始めて上と平行に議論を進めると，$\mathcal{I}_S$ の逆写像 $\mathcal{I}_S^{-1} : \Omega^* \to \Omega$（全単射）を得る．これも有理写像 $W^* \to W$ に解析接続されて，結局 $\mathcal{I}_S$ 自身双有理写像になる．

(5) $\mathcal{I}_S : \Omega + iV \to \mathcal{I}_S(\Omega + iV)$ は双正則な全単射である．

式 (2.3) で定義した $E^*_{\mathbf{s}} \in V$ を自然に W^* の元に拡張しておく．各 $w \in W$ に対して

$$C_S(w) := E^*_{\mathbf{d}+\mathbf{b}} - 2\,\mathcal{I}_S(w + E) \tag{2.4}$$

とおくと，generic な w に対しては $C_S(w) \in W^*$ であり，チューブ領域 $\Omega + iV$ の閉包は C_S の正則領域に含まれている．我々の Cayley 変換 $\mathcal{C}_S$ は次式で定義されるものである：$z = (u, w) \in U \times W$ に対して

$$\mathcal{C}_S(z) := \big(2\,\langle\, Q(u, \cdot), \mathcal{I}_S(w + E)\,\rangle,\, C_S(w)\big). \tag{2.5}$$

ここで generic な z に対しては $\mathcal{C}_S(z) \in U^\dagger \times W^*$ である．ただし U 上の反線型形式の全体を $U^\dagger$ で表した．

命題 2.4 ([31]). $\mathcal{C}_S$ は D から $\mathcal{C}_S(D)$ の上への双有理的，双正則な全単射である．

実際には，D の閉包も $\mathcal{C}_S$ の正則領域に含まれていることが (2.5) から見て取れることに注意しておこう．

定理 2.5 ([31]). 像 $\mathcal{C}_S(D)$ は有界である．

§3. Poisson 核と Laplace–Beltrami 作用素

3.1. **Poisson 核.** 右半平面 D_0 の場合を見て，Poisson 核の Hua 流の導入のアイディア（[14] 参照）を確認しておこう．D_0 の Szegö 核 $S_0(z_1, z_2)$ $(z_1, z_2 \in D_0)$ と Poisson 核 $P_0(z, it)$ $(z \in D_0,\, t \in \mathbb{R})$ は次式で与えられる（たとえば [13, §19] 参照）：

$$S_0(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{z_1 + \overline{z}_2}, \qquad P_0(z, it) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} \quad (z = x + iy).$$

特に $z \in D,\, t \in \mathbb{R}$ のとき，$S_0(z, it)$ が依然として定義できることが読みとれて，しかも直接計算で $P_0(z, it) = |S_0(z, it)|^2 S_0(z, z)^{-1}$ となっていることを確かめることができる．

一般の Siegel 領域 D に戻ろう．D の Shilov 境界 Σ は次のようになっていることが知られている（[18, Theorem 1.1] または [36, Lemma 3.25] 参照）：

$$\Sigma = \big\{(u, w) \in U \times W\,;\, 2\,\mathrm{Re}\, w = Q(u, u)\big\}.$$

さらに (1.7) によって，Σ はべき零群 N_D の原点を通る軌道 $\Sigma = N_D \cdot 0$ であり，この作用は単純推移的であることがわかる．そして Σ は $G = N_D \rtimes G(0)$ の作用でも安定である．ここで $z = (u, w) \in D,\, \zeta = (u_\zeta, w_\zeta) \in \Sigma$ のとき，次を確認しておこう：

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\big(w + w_\zeta^* - Q(u, u_\zeta)\big) &= \mathrm{Re}\, w + \tfrac{1}{2}Q(u_\zeta, u_\zeta) - \mathrm{Re}\, Q(u, u_\zeta)\\ &= \mathrm{Re}\, w - \tfrac{1}{2}Q(u, u) + \tfrac{1}{2}Q(u - u_\zeta, u - u_\zeta) \in \Omega.\end{aligned}$$

従って，(2.1) において $S(z,\zeta)$ が意味を持つので **Poisson 核** $P(z,\zeta)$ を次式で定義する：

$$P(z,\zeta) := \frac{|S(z,\zeta)|^2}{S(z,z)} \qquad (z \in D,\ \zeta \in \Sigma).$$

S の共変性から

$$P(g\cdot z,\ g\cdot\zeta) = \chi_{-\mathbf{d}-\mathbf{b}}(g)P(z,\zeta) \qquad (g \in G). \tag{3.1}$$

3.2. **Laplace–Beltrami 作用素.** 　我々が使っている Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ を思い起こそう．この内積によって G 上に左不変な Riemann 計量が引き起こされる．この Riemann 計量による G 上の Laplace–Beltrami 作用素を $\mathcal{L}_\omega$ で表す．一方 D には Bergman 計量に関する Laplace–Beltrami 作用素 $\mathcal{L}$ がある．軌道写像 $\psi : g \mapsto g\cdot\mathsf{e}$ によって G と D を多様体として同一視するとき，$\mathcal{L}$ は，正の定数倍を無視して，$\mathcal{L}_\beta$（上で ω が (1.1) で定義した Koszul 形式 β となるとき）に一致する．実際内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\beta$ は（G と D の同一視のもと），D の Bergman 計量から導かれる接空間 $T_{\mathsf{e}}(D)$ 上のエルミート内積の実部に，正の定数倍を除いて，等しいからである（[24] 参照）．

さて $\mathcal{L}_\omega$ は G 上の左不変な微分作用素なので，$\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の元で表される．次の命題の公式は一般の連結 Lie 群で成立するが，ここでは本稿の枠組みで書いておく．

命題 3.1 (Urakawa [41]). 　$\Psi_\omega \in \mathfrak{g}$ は，すべての $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x) = \langle x \,|\, \Psi_\omega \rangle_\omega$ をみたす元とする．このとき $\mathcal{L}_\omega = -\Lambda + \Psi_\omega$ が成立する．ただし Λ は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 $X_1, \dots, X_{\dim\mathfrak{g}}$ に対して，$\Lambda := X_1^2 + \cdots + X_{\dim\mathfrak{g}}^2$ で定義されるものである（$U(\mathfrak{g})$ の元として，正規直交基底の取り方に依らず定まっている）．

この命題における Ψ_ω は次式で与えられる（[29, Lemma 3.3] 参照）：

$$\Psi_\omega = \sum_{k=1}^{r} \omega_k^{-1}(q_k + b_k + 1)H_k \in \mathfrak{a}.$$

ただし，ω_k, q_k, b_k は (1.4) にいう定数であり，$H_1, \dots, H_r$ は 1.1 で固定した $\mathfrak{a}$ の基底である．

Poisson 核も G 上に移して考える：

$$P_\zeta^G(g) := P(g\cdot\mathsf{e},\ \zeta) \qquad (g \in G,\ \zeta \in \Sigma).$$

このとき，共変関係 (3.1) によって，$\mathcal{L}_\omega P_\zeta^G(g) = \chi_{-\mathbf{d}-\mathbf{b}}(g)\mathcal{L}_\omega P_{g^{-1}\cdot\zeta}^G(e)$ $(g \in G)$ となる．これより次の補題を得る．

補題 3.2. 　$\mathcal{L}_\omega P_\zeta^G = 0\ (\forall\zeta \in \Sigma) \iff \mathcal{L}_\omega P_\zeta^G(e) = 0\ (\forall\zeta \in \Sigma)$.

$\mathcal{L}_\omega P_\zeta^G(e)$ の計算結果を記述するために，まず，各 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して，$\alpha_{\mathbf{s}} \in \mathfrak{a}^*$ を

$$\langle t_1H_1 + \cdots + t_rH_r, \alpha_s \rangle = s_1t_1 + \cdots + s_rt_r \qquad (t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R})$$

で定義する．一方，軌道写像 $\psi(g) = g\cdot\mathsf{e}$ の単位元における微分 $d\psi$ は，実ベクトル空間としての線型同型 $\mathfrak{g} \cong U + W$ を与える．N_D の作用の仕方 (1.7) や (1.3) から

$$d\psi(T + u + x) = u + (-JT + ix) \qquad (T \in \mathfrak{g}(0),\ u \in \mathfrak{g}(1/2),\ x \in \mathfrak{g}(1))$$

がわかるので，$d\psi$ は複素ベクトル空間としての同型 $(\mathfrak{g}, -J) \cong U + W$ を導く．さて $(\mathfrak{g}, -J)$ にはエルミート内積 $(x \,|\, y)_\omega := \langle\, x \,|\, y\,\rangle_\omega + i\langle\, Jx \,|\, y\,\rangle_\omega$ がある．これを $d\psi$ によって $U + W$ に移し，そして $U^\dagger + W^*$ に自然に移す．このようにして得られる $U^\dagger + W^*$ 上のエルミート内積も $(\cdot \,|\, \cdot)_\omega$ で表し，そこから得られるノルムを $\|\cdot\|_\omega$ とする．$\mathcal{C}_S$ を (2.5) で定義された Cayley 変換とする．Shilov 境界 Σ は $\mathcal{C}_S$ の正則領域に含まれていることに注意しておく．

命題 3.3. $\mathcal{L}_\omega P^G_\zeta(e) = P^G_\zeta(e)\bigl(-\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega + \langle\, \Psi_\omega, \alpha_{\mathbf{d+b}}\,\rangle\bigr)$.

いかなる $\zeta \in \Sigma$ に対しても $P^G_\zeta(e) \neq 0$ となることが示されるので，結局先の補題 3.2 とあわせて次の定理を得る．

定理 3.4 ([32]). $\mathcal{L}_\omega P^G_\zeta = 0 \ (\forall \zeta \in \Sigma) \iff \|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega = \langle\, \Psi_\omega, \alpha_{\mathbf{d+b}}\,\rangle \ (\forall \zeta \in \Sigma)$.

§4. ノルム等式の解析

4.1. 解析に必要な道具． この節では，定理 3.4 に現れたノルム等式条件

$$\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega = \langle\, \Psi_\omega, \alpha_{\mathbf{d+b}}\,\rangle \qquad (\forall \zeta \in \Sigma) \tag{4.1}$$

から Siegel 領域 D が対称であること，及び与えられている認容線型形式 ω と Koszul 形式 β が $\mathfrak{g}$ の導来代数 $\mathfrak{n}$ 上で，正の定数倍を除いて一致することを示す手順を解説する．そのために，G の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ を導入する．$G = \exp \mathfrak{g}$ が分裂可解 Lie 群であり，中心は単位元のみであるから，G は随伴群 $\mathrm{Ad}\,(G)$ と同一視でき，それは線型 Lie 群 $GL(\mathfrak{g})$ の中の三角化可能な閉部分群である．従ってその複素化を $GL(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中でとる．$G(0)_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}(0)_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の解析部分群とする．

まず $\{0\} + iV \subset \Sigma$ に注意．次の補題を使って $\mathcal{C}_S(0, iv) = (0, C_S(iv))$ $(v \in V)$ を計算する．

補題 4.1 ([28]). 実解析的な写像 $\eta_0 : V \to G(0)_{\mathbb{C}}$ が一意的に存在して，$\eta_0(0) = e$ かつ $\eta_0(v)E = E + iv$ が任意の $v \in V$ に対して成り立つ．ここで e は $G(0)_{\mathbb{C}}$ の単位元．

一方で $\mathcal{I}_S$ の $G(0)$ 共変性を解析接続しておくと，$\mathcal{I}_S(E + iv) = \eta_0(v) \cdot E^*_{\mathbf{d+b}}$ を得，従って (2.4) より $C_S(iv)$ を得る．実際は $\eta_0(v)$ を求めるのはなかなか大変で，求めた後でも $\eta_0(v) \cdot E^*_{\mathbf{d+b}}$ は反傾作用であるから，その計算には注意を要する．

さて，正規 j 代数において，(1.4) に現れる n_{mk} について，一般に，次の関係が成り立つ（[29, Corollary 4.4] 参照）．

補題 4.2. $j < k < l$ とする．

(1) $n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{lj} \geqq n_{kj}$.

(2) $n_{kj} \neq 0$ ならば $n_{lj} \geqq n_{lk}$.

この補題は，次の興味深い等式の直接の帰結である（[29, Lemma 4.3] 参照）：

$$j < k < l,\ x \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l + \alpha_k)/2},\ y \in \mathfrak{n}_{(\alpha_k + \alpha_j)/2} \implies \bigl\|[Jx, y]\bigr\|^2_\omega = \frac{1}{2\omega_k}\,\|x\|^2_\omega \|y\|^2_\omega.$$

4.2. 準対称領域への帰着． 以下簡単のため $\mathbf{c} := \mathbf{d} + \mathbf{b}$, $c_m := d_m + b_m$ とおく．まず，(4.1) が $\zeta = 0 \in \Sigma$ に対して成り立つことと，$\mathcal{C}_S(0) = (0, -E^*_{\mathbf{c}})$ より次の補題を押さえておこう．

補題 4.3. 仮定 (4.1) のもとで $\langle \Psi_\omega, \alpha_{\mathbf{c}} \rangle = \|E^*_{\mathbf{c}}\|^2_\omega$ が成り立つ．

第 1 段階として，$v = v_{kj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2}$ $(k > j)$ のときを考える．このときは

$$t_k := \log\bigl(1 + \tfrac{1}{2}\omega_k^{-1}\|v_{kj}\|^2_\omega\bigr) \tag{4.2}$$

として，$\eta_0(v_{kj})$ は次式で与えられる：

$$\eta_0(v_{kj}) = \exp(iJv_{kj})\exp(t_k H_k).$$

これにより $\mathcal{I}_S(E + iv_{kj})$ が計算でき，従って $C_S(iv_{kj})$ を得る：

$$\begin{aligned} C_S(iv_{kj}) = -\sum\nolimits_{m\neq k,j} c_m E^*_m - e^{-t_k}\bigl\{&c_k\bigl(1 - \tfrac{1}{2}\omega_k^{-1}\|v_{kj}\|^2_\omega\bigr)E^*_k \\ &+ \bigl(c_j - \omega_k^{-1}(c_k - \tfrac{1}{2}c_j)\|v_{kj}\|^2_\omega\bigr)E^*_j + 2ic_k\,\mathrm{ad}^*(Jv_{kj})E^*_k \circ P_{kj}\bigr\}. \end{aligned}$$

ここで P_{kj} は分解 $W = \sum_{q\geqq p}(\mathfrak{n}_{(\alpha_q+\alpha_p)/2})_{\mathbb{C}}$ に沿った射影 $W \to (\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2})_{\mathbb{C}}$ を表すものとする．ノルムを計算して

補題 4.4. $\zeta = (0, iv_{kj}) \in \Sigma$ のとき

$$\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega - \|E^*_{\mathbf{c}}\|^2_\omega = c_k\omega_k^{-1}e^{-2t_k}\|v_{kj}\|^2_\omega\bigl\{2(c_k\omega_k^{-1} - c_j\omega_j^{-1}) + (c_k - c_j)\omega_j^{-1}\omega_k^{-1}\|v_{kj}\|^2_\omega\bigr\}.$$

補題 4.3 と補題 4.4 より

補題 4.5. (4.1) が成り立っているとき，$n_{kj} \neq 0$ ならば，$\omega_j = \omega_k$ かつ $d_j + b_j = d_k + b_k$ である．

Ω は既約ゆえ [2] の結果が使える．すなわち，任意の j, k に対して，相異なる自然数からなる列 $\{j_\lambda\}_{\lambda=0}^m$ $(j_0 = k,\ j_m = j)$ で，各 λ において $n_{j_{\lambda-1}j_\lambda} \neq 0$ となるものが存在する．ただし，$j_{\lambda-1} < j_\lambda$ のときは，$n_{j_{\lambda-1}j_\lambda} := n_{j_\lambda j_{\lambda-1}}$ とする．従って

命題 4.6. $d_m + b_m$ は m に依らない．また ω_m も m に依らない．

以下 $c := d_m + b_m$, $\omega_0 := \omega_m$（ともに m に無関係）とおく．第 2 段階は，$j < k < l$ として，$v = v_{lj} + v_{lk}$ $(v_{lj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_j)/2},\ v_{lk} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_k)/2})$ のときを考える．このときは

$$t_l := \log\bigl(1 + \tfrac{1}{2}\omega_0^{-1}\|v_{lj}\|^2_\omega + \tfrac{1}{2}\omega_0^{-1}\|v_{lk}\|^2_\omega\bigr)$$

として，$\eta_0(v_{lj} + v_{lk}) = \exp(iJv_{lj})\exp(iJv_{lk})\exp(t_l H_l)$ となる．これより第 1 段階と同様にして，$\zeta = (0, i(v_{lj} + v_{lk}))$ に対して $\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega$ の計算ができる．結果を記述するために，$\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2}$ の正規直交基底 $\{e_m\}_{m=1}^{n_{kj}}$ を一つ固定しよう．そして各 $m = 1, 2, \ldots, n_{kj}$ に対して，作用素 $\tau_m : \mathfrak{n}_{(\alpha_l-\alpha_k)/2} \to \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_j)/2}$ を次式で定義する：

$$\tau_m(T) := [T, e_m] \qquad (T \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l-\alpha_k)/2}).$$

補題 4.7. $\zeta = (0, i(v_{lj} + v_{lk})) \in \Sigma$ のとき

$$\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|^2_\omega - \|E^*_{\mathbf{c}}\|^2_\omega = 2c^2\omega_0^{-2}e^{-2t_l}\Bigl[2\sum_{m=1}^{n_{kj}}\bigl|\langle\, v_{lj} \mid \tau_m(Jv_{lk})\,\rangle_\omega\bigr|^2 - \omega_0^{-1}\|v_{lk}\|^2_\omega\|v_{lj}\|^2_\omega\Bigr].$$

これより次の補題を得る．

補題 4.8. 仮定 (4.1) のもと，$n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{lj} = n_{kj}$ である．

第 3 段階は，$j < k < l$ として，$v = v_{kj} + v_{lj}$ $\big(v_{kj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2},\ v_{lj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_j)/2}\big)$ のときを考える．まず $\eta_0(v_{kj} + v_{lj})$ を記述するために記号を導入する．$T_{lj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_j)/2}$ と $T_{kj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2}$ に対して

$$T_{lj} \circ T_{kj} := \tfrac{1}{2}\,[T_{kj}, [T_{lj}, E_j]] + \tfrac{1}{2}\,[T_{lj}, [T_{kj}, E_j]] \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_k)/2}$$

とおく．$S_{lk} := J(Jv_{lj} \circ Jv_{kj}) \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l-\alpha_k)/2}$ として，F を次式で定義する：

$$F := 1 + \tfrac{1}{2}\omega_0^{-1}\|v_{kj}\|_\omega^2 + \tfrac{1}{2}\omega_0^{-1}\|v_{lj}\|_\omega^2 + \tfrac{1}{4}\omega_0^{-2}\|v_{kj}\|_\omega^2\|v_{lj}\|_\omega^2 - \tfrac{1}{2}\omega_0^{-1}\|S_{lk}\|_\omega^2.$$

ここで [29, Lemma 4.6] によって，$\|S_{lk}\|_\omega^2 \leqq (2\omega_0)^{-1}\|v_{lj}\|_\omega^2\|v_{kj}\|_\omega^2$ が成り立つので，$F > 0$ であることに注意しておこう．式 (4.2)（ただし ω_k は ω_0 と読み替える）で t_k を定め，$e^{t_l} = e^{-t_k}F$ で t_l を定めると

$$\eta_0(v_{kj} + v_{lj}) = \exp(iJ(v_{kj} + v_{lj}))\exp(e^{-t_k}S_{lk})\exp(t_kH_k + t_lH_l).$$

これより $\eta_0(v_{kj} + v_{lj}) \cdot E_{\mathbf{c}}^*$ を計算して，$\zeta = (0, i(v_{kj} + v_{lj}))$ に対する $\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|_\omega^2$ を計算するのであるが，多少厄介なところがあるし，計算結果の式も長いのでここでは省略する（[32] 参照）．得られる結論は

命題 4.9. 仮定 (4.1) のもとで，$n_{kj} \neq 0$ ならば，

$$\|v_{lj}\|_\omega^2\|v_{kj}\|_\omega^2 = 2\omega_0\|Jv_{lj} \circ Jv_{kj}\|_\omega^2 \qquad (\forall v_{lj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_l+\alpha_j)/2},\ \forall v_{kj} \in \mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2}).$$

この命題と補題 4.2 (2) より

命題 4.10. 仮定 (4.1) のもとで，$n_{kj} \neq 0$ ならば，$n_{lj} = n_{lk}$ が成り立つ．

以上より Ω の既約性を使うと，n_{mk} $(m > k)$ は m, k に依らないことが出る（実は $n_{21} \neq 0$ を示すことに最も神経を使う）．そうすると (1.4) より d_m が，次いで命題 4.6 より b_m が m に依らないことがわかる．従って命題 1.1 により D は準対称である．さらに，[29, Lemma 5.2] より $\beta_m = 2d_m + b_m$ であるから，β_m も m に無関係である．そして任意の認容線型形式は $\mathfrak{n}(0) + \mathfrak{g}(1/2) + J\mathfrak{n}(0)$ で消える（[31, Lemma 3.1] 参照）ことにより

命題 4.11. ノルム等式条件 (4.1) が成り立つならば，D は準対称であって，$\omega|_{\mathfrak{n}}$ は $\beta|_{\mathfrak{n}}$ の正の定数倍である．

4.3. 対称領域への帰着． 以下，$b := b_m,\ d := d_m,\ \beta_0 := \beta_m$（いずれも m に無関係）とおく．D が準対称となったので，V は Euclidean Jordan 代数の構造を持っている．正規 j 代数の構造で Jordan 積 v_1v_2 を表すと（[28, Section 4] 参照）

$$2\,v_1v_2 = [Jv_1, v_2] + {}^t\big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}(1)}Jv_1\big)v_2.$$

ここで，$\mathfrak{g}(1)$ 上の線型作用素 T に対して，${}^tT$ は内積 (1.9) に関する T の共軛作用素を表す．このとき，$E_1, \ldots, E_r$ は Jordan 代数枠をなし，$\mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2}$ $(1 \leqq k \leqq m \leqq r)$ が対応する Peirce 空間になっている．そして W は V の複素化として，複素半単純 Jordan 代数である．V の trace 内積を $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_0$ で表す：$\langle\, v_1 \,|\, v_2 \,\rangle_0 := \mathrm{tr}\,(v_1v_2)$. 容易に

$$(2d + b)\langle\, v_1 \,|\, v_2 \,\rangle_0 = \langle\, v_1 \,|\, v_2 \,\rangle_\kappa.$$

これは [9] にある trace 内積を使った諸公式を本稿での内積 (1.9) を使った公式に書き直すために用いる．Bergman 核に付随する擬逆元写像および Cayley 変換をそれぞれ $\mathcal{I}$ および $\mathcal{C}$ で表す．D が準対称領域に帰着された今となっては，$\mathcal{I}_S$ や $\mathcal{C}_S$ とは定数倍しか違わない：

$$\mathcal{I}_S = \frac{d+b}{2d+b}\mathcal{I}, \qquad \mathcal{C}_S = \frac{d+b}{2d+b}\mathcal{C}. \tag{4.3}$$

一方，$f \in W^*$ に対して $\widetilde{f} \in W$ を，$F \in U^\dagger$ に対して $\widetilde{F} \in U$ を各々次式で定義する：

$$\langle\, w, f\,\rangle = \langle\, w \,|\, \widetilde{f}\,\rangle_\kappa \quad (\forall w \in W), \qquad \langle\, u, F\,\rangle = (\widetilde{F} \,|\, u)_\kappa \quad (\forall u \in U).$$

そうすると，[28, Proposition 4.4] により，$\mathcal{I}(w)^\sim = w^{-1}$ が成り立つ．さらに [28, Theorem 4.10] によれば

$$\mathcal{C}(z)^\sim = \big(2\,\varphi(w+E)^{-1}u,\ (w-E)(w+E)^{-1}\big) \qquad (z=(u,w)).$$

ここで φ は (1.11) で定義されたものであり，D が準対称なので，複素 Jordan 代数 W の $*$ 表現になっている．W のエルミート内積を $(w_1 \,|\, w_2)_\kappa := \langle\, w_1 \,|\, w_2^*\,\rangle_\kappa$ で定義すると，[29, Proposition 9.3] によって次式を得る：

$$\|\mathcal{C}(z)\|_\omega^2 = (2d+b)\omega_0^{-1}(2\,\|\varphi(w+E)^{-1}u\|_\kappa^2 + \|(w-E)(w+E)^{-1}\|_\kappa^2). \tag{4.4}$$

これと，容易にわかる $\|E_{\mathfrak{c}}^*\|_\omega^2 = \omega_0^{-1}(d+b)^2 r$ および $\|E\|_\kappa^2 = (2d+b)r$ をあわせると，我々のノルム等式条件 (4.1) は次のように書き直される：$\forall\zeta = (u_\zeta, w_\zeta) \in \Sigma$ に対して

$$2\,\|\varphi(w_\zeta+E)^{-1}u_\zeta\|_\kappa^2 + \|(w_\zeta-E)(w_\zeta+E)^{-1}\|_\kappa^2 = \|E\|_\kappa^2. \tag{4.5}$$

Jordan 代数 W の表現 φ の基本的な性質を次にまとめておこう．

補題 4.12. (1) $\varphi(E_i)$ は U から $\mathfrak{n}_{\alpha_i/2}$ への直交射影である．
(2) $j \neq k$ とする．各 $w \in (\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2})_{\mathbb{C}}$ に対して，$\varphi(w)\mathfrak{n}_{\alpha_j/2} \subset \mathfrak{n}_{\alpha_k/2}$ となる．

第 4 段階としては，$k > j$, $u_j \in \mathfrak{n}_{\alpha_j/2}$, $u_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_k/2}$ として，(4.5) において

$$\zeta = (u_j+u_k,\ \tfrac{1}{2}Q(u_j+u_k, u_j+u_k) + i\,\mathrm{Im}\,Q(u_j,u_k)) \in \Sigma \tag{4.6}$$

をとる．ここで

$$D := \big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_j\|_\kappa^2\big)\big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_k\|_\kappa^2\big) - \tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\langle\, Q(u_j,u_k) \,|\, Q(u_j,u_k)\,\rangle_\kappa$$

とおく．$D \neq 0$ であることに注意しておこう．

命題 4.13. $\zeta = (u_\zeta, w_\zeta) \in \Sigma$ を (4.6) の通りとする．
(1) $(w_\zeta - E)(w_\zeta+E)^{-1} = -\sum_{m\neq j,k} E_m - D^{-1}\big(a_jE_j + a_kE_k - 2Q(u_j,u_k)\big)$.
ただし，

$$a_j := \big(1-\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_j\|_\kappa^2\big)\big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_k\|_\kappa^2\big) + \tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\langle\, Q(u_j,u_k) \,|\, Q(u_j,u_k)\,\rangle_\kappa,$$
$$a_k := \big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_j\|_\kappa^2\big)\big(1-\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_k\|_\kappa^2\big) + \tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\langle\, Q(u_j,u_k) \,|\, Q(u_j,u_k)\,\rangle_\kappa.$$

(2) $\varphi(w_\zeta+E)^{-1}(u_j+u_k) = D^{-1}(A_j+A_k)$. ただし

$$A_j := \big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_k\|_\kappa^2\big)u_j - \varphi\big(Q(u_j,u_k)\big)u_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_j/2},$$
$$A_k := \big(1+\tfrac{1}{2}\beta_0^{-1}\|u_j\|_\kappa^2\big)u_k - \varphi\big(Q(u_j,u_k)\big)u_j \in \mathfrak{n}_{\alpha_k/2}.$$

これよりノルムを計算し，(4.5) を使うと

$$\varphi(Q(u_j,u_k))u_j=0,\qquad \varphi(Q(u_k,u_j))u_k=0$$

が出る．命題 1.2 に述べた Dorfmeister の判定条件によって D は対称となる．

命題 4.14. ノルム等式条件 (4.1) が成り立つとき，D は対称であって，$\omega|_{\mathfrak{n}}=\beta_0^{-1}\omega_0\cdot\beta|_{\mathfrak{n}}$ が成り立つ．

§5. 対称領域の場合

5.1. **Jordan 3 項系.** この節では D が対称 Siegel 領域のとき，ノルム等式条件 (4.1) がみたされていることを見る．対称 Siegel 領域は [39, Chapter V] により Jordan 3 項系 (JTS) を用いて記述できるので，まず Hermitian JTS の定義から入ろう．基本的文献としては [39], [25], [10, Part V by Roos] がある．複素ベクトル空間 Z に実 3 重線型写像 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}:Z\times Z\times Z\to Z$ が定義されていて，次の 3 条件がみたされているとき，Z は **Hermitian JTS** という：

(1) $\{x,y,z\}$ は x,z について複素線型で y については反線型，
(2) $\{x,y,z\}=\{z,y,x\}$,
(3) $\{a,b,\{x,y,z\}\}=\{\{a,b,x\},y,z\}-\{x,\{b,a,y\},z\}+\{x,y,\{a,b,z\}\}$.

Hermitian JTS である Z が与えられたとき，Z 上の複素線型作用素 $x\,\square\,y$ を $(x\,\square\,y)z:=\{x,y,z\}$ で定義する．以下 trace 形式 $\mathrm{tr}\,(x\,\square\,y)$ は Z に正定値なエルミート内積を定義するものとする．Z の階数を r とし，**JTS 枠** $\{e_1,\dots,e_r\}$ を一つ固定する．すなわち，Z の原始 3 重べき等元の極大直交系を一つ固定する．このとき，$\{e_i,e_i,e_i\}=e_i$ $(\forall i)$ かつ $e_i\,\square\,e_j=0$ $(i\neq j)$ が成り立っている．そして，$e:=e_1+\cdots+e_r$ も 3 重べき等元で，Z 上の自己共軛作用素 $e\,\square\,e$ の固有値は 1/2 と 1 のみである．U,W をそれぞれ 1/2, 1 の固有空間とすると，$Z=U\oplus W$ である．積 $z_1z_2:=\{z_1,e,z_2\}$ により Z は Jordan 代数となり，W はその Jordan 部分代数である．さらに反線型写像 $w\mapsto\{e,w,e\}$ は W に対合的実 Jordan 代数同型を定義するので，その固定点集合 V は Jordan 代数としての W の実型である．実際 V は [9] の意味で Euclidean Jordan 代数になっている．V の階数も r であり，$\{e_1,\dots,e_r\}$ は V の Jordan 代数枠になっている．

V の対称錐を Ω とする： $\Omega:=\mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x\in V\}$．このとき Ω は V の trace 内積 $\langle\, x\,|\,y\,\rangle_0:=\mathrm{tr}\,(xy)$ で自己双対になっている．複素半双線型な写像 $Q:U\times U\to W$ を

$$Q(u,u'):=2\{u,u',e\}\tag{5.1}$$

で定義すると，Q はエルミートで Ω-positive になる．以上のデータ V,W,U,Ω,Q から Siegel 領域 D を (1.6) で定義する．こうして得られる Siegel 領域 D は対称であり，すべての対称 Siegel 領域はこのようにして JTS から得られる．D の点 $\mathsf{e}:=(0,e)$ におけるシンメトリーについては例えば [25, 10.12] 参照：複素 Jordan 代数 W での逆元をとるという操作が関係する．

以下 Z は JTS として単純であるとする．このとき V は Jordan 代数として単純であり，Ω は既約である．従って D も既約である．JTS 枠 $\{e_1,\dots,e_r\}$ によって，U,V は分解

$U=\sum^{\oplus}_{1\leqq j\leqq r}U_j$，$V=\sum^{\oplus}_{1\leqq i\leqq j\leqq r}V_{ij}$ を持つ（Peirce 分解）．ただし

$$U_j:=\left\{u\in U\ ;\ (e_k\,\square\,e_k)u=\tfrac{1}{2}\delta_{jk}\,u\quad(1\leqq k\leqq r)\right\},\tag{5.2}$$

$$V_{ij}:=\left\{v\in V\ ;\ (e_k\,\square\,e_k)v=\tfrac{1}{2}(\delta_{ik}+\delta_{jk})\,v\quad(1\leqq k\leqq r)\right\}.\tag{5.3}$$

Z の単純性から $\dim_{\mathbb{C}}U_j$ は j に無関係であり，$\nu:=\dim_{\mathbb{R}}V_{ij}$ $(i<j)$ も i,j に依存しない．$V_{ii}=\mathbb{R}e_i$ であることにも注意しておこう．

Siegel 領域 D の正則同相全体がなす Lie 群の単位元の連結成分を $\mathbf{G}$ で表す．$\mathbf{G}$ は半単純 Lie 群で，中心は単位元だけからなる．$\mathfrak{G}$ を $\mathbf{G}$ の Lie 代数とする．$\mathfrak{G}$ の各元は，D 上の完全積分可能なベクトル場である．交換子積は Poisson 積で

$$\left[p(z)\frac{\partial}{\partial z},\,q(z)\frac{\partial}{\partial z}\right]:=\big(p'(z)(q(z))-q'(z)(p(z))\big)\frac{\partial}{\partial z}$$

と書かれるものである．実際には，$\mathfrak{G}$ の元は正則<u>多項式</u>ベクトル場であることが知られている（[19], [25], [39] 参照）．上で固定した JTS 枠 $\{e_1,\dots,e_r\}$ を思い出して，

$$\mathfrak{A}:=\sum\nolimits_{1\leqq j\leqq r}\mathbb{R}\,(e_j\,\square\,e_j)(z)\,\frac{\partial}{\partial z}$$

とおく．$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{G}$ の可換な部分代数で，$\mathrm{ad}\,(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{G}$ 上の対角化可能な作用素からなる．Peirce 分解 (5.2), (5.3) をふまえて

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}^0_{ij}&:=\{(x\,\square\,e_i)(z)\,\partial/\partial z\ ;\ x\in V_{ij}\} && (1\leqq i<j\leqq r),\\
\mathfrak{G}^{1/2}_{j}&:=\{(u+2\,\{e,u,z\})\,\partial/\partial z\ ;\ u\in U_j\} && (j=1,\dots,r),\\
\mathfrak{G}^1_{jk}&:=\{ia\,\partial/\partial z\ ;\ a\in V_{jk}\} && (1\leqq j\leqq k\leqq r)
\end{aligned}$$

とし，$\mathfrak{N}:=\big(\sum^{\oplus}_{j<k}\mathfrak{G}^0_{jk}\big)\oplus\big(\sum^{\oplus}_{1\leqq j\leqq r}\mathfrak{G}^{1/2}_{j}\big)\oplus\big(\sum^{\oplus}_{j\leqq k}\mathfrak{G}^1_{jk}\big)$ とおく．点 e における $\mathbf{G}$ の固定部分群を $\mathbf{K}$ とする．このとき $\mathbf{K}$ は $\mathbf{G}$ の極大コンパクト部分群で，$\mathfrak{K}:=\mathrm{Lie}\,(\mathbf{K})$ とすると，Lie 代数 $\mathfrak{G}$ の岩澤分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{N}$ を得る．これに対応して $\mathbf{G}$ の岩澤分解 $\mathbf{G}=\mathbf{KAN}$ ($\mathbf{A}:=\exp\mathfrak{A}$, $\mathbf{N}:=\exp\mathfrak{N}$) を得る．$\mathfrak{A}^*$ の基底 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ を，$\mathfrak{A}$ の基底 $(e_1\,\square\,e_1)\,\partial/\partial z,\dots,(e_r\,\square\,e_r)\,\partial/\partial z$ に双対なものとすると，

(1) $\mathfrak{G}^0_{ij}$ は $\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)$ ルート空間 $(i<j)$,

(2) $\mathfrak{G}^{1/2}_{j}$ は $\frac{1}{2}\alpha_j$ ルート空間 $(1\leqq j\leqq r)$,

(3) $\mathfrak{G}^1_{jk}$ は $\frac{1}{2}(\alpha_j+\alpha_k)$ ルート空間 $(j\leqq k)$

である（例えば [40, 2.66] 参照）．以下，$\mathfrak{S}:=\mathfrak{A}+\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}(0):=\mathfrak{A}+\sum_{i<j}\mathfrak{G}^0_{ij}$ とおく．

5.2. **JTS から定義される正規 j 代数．** JTS から始めて，話を我々の正規 j 代数の枠組みに当てはめる手続きについて解説しよう．複素ベクトル空間 U を実ベクトル空間とみなすとき，それを $U_{\mathbb{R}}$ と書く．(5.1) の Q を用いて $U_{\mathbb{R}}+V$ に交換子積を次で導入する：

$$[u+v,\ u'+v']=-2\,\mathrm{Im}\,Q(u,u')\qquad(u,u'\in U_{\mathbb{R}},\ v,v'\in V).$$

明らかに $U_{\mathbb{R}}+V$ は高々 2-step のべき零 Lie 代数である．Z 上の線型作用素のなす実 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{s}(0)$ を次で定義する：

$$\mathfrak{a}:=\sum\nolimits_{j=1}^{r}\mathbb{R}(e_i\,\square\,e_i),\qquad\mathfrak{s}(0):=\mathfrak{a}+\sum\nolimits_{i<j}\{x\,\square\,e_i\ ;\ x\in V_{ij}\}.$$

$\mathfrak{a}$ は可換である．さらに，次で決まる線型同型写像 Ψ_0 によって $\mathfrak{S}$ の Lie 代数構造を $\mathfrak{s} := \mathfrak{s}(0) \oplus (U_{\mathbb{R}} + V)$ に移す：

$$\Psi_0 : Tz\,\partial/\partial z \mapsto T \quad (T \in \mathfrak{S}(0)), \qquad \Psi_0 : ia\,\partial/\partial z \mapsto a \quad (a \in V),$$
$$\Psi_0 : (u + 2\{e, u, z\})\,\partial/\partial z \mapsto u \quad (u \in U_{\mathbb{R}}).$$

このとき，$\mathfrak{s} = (U_{\mathbb{R}} + V) \rtimes \mathfrak{s}(0)$ であり，$\mathfrak{s}(0)$ の $U_{\mathbb{R}}$ 及び V への作用は，$\mathfrak{s}(0)$ の各作用素の $U_{\mathbb{R}}, V$ それぞれへの単なる制限であることがわかる（[29, Lemma 11.1] の証明参照）．さらに $\mathfrak{s}$ 上の線型写像 J を次のルールで定義する：

$$\begin{aligned} &J(e_j \,\square\, e_j) = -e_j \qquad (1 \leqq j \leqq r), \qquad J(x \,\square\, e_i) = -\tfrac{1}{2}x \quad (x \in V_{ij}),\\ &Ju = -iu \qquad (u \in U_{\mathbb{R}}),\\ &Jx = 2x \,\square\, e_i \;\; (x \in V_{ij}), \qquad\qquad Je_j = e_j \,\square\, e_j \;\; (1 \leqq j \leqq r). \end{aligned}$$

明らかに $J^2 = -I$ であり，複素ベクトル空間 $(U_{\mathbb{R}}, -J)$ は U 自身である．さて，Euclidean Jordan 代数 V の trace 形式を e^* としよう：$\langle x, e^* \rangle := \mathrm{tr}(x)$ $(x \in V)$．この e^* を $\mathfrak{s}(0) + U_{\mathbb{R}}$ 上 0 として $\mathfrak{s}$ に拡張する．そうすると [29, Proposition 11.2] より

命題 5.1. 3 つ組 $(\mathfrak{s}, J, e^*)$ は正規 j 代数である．

特に e^* は認容線型形式であるから，$\mathfrak{s}$ には対応する内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{e^*}$ がある．分裂可解 Lie 群 $S := \exp \mathfrak{s}$ は $\mathbf{S} := \mathbf{NA}$ と同型であり，両者の Siegel 領域 D への作用は一致している．

5.3. **JTS 内での D の Cayley 変換．** 定数 b_j, d_j を正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ での (1.4) にいうものとする．Lie 代数の同型 $\Psi_0 : \mathfrak{S} \to \mathfrak{s}$ により，$b_j = \dim_{\mathbb{C}} U_j$, $d_j = 1 + \nu(r-1)/2$ がわかるから，b_j, d_j ともに j に関係しない．それらを以後 b, d で表す．今の場合，Koszul 形式 β は $\beta|_V = (2d + b)e^*|_V$ をみたす．従って，

$$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_\beta = (2d + b) \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_{e^*} \qquad (v_1, v_2 \in V).$$

V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_\beta$ を $W \times W$ 上の複素双線型形式に拡張しておく．一方 U には，$(\mathfrak{s}, -J)$ の部分空間として，エルミート内積 $(u_1 \,|\, u_2)_\beta := \langle [Ju_1, u_2], \beta \rangle - i \langle [u_1, u_2], \beta \rangle$ がある．各 $f \in W^*$ に対して $\iota(f) \in W$ および各 $F \in U^\dagger$ に対して $\iota(F) \in U$ を次式で定義する：

$$\langle \iota(f) \,|\, w \rangle_\beta = \langle w, f \rangle \quad (w \in W), \qquad (\iota(F) \,|\, u)_\beta = \langle u, F \rangle \quad (u \in U).$$

また W にはエルミート内積 $(w_1 \,|\, w_2)_\beta := \langle w_1 \,|\, w_2^* \rangle_\beta$ がある．そして $U \perp W$ として得られる $Z = U + W$ 上のエルミート内積 $(\cdot | \cdot)_\beta$ は，命題 3.3 の直前のようにして $d\psi$ を経由して $(\mathfrak{s}, -J)$ から移入する $U + W$ 上のエルミート内積（ただし $\omega = \beta$）と同じものである．

さて $\mathcal{C}$ を，[28] と [29] で扱った，Bergman 核に付随する Cayley 変換とし，$\mathcal{C}_\beta := \iota \circ \mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}_\beta$ は $U \times W$ 上の有理写像であり，[29, (11.14)] により

$$\mathcal{C}_\beta(u, w) = (\varphi(w + e)^{-1} u,\ (w - e)(w + e)^{-1}). \tag{5.4}$$

ここで Jordan 代数 W の表現 φ は $\varphi(w) = 2(w \,\square\, e)|_U$ と表される（[29, Lemma 11.3] 参照）．上式 (5.4) より明らかに $\mathcal{C}_\beta(\mathsf{e}) = 0$ である．

命題 5.2. 有界対称領域 $\mathcal{D}_\beta := \mathcal{C}_\beta(D)$ は円形 (circular) である．すなわち，絶対値 1 の複素数のかけ算で $\mathcal{D}_\beta$ は安定である．

証明は [29, Proposition 11.5] 参照．この命題は，別の言葉で言い換えれば，$\mathcal{D}_\beta$ はエルミート対称空間の Harish-Chandra 模型になっているということを意味している．さらに $\mathcal{C}'_\beta(\mathsf{e}) = \frac{1}{2}I$ である．このことは $\mathsf{e} \in D$ における接空間として Z に入る D からの Bergman 内積と，原点 $0 \in \mathcal{D}_\beta$ の接空間として Z に入る $\mathcal{D}_\beta$ からの Bergman 内積とが，正の定数倍を除いて，一致することを意味している．円形有界対称領域 $\mathcal{D}_\beta$ の正則同相のなす Lie 群の単位元の連結成分を G とする．G は中心が単位元だけであるような半単純 Lie 群で，$\mathsf{G} = \mathcal{C}_\beta \circ \mathbf{G} \circ \mathcal{C}_\beta^{-1}$ となっている．原点における G の固定部分群を K とする．$\mathsf{K} = \mathcal{C}_\beta \circ \mathbf{K} \circ \mathcal{C}_\beta^{-1}$ であり，K は G の極大コンパクト部分群である．$\mathcal{D}_\beta$ の円形性の帰結として，K は線型である（H. Cartan の定理，例えば [38, 2.1.3] 参照）．$\mathcal{D}_\beta$ の Bergman 計量の K 不変性と，これまでに述べたことから，K は内積 $(\cdot\,|\,\cdot)_\beta$ のユニタリ群に含まれていることがわかる．

5.4. **ノルム等式の検証．** 以上のことを踏まえて，D が対称で $\omega = \beta$ のとき，ノルム等式条件 (4.1) がみたされていることを見よう．まず Z 上の 2 つのエルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)_\kappa$ と $(\cdot\,|\,\cdot)_\beta$ を比較しておく：

$$(w_1\,|\,w_2)_\kappa = (w_1\,|\,w_2)_\beta \quad (w_j \in W), \qquad 2\,(u_1\,|\,u_2)_\kappa = (u_1\,|\,u_2)_\beta \quad (u_j \in U).$$

そうすると，(4.3), (4.4), (5.4) および今の場合 $\langle\, \Psi_\beta, \alpha_{\mathbf{d+b}}\,\rangle = (d+b)^2(2d+b)^{-2}\|e\|_\beta^2$ となっていることによって，ノルム等式条件 (4.1) は次の形になる：

$$\|\mathcal{C}_\beta(\zeta)\|_\beta = \|e\|_\beta \qquad (\forall \zeta \in \Sigma). \tag{5.5}$$

$\mathcal{D}_\beta$ の Shilov 境界を $\Sigma_{\mathcal{D}_\beta}$ とする．よく知られているように（例えば [21, p. 155] 参照），$\Sigma_{\mathcal{D}_\beta}$ は K 軌道でもあり，G 軌道でもある．一方，Siegel 領域 D の Shilov 境界 Σ は原点 0 の N_D 軌道であったから，$\mathcal{C}_\beta(0) = -e$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\beta(\Sigma) &= \mathcal{C}_\beta(N_D \cdot 0) = (\mathcal{C}_\beta \circ N_D \circ \mathcal{C}_\beta^{-1}) \cdot (-e) \subset \mathsf{G} \cdot (-e) = \Sigma_{\mathcal{D}_\beta} \\ &= \mathsf{K} \cdot (-e) \subset \{z \in Z\,;\, \|z\|_\beta = \|e\|_\beta\}.\end{aligned}$$

これは明らかに (5.5) を意味する．

§6. 結論

第 4 節と第 5 節の結果をまとめると：

定理 6.1 ([32]). ノルム等式 $\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|_\omega^2 = \langle\, \Psi_\omega, \alpha_{\mathbf{d+b}}\,\rangle$ が任意の $\zeta \in \Sigma$ に対して成り立つための必要十分条件は，次の (1), (2) が成立することである：
(1) D は対称である．
(2) $\omega|_{\mathfrak{n}}$ は $\beta|_{\mathfrak{n}}$ の正の定数倍である．

これと定理 3.4 より，次の定理を得る．

定理 6.2 ([32]). 任意に固定された $\zeta \in \Sigma$ に対して，$\mathcal{L}_\omega P_\zeta^G = 0$ が成り立つための必要十分条件は，D が対称であって，$\omega|_{\mathfrak{n}}$ が $\beta|_{\mathfrak{n}}$ の正の定数倍となっていることである．

定理 6.2 は序文で引用した Hua–Look, Korányi, Xu による定理 A より特に次の点で強くなっている：非対称 Siegel 領域では，Hua 流に定義した Poisson 核は，いかなる標準的なエルミート計量による Laplace–Beltrami 作用素でも消えない（調和でない）．

参 考 文 献

[1] J. Arazy and G. Zhang, *L^q-estimates of spherical functions and an invariant mean-value property*, Integral Equations Operator Theory, **23** (1995), 123–144.

[2] H. Asano, *On the irreducibility of homogeneous convex cones*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **15** (1968), 201–208.

[3] E. Damek, A. Hulanicki and R. Penney, *Admissible convergence for the Poisson–Szegö integrals*, J. Geom. Anal., **5** (1995), 49–76.

[4] J. E. D'Atri and J. Dorfmeister, *Flat totally geodesic submanifolds of quasisymmetric Siegel domains*, Geom. Dedicata, **28** (1988), 321–336.

[5] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister and Zhao Yan Da, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math., **120** (1985), 295–326.

[6] J. E. D'Atri and I. Dotti Miatello, *A characterization of bounded symmetric domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), 531–540.

[7] J. Dorfmeister, *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains*, Amer. J. Math., **102** (1980), 537–563.

[8] J. Dorfmeister, *Homogeneous Siegel domains*, Nagoya Math. J., **86** (1982), 39–83.

[9] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[10] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q. Lu and G. Roos, *Analysis and geometry on complex homogeneous domains*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[11] S. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19-4** (1964), 1–89.

[12] S. Gindikin, *Siegel domains etc...*, Israel Math. Conf. Proc., **2** (1990), 5–17.

[13] E. Hille, *Analytic function theory* II, Ginn and Company, Boston, 1962.

[14] L. K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains*, Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, 1963.

[15] L. K. Hua and K. H. Look, *Theory of harmonic functions in classical domains*, Scientia Sinica, **8** (1959), 1031–1094.

[16] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on Siegel domains*, J. Funct. Anal., **167** (1999), 425–462.

[17] S. Kaneyuki, *On the automorphism groups of homogeneous bounded domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **14** (1967), 89–130.

[18] S. Kaneyuki and M. Sudo, *On Šilov boundaries of Siegel domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **15** (1968), 131–146.

[19] W. Kaup, Y. Matsushima and T. Ochiai, *On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains*, Amer. J. Math., **92** (1970), 475–498.

[20] A. Korányi, *The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains*, Ann. of Math., **82** (1965), 332–350.

[21] A. Korányi, *Holomorphic and harmonic functions on bounded symmetric domains*, in "Geometry of homogeneous bounded domains", CIME, 127–197, Edizioni Cremonese, Rome, 1968.

[22] A. Korányi and E. M. Stein, *H^2 spaces of generalized half-planes*, Studia Math., **44** (1972), 379–388.

[23] A. Korányi and J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math., **81** (1965), 265–288.

[24] J. L. Koszul, *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes*, Canad. J. Math., **7** (1955), 562–576.

[25] O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lecture Notes, Univ. California at Irvine, 1977.

[26] R.-Q. Lu, *Harmonic functions in a class of nonsymmetric domains*, Chinese Math. Acta, **7** (1965), 339–377.

[27] T, Nomura, *Analysis of Berezin transforms*, RIMS Kôkyûroku, **1124** (2000), 106–134.

[28] T. Nomura, *On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory, **11** (2001), 185–206.

[29] T. Nomura, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, Transform. Groups, **6** (2001), 227–260.

[30] T. Nomura, *Berezin transforms and Laplace–Beltrami operators on homogeneous Siegel domains*, Diff. Geom. Appl., **15** (2001), 91–106.

[31] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, To appear in Diff. Geom. Appl.

[32] T.Nomura, *Geometric connection of the Poisson kernel with a Cayley transform for homogeneous Siegel domains*, Preprint, October, 2001.

[33] R. Penney, *The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in* $\mathbb{C}^n$, in "Topics in geometry in memory of Joseph D'Atri", Ed. by S. Gindikin, Birkhäuser, Boston, 1996, 295–313.

[34] R. Penney, *The Paley–Wiener theorem for the Hua system*, J. Funct. Anal., **162** (1999), 323–345.

[35] I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[36] H. Rossi, *Lectures on representations of groups of holomorphic transformations of Siegel domains*, Lecture Notes, Brandeis Univ., 1972.

[37] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324–389.

[38] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer, Berlin, 1980.

[39] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo–Princeton, 1980.

[40] A. Unterberger and H. Upmeier, *The Berezin transform and invariant differential operators*, Comm. Math. Phys., **164** (1994), 563–597.

[41] H. Urakawa, *On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 209–226.

[42] S. Vagi, *Harmonic analysis on Cartan and Siegel domains*, In "Studies in harmonic analysis (Proc. Conf., DePaul Univ., Chicago, Ill., 1974)", 257–309. MAA Stud. Math., **13**, Math. Assoc. Amer., Washington, D.C., 1976.

[43] È. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[44] J. A. Wolf, *Fine structure of Hermitian symmetric spaces*, In "Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970), pp. 271–357. Pure and App. Math., Vol. **8**, Dekker, New York, 1972.

[45] Xu Yichao, *On the Bergman kernel function of homogeneous bounded domains*, Scientia Sinica, Special Issue (II) (1979), 80–90.

[46] Xu Yichao, *On the classification of the homogeneous bounded domains*, in "Advances in science of China, Mathematics, Vol. 2", Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1986, 105–137.