等質開凸錐体 と 基本相対不変式

野村隆昭（九大数理）

森本先生御退官記念研究集会
（於：奈良女子大学）

2008 年 3 月 18 日

等質開凸錐体 (Open Convex Cones)

- 内積を持つ実ベクトル空間の中の

　　開集合 (open) ＋ 凸集合 (convex) ＋ 錐 (cone)

　　＋ 直線を含まない

V：内積を持つベクトル空間,　　$V \supset \Omega$：開凸錐体

- $G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$：$\Omega$ の線型同型群

  $GL(V)$ の閉部分群として Lie 群になっている（線型 Lie 群）

- Ω が等質 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G(\Omega) \curvearrowright \Omega$：推移的

例： $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \supset \Omega := \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++}$ ：正定値実対称行列

$GL(r, \mathbb{R}) \curvearrowright \Omega$ by $GL(r, \mathbb{R}) \times \Omega \ni (g, x) \mapsto gx\,{}^t g \in \Omega$

これは自己双対な等質開凸錐体（対称錐）の例になっている.

Ω が 自己双対 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 必要ならば適当な内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に取り替えることにより

$$\Omega = \Omega^* := \left\{ y \in V\ ;\ \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \right\}$$

（内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対開凸錐体）

対称錐 $\rightleftarrows$ Euclid 型 Jordan 代数

$\Omega \rightleftarrows V$：ambient VS（$\equiv$ ref. pt. の接空間）に入る代数構造

<u>既約対称錐のリスト</u>：

$\Omega = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}), \quad A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$

$\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})$

$\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})$

$\Omega = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$

$\Omega = \Lambda_n \subset V = \mathbb{R}^n$（$n$次元 Lorentz 錐）

<u>自己双対でない等質開凸錐体</u>： Vinberg が最初に例を挙げた (1960)

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \ ; \ x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \supset \Omega := \left\{ x \in V \ ; \ \begin{array}{r} x_1 > 0 \\ x_1 x_3 - x_2^2 > 0 \\ x_1 x_5 - x_4^2 > 0 \end{array} \right\}$$

これは自己双対でない等質開凸錐体で最低次元のものである

<u>10次元以下の既約等質開凸錐体の分類</u>： Kaneyuki–Tsuji (1974)

線型同型を除いて **135** 個ある

その内自己双対なものは **12** 個

$\mathbb{R}_{>0}$， $\Lambda_n \in \mathbb{R}^n$ (Lorentz cones with $\dim = 3, 4, \ldots, 10$),

$\mathrm{Sym}(3,\mathbb{R})^{++}$， $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{C})^{++}$， $\mathrm{Sym}(4,\mathbb{R})^{++}$

Vinberg の理論 (1963) より,

等質開凸錐体 $\rightleftarrows$ 単位元を持つ Clan

$\Omega \rightleftarrows V$：ambient VS（$\equiv$ ref. pt. の接空間）に入る代数構造

- 対称錐の場合：$G(\Omega)$ は reductive

V の Jordan 代数構造：$V \equiv T_e(\Omega) \equiv$「Cartan 分解 $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$」の $\mathfrak{p}$ 部分
(積は可換)

- 一般の等質開凸錐体の場合：$G(\Omega)$ の岩澤部分群が単純推移的に作用する

V の Clan 構造：$V \equiv T_e(\Omega) \equiv \mathfrak{g}(\Omega)$ の岩澤部分代数 $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$
(積は非可換)

Ω：等質開凸錐体，　$G(\Omega)$：Ω の線型同型群，　S：$G(\Omega)$ の岩澤部分群
S は分裂可解 Lie 群で，Ω に単純推移的に働く．

f：Ω 上の函数
f が（S に関して）相対不変 $\overset{\text{def}}{\iff}$ S の 1 次元表現 χ が存在して，
$f(gx) = \chi(g)f(x)$　(for all $g \in S$, $x \in \Omega$).

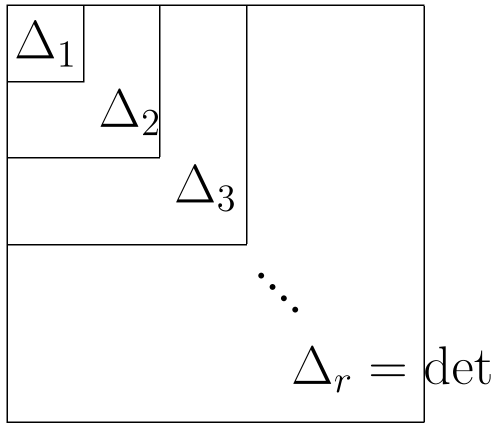
定理 1 (Ishi 2001).
$\exists \Delta_1, \ldots, \Delta_r$ $(r := \mathrm{rk}(\Omega))$：$V$ 上の既約な相対不変多項式函数 s.t
V 上の任意の相対不変多項式函数 $P(x)$ は

$$P(x) = c\,\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (c \neq 0,\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0})$$

と表される．

定理 2 (Ishi–N., preprint 2006 accepted for publication).
W：Clan V の複素化，　$R(w)$：W での右かけ算作用素 by $w \in W$
Then, $\det R(w)$ の既約因子は $\Delta_1(w), \ldots, \Delta_r(w)$ である．

例：$\Omega = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$

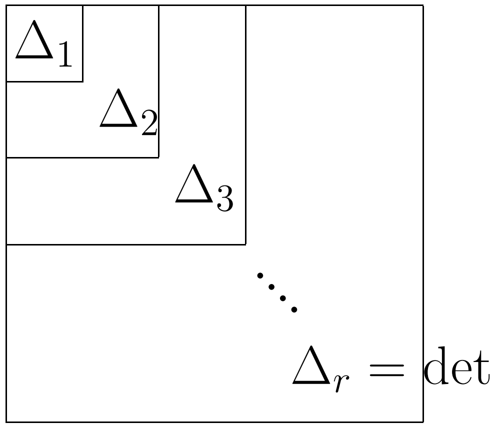


Clan としての V：積は $x\Delta y = \underline{x}\,y + y\,{}^t(\underline{x})$．ただし $x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ に対して，

$$\underline{x} := \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phantom{\frac12 x_{11}} & \phantom{\frac12 x_{22}} & i & & \phantom{\frac12 x_{nn}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & 0 & \\ & \frac{1}{2}x_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & x_{ji} & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2}x_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \quad (i<j).$$

この場合は実は $\det R(y) = \Delta_1(y)\cdots\Delta_r(y)$

例：$\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})$



Clan としての V：積は $x \Delta y = \underline{x}\, y + y\, (\underline{x})^*$．ただし $z^* = {}^t\overline{z}$

$r = 2$ のとき，$\det R(y) = \Delta_1(y)^2 \Delta_2(y)$

• 一般に既約対称錐では，$\Delta_k(y)$ は k 次の Jordan algebra principal minor.
ゆえに $\deg\bigl(\Delta_1(y) \cdots \Delta_r(y)\bigr) = 1 + \cdots + r = \frac{1}{2} \cdot r(r+1) = r + \frac{1}{2} \cdot r(r-1)$.

• 一方 $\deg \det R(y) = \dim_{\mathbb{R}} V = r + \frac{d}{2} \cdot r(r-1)$．ここで
$d = 1$ for $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$，$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ for $\mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$,
$r = 2$, $d = n - 2$ for $\Omega = \Lambda_n$ $(n \geqq 3)$.

命題 3. $w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$.

$$\mathrm{Re}\, w \gg 0 \implies \mathrm{Re}\, \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \ldots, r).$$

ただし $\Delta_0(w) \equiv 1$ とする.

この命題は，次の二つの補題からの帰結.

補題 4. $w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ かつ $\Delta_k(w) \neq 0$ *for* $k = 1, \ldots, r$ とする

$$\implies w = na\,{}^t n, \quad \textit{with } n = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_r \end{pmatrix}$$

そして，各 a_k は $a_k = \dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)}$ $(k = 1, \ldots, r)$ で与えられる.

補題 5. n, a：上の補題に同じ.

$$\mathrm{Re}(na\,{}^t n) \gg 0 \implies \mathrm{Re}\, a_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, r).$$

命題$\mathbf{3}$の既約対称錐への一般化:

Ω：既約対称錐 $(\mathrm{rk}(\Omega) = r) \subset V$：Euclid 型 Jordan 代数
$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$：Jordan algebra principal minors （基本相対不変式）

定理 6 (Ishi–N.). $w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \ldots, r)$.

注意. 定理6で 「 $\Longleftarrow$ 」は成立しない. 実際, $\Omega = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})^{++}$ とする. $\mathrm{Re}\,a_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,a_2 > 0$ とし, $\xi \in \mathbb{R}$ は $|\xi| > |a_1|^{-1}\sqrt{(\mathrm{Re}\,a_1)(\mathrm{Re}\,a_2)}$ をみたすとすると

$$w := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & ia_1\xi \\ ia_1\xi & -a_1\xi^2 + a_2 \end{pmatrix} \notin \Omega + iV.$$

$\mathrm{Re}\,w = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,a_1 & -(\mathrm{Im}\,a_1)\xi \\ -(\mathrm{Im}\,a_1)\xi & -(\mathrm{Re}\,a_1)\xi^2 + \mathrm{Re}\,a_2 \end{pmatrix}$ に注意.
ここでもちろん, $\Delta_1(w) = a_1$, $\Delta_2(w) = a_1 a_2$ である.

命題3の一般の等質開凸錐体での定式化：

Ω：既約等質開凸錐体 $(\mathrm{rk}(\Omega) = r) \subset V$：Clan
$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$：基本相対不変式

問題. $w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \ldots, r)$?

直ちにわかること：
$w \in \Omega \cap \{$対角型$\}$ で考察するとき，$\deg \Delta_k(w)$ と $\deg \Delta_{k-1}(w)$ の gap が 0 であったり，2 以上あったりするとダメ.

対角型の説明：
$\exists E_1, \ldots, E_r \in \overline{\Omega}$：原始べき等元の完全直交系（和が単位元に等しい）
対角型の元：$c_1 E_1 + \cdots + c_r E_r$ ($c_k > 0$ for $\forall k = 1, \ldots, r$)

問題. $w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \ldots, r)$?

問題の解答：

(1) 自己双対でない既約等質開凸錐体では，大抵の場合「No」.

(2) いつでも No であれば，それは自己双対性の特徴付けになるが，
それもダメ.

(3) 10次元以下で，自己双対でない既約等質開凸錐体は，線型同型を除いて **123** 個あるが，その中で **1** 個だけ，問題に Yes の解答を与える.
その開凸錐体の次元は **8** である.

(4) 以下では，その開凸錐体を系列化して，任意階数（ただし $\geqq 3$）のものを与える.

I_m：m 次の単位行列
$\mathbb{R}^{rm}$：サイズが rm の縦ベクトル全体と見る.

$$V := \left\{ x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array} \right) \; ; \; x_0 \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}),\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{rm},\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note $V \subset \mathrm{Sym}(rm+1, \mathbb{R})$.
$m = r = 2$ のとき，x は次の 5 次の正方行列である：

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{21} & 0 & y_{11} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{21} & y_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 & y_{21} \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{22} & y_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{21} & y_{22} & z \end{pmatrix} \qquad (\dim V = 8).$$

• 開凸錐体 Ω としては，V に属する行列で正定値なもの全体をとる：

$$\boxed{\Omega := \{x \in V \; ; \; x \gg 0\}} \qquad (\mathrm{rk}(\Omega) = r + 1).$$

<u>仮定</u>： $m \geqq 2$, $r \geqq 2$:
($m = 1 \implies \Omega = \mathrm{Sym}(r+1, \mathbb{R})^{++}$, $\quad r = 1 \implies \Omega = \Lambda_{m+2}$)

$\underline{\Omega\ \text{の等質性}}$：

$$A := \left\{ a = \left(\begin{array}{c|c} a_0 \otimes I_m & 0 \\ \hline 0 & a_{r+1} \end{array} \right) \ ; \ \begin{array}{l} a_0 := \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_r] \ \ \text{with} \\ a_1 > 0, \ldots, a_r > 0 \text{ and } a_{r+1} > 0 \end{array} \right\},$$

$$N := \left\{ n = \left(\begin{array}{c|c} n_0 \otimes I_m & 0 \\ \hline {}^t\boldsymbol{\xi} & 1 \end{array} \right) \ ; \ \begin{array}{l} n_0 \text{ is stricly lower triangular in } GL(r, \mathbb{R}), \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{rm} \end{array} \right\}.$$

$H := N \ltimes A \curvearrowright \Omega$ by $\quad H \times \Omega \ni (h, x) \mapsto h\, x\, {}^t h \in \Omega$

この作用は単純推移的である：実際 given $x \in \Omega$ に対して，方程式$x = na\,{}^t n$ $(a \in A,\, n \in N)$ は一意的に解ける：

$$a_k = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta_{k-1}(x)} \ (k = 1, 2, \ldots, r+1), \text{ with } \Delta_0(x) \equiv 1 \text{ and}$$

$$\begin{cases} \Delta_k(x) := \Delta_k^0(x_0) & (k = 1, \ldots, r), \\ \Delta_{r+1}(x) := z \det(x_0) - {}^t\boldsymbol{y}({}^{\mathrm{co}}x_0 \otimes I_m)\boldsymbol{y}. \end{cases}$$

${}^{\mathrm{co}}T$：行列 T の余因子行列： $\quad T({}^{\mathrm{co}}T) = ({}^{\mathrm{co}}T)T = (\det T)I.$

- $\deg \Delta_k(x) = k$ に注意 $(k = 1, 2, \ldots, r+1)$.

<u>$\Delta_{r+1}(x)$ を理解するために</u>：

各 $x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array}\right) \in V$ に対して，

$$ {}^{\mathrm{d}}x := \left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & x_{r1} & \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} & \boldsymbol{y}_r \\ \hline {}^t\boldsymbol{y}_1 & \cdots & {}^t\boldsymbol{y}_r & z \end{array}\right), \quad x_0 = (x_{ij}), \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_j \in \mathbb{R}^m $$

$\Delta_{r+1}(x) = z\det(x_0) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} ({}^{\mathrm{co}}x_0)_{ij}\, \boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{y}_j$ であるから，$\Delta_{r+1}(x) = \det {}^{\mathrm{d}}x$.

右辺は，$\det {}^{\mathrm{d}}x$ をあたかも通常の行列式のように展開し，その際に積 ${}^t\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の積は内積と $\boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{y}_j$ であると理解する.

- $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x), \Delta_{r+1}(x)$ は基本相対不変式である.

$\delta_k(x)$ $(k = 1, \ldots, rm+1)$: $x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array}\right) \in V$ の k-th principal minor.

そうすると

$$\begin{cases} \delta_{km+j}(x) = \Delta_k(x)^{m-j}\Delta_{k+1}(x)^j \quad (0 \leqq k \leqq r-1,\, 1 \leqq j \leqq m), \\ \delta_{rm+1}(x) = \Delta_r(x)^{m-1}\Delta_{r+1}(x). \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{x \in \Omega \iff \Delta_j(x) > 0 \text{ for any } j = 1, \ldots, r+1.}$$

これは一般にも言えることである (Ishi 2001).

以下 Δ_k $(k = 1, \ldots, r+1)$ を，自然に $W := V_{\mathbb{C}}$ 上の正則な多項式函数と見る.

命題 7. $\quad w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, r+1).$

ある10次元の等質開凸錐体：

10次元以下の，自己双対でない既約開凸錐体の内，

$$\deg \Delta_k(x) = k \quad (k = 1, 2, \ldots r)$$

となるものは **2**個ある．**1**個は既出の 8 次元のもの．もう一つは ……

$V := \{x = (x^{(1)}, x^{(2)})\ ;\ \text{with } x^{(1)} \in \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}),\ x^{(2)} \text{ as follows}\}$

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{21} & x_{22} & x_{32} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_{11} I_m & x_{21}\boldsymbol{e}_m & \boldsymbol{y} \\ x_{21}{}^t\boldsymbol{e}_m & x_{22} & z \\ {}^t\boldsymbol{y} & z & x_{44} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \\ (m \geqq 2). \end{matrix}$$

$$\Omega := \{x \in V\ ;\ x^{(1)} \gg 0,\ x^{(2)} \gg 0\} \quad (\dim \Omega = m + 8),$$

$$\begin{cases} \Delta_1(x) = x_{11}, \qquad \Delta_2(x) = x_{11}x_{22} - x_{21}^2, \qquad \Delta_3(x) = \det x^{(1)}, \\ \Delta_4(x) = (x_{11}x_{44} - \|\boldsymbol{y}\|^2)(x_{11}x_{22} - x_{21}^2) - (x_{11}z - x_{21}y_m)^2. \end{cases}$$

Note: $\deg \Delta_k(x) = k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

この Ω は次の性質は持たない：

$$w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

$\underline{x^{(2)}\text{ の部分だけを取り出すと ……}}$

$$x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_{11} I_m & x_{21} \boldsymbol{e}_m & \boldsymbol{y} \\ x_{21}\, {}^t\boldsymbol{e}_m & x_{22} & z \\ {}^t\boldsymbol{y} & z & x_{44} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$$

<u>双対錐に線型同型だが自己双対ではない既約等質開凸錐体の系列</u>：

- Ω が自己双対 $\iff$ $\exists T$：正定値自己共役作用素 s.t. $T(\Omega) = \Omega^*$
  $\left(\Omega^* := \left\{ y \in V \,;\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}\right)$
- 正定値の範囲では $T(\Omega) = \Omega^*$ となる T は存在しないが，正定値という条件をはずせば $T(\Omega) = \Omega^*$ となる T がみつかる．
- 既約でなくてもよいのであれば，単に $\Omega \oplus \Omega^*$ をとればよいだけ．
- 10 次元以下の既約等質開凸錐の分類 [Kaneyuki–Tsuji] は線型同型を除いて記述されているので，自己双対でない開凸錐体の双対錐が自分自身ということになっている．
- Faraut–Korányi の本の演習問題では，Vinberg 錐の非自己双対性を，双対錐に線型同型でないという証明で示すよう，ヒントが与えられている．

$$\boldsymbol{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}, \qquad I_{m+1}$$ ：$(m+1)$次単位行列

$$V := \left\{ x := \left(\begin{array}{c|cc} x_1 I_{m+1} & \boldsymbol{e}\,{}^t\boldsymbol{x}' & \boldsymbol{\xi} \\ \hline \boldsymbol{x}'\,{}^t\boldsymbol{e} & X & \boldsymbol{x}'' \\ {}^t\boldsymbol{\xi} & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array} \right) \; ; \; \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}) \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{m+1}, \ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^m, \ \boldsymbol{x}'' \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}$$

$$V \subset \mathrm{Sym}(2m+2, \mathbb{R}), \qquad \boxed{\Omega := \{x \in V \; ; \; x \gg 0\}}$$

$m = 1$の場合： $$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & 0 & \xi_2 \\ x' & 0 & X & x'' \\ \xi_1 & \xi_2 & x'' & x_2 \end{pmatrix}$$

基本相対不変式： 変数$x = \left(\begin{array}{c|cc} x_1 I_{m+1} & \boldsymbol{e}\,{}^t\boldsymbol{x}' & \boldsymbol{\xi} \\ \hline \boldsymbol{x}'\,{}^t\boldsymbol{e} & X & \boldsymbol{x}'' \\ {}^t\boldsymbol{\xi} & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array}\right) \in V$ に対して，

$$\Delta_1(x) := x_1,$$

$$\Delta_j(x) := \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}'_{j-1} \\ \hline \boldsymbol{x}'_{j-1} & X_{j-1} \end{array}\right) \qquad (j = 2, \ldots, m+1)$$

$$\left(X_k := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'_k := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \right),$$

$$\Delta_{m+2}(x) := x_1 \det \begin{pmatrix} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ \boldsymbol{x}' & X & \boldsymbol{x}'' \\ \xi_1 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{pmatrix} - \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - \xi_1^2\right) \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' \\ \hline \boldsymbol{x}' & X \end{array}\right)$$

$$\left({}^t\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{m+1})\right).$$

V の内積：$x = \left(\begin{array}{c|cc} x_1 I_{m+1} & \boldsymbol{e}\,{}^t\boldsymbol{x}' & \boldsymbol{\xi} \\ \hline \boldsymbol{x}'\,{}^t\boldsymbol{e} & X & \boldsymbol{x}'' \\ {}^t\boldsymbol{\xi} & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array}\right)$, $y = \left(\begin{array}{c|cc} y_1 I_{m+1} & \boldsymbol{e}\,{}^t\boldsymbol{y}' & \boldsymbol{\eta} \\ \hline \boldsymbol{y}'\,{}^t\boldsymbol{e} & Y & \boldsymbol{y}'' \\ {}^t\boldsymbol{\eta} & {}^t\boldsymbol{y}'' & y_2 \end{array}\right)$

$\langle\, x \,|\, y \,\rangle := x_1 y_1 + \mathrm{tr}(XY) + x_2 y_2 + 2(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x}'' \cdot \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})$

$$\Omega^* := \left\{ y \in V \,;\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}$$

V 上の線型作用素 T_0 を次式で定義：　$T_0 x = \left(\begin{array}{c|cc} x_2 I_{m+1} & \boldsymbol{e}\,{}^t\boldsymbol{x}'' & \boldsymbol{\xi} \\ \hline \boldsymbol{x}''\,{}^t\boldsymbol{e} & JXJ & \boldsymbol{x}' \\ {}^t\boldsymbol{\xi} & {}^t\boldsymbol{x}' & x_1 \end{array}\right)$

ただし $J \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ は次で与えられる行列：　$J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

定理 8.　$\Omega^* = T_0(\Omega)$.