Jordan 代数と解析学

野　村　隆　昭　　　　　　　　　　京 大 理

§1. Jordan 代数.

Jordan 代数は, [**JNW**] により "r-number algebra" という名で導入されたもので, Jordan 代数という呼称そのものは [**A**] に始まる. 容易にわかるように, 2つのエルミート行列 A, B の積 AB が再びエルミートになることと $AB = BA$ とは同値なので, エルミート行列全体は通常の行列の積では閉じていない. しかし新たに積 $\circ$ を, $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$ で定義すると, 結合法則は失われるものの, エルミート行列全体はその積で algebra になっている. 都合の良いことに, べきに関してはどちらの積でも同じである. また, $ABA = 2A \circ (A \circ B) - A^2 \circ B$ となっていることにも注意.

$\boxed{\textbf{定義}}$. 実ベクトル空間 V に双線型な積 $x, y \mapsto xy$ が定義されていて, 次の (i), (ii) が成り立つとき, V を実 <u>Jordan 代数</u>という :

(i) $xy = yx$, (ii) $x^2(xy) = x(x^2y)$.

[**JNW**] で扱ったものは, 有限次元の形式的実 ($i.e.$, $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$) な Jordan 代数で, 彼らはそれらが単純なものの直和であり, 単純なものは次の5種であることを示した :

$$\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}), \qquad \mathrm{Her}(r, \mathbb{C}), \qquad \mathrm{Her}(r, \mathbb{H}), \qquad \mathrm{Her}(3, \mathbf{Cay}), \qquad \mathcal{S}(W).$$

ここで, Sym は対称, Her はエルミートを表し, $\mathcal{S}(W)$ は実内積空間 W から次のようにして得られる Jordan 代数である :

ベクトル空間としては $\mathcal{S}(W) = \mathbb{R} \oplus W$ で, 積は

$$(\lambda + w)(\lambda' + w') = (\lambda\lambda' + \langle w|w'\rangle) + \lambda w' + \lambda' w.$$

さて, 単位元 e を持つ有限次元 Jordan 代数を V とする. 以下では, x を乗ずるという作用素を $L(x)$ で表す : $L(x)y := xy$. Jordan 代数 V は非結合的であるが, べきに関しては指数法則が成り立っている (この意味で, Jordan 代数は

power-associative algebra になっている). そして, V 上に j 次の斉次多項式函数 $a_j\,(1 \leqq j \leqq r)$ が存在して

$$m_x(\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x)$$

が, V のある Zariski-dense な開集合に属する $\forall x$ に対して, x の最小多項式になることが知られている. 以下では,

$$\mathrm{tr}(x) = a_1(x), \qquad \det(x) = a_r(x)$$

とおき, それぞれ元 x の trace, determinant ということにする. また, r を V の degree という.

$\boxed{\textbf{命題}\ 1.1.}$ 次の (1) ∼ (3) は同値 :

(1) Vは形式的実.
(2) 対称双線型形式 $x, y \mapsto \mathrm{tr}\, L(xy)$ は正定値.
(3) 対称双線型形式 $x, y \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ は正定値. ∎

この命題により, 形式的実 Jordan 代数にはつねに, $\langle x \,|\, y\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ で内積を入れておく. このとき, 任意の $x \in V$ に対して $L(x)$ は自己共役作用素である. 以下では, $P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2)$ で定義される作用素も扱う. 一般に, $P(xy) \neq P(x)P(y)$ であるが,

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x), \qquad P(x^n) = P(x)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ.

以下, Jordan 代数 V は有限次元で形式的実であるとする. V は必ず単位元 e を持つ. V の 0 でないべき等元の系 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ が <u>直交系</u> であるとは, $i \neq j$ ならば $c_i c_j = 0$ が成り立つことであり, それが <u>完全</u> であるとは, $c_1 + \cdots + c_k = e$ となることである.

V の各元 x はスペクトル分解を持つ. すなわち, x に対して 0 でないべき等元の完全直交系 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ と実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k\,(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k)$ が存在して, $x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k$ と表される. それらは一意的で, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を x の <u>固有値</u> という.

また, 0 でないべき等元は原始べき等元の直交和に分解できる. 特に単位元 e は原始べき等元の直交和として $e = e_1 + \cdots + e_r$ と, 分解できることがわかる. ここ

で, r は原始べき等元の完全直交系のとり方によらず一定で, V の 階数 と呼ばれ, 上述の degree に一致する.

§2. 対称錐.

内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間 V の開凸錐 Ω が 対称錐 であるとは, Ω の双対錐 Ω^* が Ω に一致するときをいう. ここで,

$$\Omega^* := \{\, y \in V\ ;\ \langle y\,|\,x\rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

対称錐という呼称は A.Koranyi による. [**V**] により, 任意の対称錐は形式的実 Jordan 代数の正錐として表される.

そこで, V を有限次元の形式的実 Jordan 代数とする. e と x で生成される V の subalgebra を $\mathbb{R}[\,x\,]$ で表す. $\mathbb{R}[\,x\,]$ は結合的であることに注意. 元 x が 可逆 であるとは, x が subalgebra $\mathbb{R}[\,x\,]$ で可逆なときをいう. 可逆元の全体を $V^\times$ で表す. $x \in V^\times$ の逆元 x^{-1} は, $P(x)^{-1}x$ で与えられる. また, $x \in V^\times \Leftrightarrow \det(x) \neq 0 \Leftrightarrow \det P(x) \neq 0$ であること, 及び $P(x^{-1}) = P(x)^{-1}$ にも注意しておく.

命題 2.1. 次の６つの V の部分集合は同一である :

(1) $\mathrm{Int}\,\{\, x^2\,;\, x \in V\}$ (Int は集合の内部).
(2) $\{\, x^2\,;\, x \in V^\times\,\}$.
(3) $V^\times$ の e の連結成分.
(4) $\{\, x \in V\,;$ 作用素 $L(x)$ は正定値$\}$.
(5) $\{\, x \in V\,;\, x$ の固有値はすべて正$\,\}$.
(6) $\exp(V)$. ∎

この命題で定義される V の部分集合 (V の正錐) を Ω で表すと, Ω は V の対称錐であり, 任意の対称錐がこのようにして得られるのである. $x \in \Omega$ ならば, $P(x)$ は正定値であることも注意しておこう. また, $\forall x \in \Omega$ は unique な平方根 $x^{1/2} \in \Omega$ を持つ.

さて, V 上の実一般線型群を $GL(V)$ で表し,

$$G(\Omega) := \{\, g \in GL(V)\,;\, g\Omega = \Omega\,\}$$

とおく. $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であるから, $G(\Omega)$ は Lie 群になる. $\Omega = \Omega^*$ なので, $G(\Omega)$ は reductive な Lie 群である. さらに, $x \in V^\times$ なら $P(x) \in G(\Omega)$ が

いえる．任意の $x \in \Omega$ に対して, $P(x^{1/2})e = x$ ゆえ, $\Omega = G(\Omega)e$ である．そして, $\sigma_x(u,v) := \langle P(x)^{-1}u \,|\, v\rangle$ $(x \in \Omega,\, u, v \in V)$ は Ω に $G(\Omega)$-不変な Riemann 構造を定義し, 写像 $x \mapsto x^{-1}$ は, e を一意固定点とする involutive isometry (*i.e.*, e での symmetry) となっている．かくして, Ω は Riemann 対称空間になっている．

以下, V は単純で階数が r であるものとする．V の自己同型がなす群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す．すなわち,

$$\mathrm{Aut}(V) := \{\, g \in GL(V)\,;\, g(xy) = (gx)(gy) \quad \text{for}\,\forall x, y \in V \,\}.$$

$\mathrm{Aut}(V)$ は V の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する直交群 $O(V)$ の閉部分群である．従って, $\mathrm{Aut}(V)$ 自身コンパクト Lie 群である．V 上の $\mathrm{Aut}(V)$-不変な多項式函数のなす代数を $\mathcal{P}(V)^{\mathrm{Aut}(V)}$ で表す．$\mathcal{P}(V)^{\mathrm{Aut}(V)}$ については次の結果がある．

定理 2.2. [**Hi2**]　r 個の V 上の多項式函数

$$f_j(x) := \mathrm{tr}(x^j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

は $\mathcal{P}(V)^{\mathrm{Aut}(V)}$ の代数的に独立な生成元である．∎

この定理を使って, Ω 上の $G(\Omega)$-不変な微分作用素のなす代数 $\mathbf{D}(\Omega)^{G(\Omega)}$ の代数的に独立な生成元を explicit に書き下せる．まず, $G(\Omega)$ を $V \times V$ に $g \cdot (x, y) := (gx, {}^t g^{-1} y)$ で作用させる．ここで, ${}^t g$ は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する g の transpose である．$V \times V$ 上の $G(\Omega)$-不変な多項式函数のなす algebra を $\mathcal{P}(V \times V)^{G(\Omega)}$ で表す．

定理 2.3. [**No3**]　各 $f \in \mathcal{P}(V)^{\mathrm{Aut}(V)}$ に対して,

$$\Phi_f(x, y) := f(P(x^{1/2})y) \qquad (x \in \Omega,\, y \in V)$$

とおくと, Φ_f は $V \times V$ 上の多項式函数に一意的に拡張される．そして, 写像 $f \mapsto \Phi_f$ は $\mathcal{P}(V)^{\mathrm{Aut}(V)}$ から $\mathcal{P}(V \times V)^{G(\Omega)}$ の上への algebra 同型を与える．∎

$G(\Omega)$ の V への作用は線型であったから, 上記の $G(\Omega)$ の $V \times V$ への作用を $\Omega \times V$ に制限すると, それは Ω の余接束 $T^*(\Omega) \approx \Omega \times V$ への $G(\Omega)$ の自然な作用に他ならない．$V \times V$ 上の各多項式函数 p に対して, 微分作用素 $p(x, \partial/\partial x)$ を

$$p(x, \partial/\partial x)e^{\langle x|y\rangle} = p(x, y)e^{\langle x|y\rangle}$$

で定義する. V の ONB をとって, $p(x,y)=\sum a_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$ と表すとき, $p(x,\partial/\partial x)=\sum a_{\alpha\beta}x^{\alpha}(\partial/\partial x)^{\beta}$ である. 以下, 定理 2.2 の f_j に対して, $p_j=\Phi_{f_j}$ とおく. p_j の explicit な形は次の如し.

$$p_{2m-1}(x,y):=\langle (P(x)P(y))^{m-1}\,x\,|\,y\rangle,$$
$$p_{2m}(x,y):=\langle (P(x)P(y))^{m-1}\,x\,|\,(y\Box x)y\rangle.$$

ただし, $y\Box x=L(yx)+[L(y),L(x)]$ (cf. §7, 例 2).

$\boxed{\textbf{定理}\ 2.4.\ [\mathbf{No3}]}$ r 個の微分作用素 $p_j(x,\partial/\partial x)$ $(j=1,2,\ldots,r)$ は, Ω 上の $G(\Omega)$-不変な微分作用素のなす代数 $\mathbf{D}(\Omega)^{G(\Omega)}$ の代数的に独立な生成元である. ▮

$G(\Omega)$-不変な Riemann 構造 σ に関する Ω 上の Laplace-Beltrami 作用素 $\varDelta$ は

$$\varDelta=p_2(x,\partial/\partial x)+\frac{n}{r}\cdot p_1(x,\partial/\partial x)\qquad (n=\dim V)$$

と表される. ここで, $p_1(x,y)=\langle x\,|\,y\rangle$ であったから, $p_1(x,\partial/\partial x)$ はいわゆる Euler 作用素である.

§3. 原始べき等元の多様体.

これまでと同じく, V は有限次元の形式的実単純 Jordan 代数とする. べき等元 c に対して, 作用素 $L(c)$ の固有値は高々 0, $\frac{1}{2}$, 1 であって, それらの固有空間を $V_k(c)$ $(k=0,\frac{1}{2},1)$ で表すと,

$$V=V_0(c)\oplus V_{1/2}(c)\oplus V_1(c)\qquad (直交直和)$$

となる. これをべき等元 c に関する V の Peirce 分解 という. $V_k(c)$ への直交射影を $E_k(c)$ で表す. べき等元 c が 原始べき等元であるための必要十分条件は, $V_1(c)=\mathbb{R}c$ となることである. V の原始べき等元の全体を $\mathfrak{J}_1(V)$ または $\mathfrak{J}_1$ で表す. $\|c\|^2=\langle c|e\rangle=\mathrm{tr}(c)=1$ ゆえ, $\mathfrak{J}_1$ は V の単位球面の部分集合である. さらに, コンパクト Lie 群 $\mathrm{Aut}(V)$ は $\mathfrak{J}_1$ に推移的に作用しており, また $\mathfrak{J}_1$ は連結である.

$\boxed{\textbf{定理}\ 3.1.\ [\mathbf{Hi1}]}$ (1) $\mathfrak{J}_1$ に Riemann 多様体の構造が入って, 包含写像 $\mathfrak{J}_1\hookrightarrow V$ は embedding になっている.
(2) 点 $c\in\mathfrak{J}_1$ での接空間 $T_c(\mathfrak{J}_1)$ は $V_{1/2}(c)$ である. また, $\mathfrak{J}_1$ は対称空間であり, $c\in\mathfrak{J}_1$ での symmetry は $P(e-2c)=I-2E_{1/2}(c)$ の $\mathfrak{J}_1$ への制限で与えられる.

(3) $\mathfrak{I}_1$ は階数が１のコンパクト Riemann 対称空間で, 階数１のコンパクト Riemann 対称空間はすべてこのようにして得られる. ∎

§1 での分類に従うと

$$\mathfrak{I}_1(\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})) \approx P(\mathbb{R}^r) \equiv P^{r-1}(\mathbb{R}), \qquad \mathfrak{I}_1(\mathrm{Her}(r,\mathbb{C})) \approx P(\mathbb{C}^r) \equiv P^{r-1}(\mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{I}_1(\mathrm{Her}(r,\mathbb{H})) \approx P(\mathbb{H}^r) \equiv P^{r-1}(\mathbb{H}), \qquad \mathfrak{I}_1(\mathrm{Her}(3,\mathbf{Cay})) \approx P^2(\mathbf{Cay}),$$
$$\mathfrak{I}_1(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \approx S^{n-1}.$$

これらは２点等質空間であり, コンパクトな２点等質空間はこれら階数１のコンパクト Riemann 対称空間で尽きる. $\mathfrak{I}_1$ の無限次元版を §6 で述べる.

§4. 特殊函数.

この節でも V は n 次元で階数が r の形式的実単純 Jordan 代数とする. また, V の CSOPI (Complete System of Orthogonal Primitive Idempotents) $\{c_j\}_{j=1}^r$ を１つ固定する. $V_{jj} = \mathbb{R}c_j$, $V_{ij} = V_{1/2}(c_i) \cap V_{1/2}(c_j)$ $(i < j)$ とおくと, $V = \bigoplus_{i \leqq j} V_{ij}$ は自己共役作用素の可換系 $\{L(c_j)\,;\, j = 1, \ldots, r\}$ の同次固有空間分解になっている (CSOPI $\{c_j\}$ に関する V の Peirce 分解 という）. ここで, $d := \dim V_{ij}$ $(i < j)$ は i, j に依らず一定である. 以下, $V^{(j)} := V_1(c_1 + \cdots + c_j)$ とおく. 各 $V^{(j)}$ は V の subalgebra で, $V^{(1)} \subset \cdots \subset V^{(r)} = V$ となっている. $V^{(j)}$ での determinant を $\det^{(j)}$ で表し, $\Delta_j(x) := \det^{(j)}(E^{(j)}x)$ $(x \in V)$ とおく. ただし, $E^{(j)} := E_1(c_1 + \cdots + c_j)$. Δ_j を j 次の principal minor と呼ぶ. 明らかに Δ_j は V 上の j 次斉次多項式函数である. 以後, 各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して,

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) := \Delta_1(x)^{m_1 - m_2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{m_{r-1} - m_r} \Delta_r(x)^{m_r}$$

とおく.

さて, $G = G(\Omega)^\circ$, $K = \mathrm{Aut}(V)^\circ$ (それぞれ, 単位元の連結成分) とする. V 上の複素数値多項式函数の全体 $\mathcal{P}(V)$ に Fischer 内積 $(p\,|\,q)_F := p(\partial/\partial x)\overline{q(x)}\Big|_{x=0}$ を入れておく. $\mathcal{P}(V)$ は $p \mapsto p \circ g^{-1}$ $(p \in \mathcal{P}(V),\, g \in GL(V))$ により $GL(V)$-module であり, これを G に制限して G-module を得る. この G-module の既約分解は以下のように記述される.

$\mathbb{Z}_{++}^r = \{\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r\ ;\ m_1 \geqq \cdots \geqq m_r \geqq 0\}$ とおき, 各 $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{++}^r$ に対して, $\Delta_{\mathbf{m}} \circ g^{-1}$ $(g \in G)$ で張られる $\mathcal{P}(V)$ の部分空間 (有限次元である) を

$\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ とする. $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ は $\Delta_{\mathbf{m}}$ を highest weight vector とする既約 G-module であって,

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r_{++}} \mathcal{P}_{\mathbf{m}} \qquad \text{(直交直和)}$$

となる. さらに, $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$ ならば, 2 つの G-modules $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ と $\mathcal{P}_{\mathbf{m}'}$ は同値ではない. 従って, G の V への作用は multiplicity free となっているのである.

規格化された K の Haar 測度 dk を用いて,

$$\varphi_{\mathbf{m}}(x) := \int_K \Delta_{\mathbf{m}}(kx)\,dk \qquad (x \in V)$$

とおく. $\varphi_{\mathbf{m}}$ は, 定数倍を除いて一意な, $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ に属する K-不変な多項式函数である. $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ では, A. T. James 等によって多変量解析で用いられてきた zonal polynomial (cf. [**Mu**], [**Ta**]) に定数倍を除いて等しく, $V = \mathrm{Her}(r,\mathbb{C})$ では Schur 函数 (cf. [**Ma**]) に対角行列上では定数倍を除いて一致している. そこで, [**Mu**] でもなされているように, V 上の (あるいは $V_{\mathbb{C}}$ 上の) K-不変な解析函数の展開に, 直交基底として $\{\varphi_{\mathbf{m}}\ ;\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r_{++}\}$ を用いるのである. これの妥当性は, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\{\,x$ の固有値$\,\} \subset (-1,1)$ のとき,

$$\det(e-x)^{-\alpha} = \sum (\alpha)_{\mathbf{m}} \frac{\varphi_{\mathbf{m}}(x)}{\|\varphi_{\mathbf{m}}\|_F^2} \qquad [\mathbf{FK2}]$$

と

$$(1-t)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m}{m!}\,t^m = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha)_m \frac{t^m}{\|t^m\|_F^2} \qquad (|t|<1)$$

との類似性から理解されよう. ただし, $\det(e-x)^{-\alpha}$ の展開式に現れる記号 $(\alpha)_{\mathbf{m}}$ (通常の Pochhammer の記号 $(\alpha)_m = \Gamma(\alpha+m)/\Gamma(\alpha)$ の類似物) の説明がまだであった. まず, 対称錐 Ω に付随する Gindikin の Gamma 函数を Γ_Ω とする :

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) := \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)}\,\Delta_{\mathbf{s}}(x)\,(\det x)^{-n/r}\,dx.$$

ただし, dx は V 上の Lebesgue 測度で, $(\det x)^{-n/r}\,dx$ は Ω 上の G-不変測度になっている. 積分は, $\mathrm{Re}\,s_j > (j-1)d/2\ \ (j=1,\ldots,r)$ で絶対収束していて, 実は通常の Gamma 函数を用いて

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = (2\pi)^{(n-r)/2}\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(s_j - \frac{(j-1)d}{2}\right) \qquad (\text{recall } d = \dim V_{ij}\ \ (i<j)).$$

と表される．また, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $(\lambda) = (\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{C}^r$ とおく．このとき, 簡単の為 $\Gamma_\Omega(\lambda) = \Gamma_\Omega((\lambda))$ とおくとき,

$$(\lambda)_{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma_\Omega((\lambda)+\mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(\lambda)}.$$

さらに, $\|\varphi_{\mathbf{m}}\|_F^2 = \dfrac{1}{\dim \mathcal{P}_{\mathbf{m}}} \left(\dfrac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}$ であることにも注意しておこう．

$\boxed{\textbf{例 } 1\textbf{：超幾何函数 } [\mathbf{FK1}].}$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{C},\ p \leqq q+1$ に対して,

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; x) := \sum \frac{(\alpha_1)_{\mathbf{m}} \cdots (\alpha_p)_{\mathbf{m}}}{(\beta_1)_{\mathbf{m}} \cdots (\beta_q)_{\mathbf{m}}} \frac{\varphi_{\mathbf{m}}(x)}{\|\varphi_{\mathbf{m}}\|_F^2}.$$

$\boxed{\textbf{例 } 2.}$ $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_1(V)$ を §3 で扱った V の原始べき等元の多様体とする．規格化された $\mathfrak{I}_1$ 上の K-不変測度 $d\sigma$ の Fourier 変換を考える：

$$J(\xi) := \int_{\mathfrak{I}_1} e^{-i\xi\cdot c}\, d\sigma(c) \qquad (\xi \in V).$$

この J は K-不変な解析函数で

$$J(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \varphi_{(m,0,\ldots,0)}(\xi) \qquad [\mathbf{No6}].$$

$\boxed{\textbf{例 } 3.}$ V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を $V_{\mathbb{C}}$ のエルミート内積 $(\cdot|\cdot)$ に拡張して Heisenberg 群 H を作る：$H = \{n(z,t)\,;\ z \in V_{\mathbb{C}},\ t \in \mathbb{R}\}$ で積は

$$n(z_1, t_1) n(z_2, t_2) = n(z_1 + z_2,\ t_1 + t_2 - \mathrm{Im}\,(v_1|v_2)).$$

$G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形で, 形式的実 Jordan 代数 V の複素化から定義される正定値エルミート Jordan 3 重系 (cf. §7) の自己同型群の単位元の連結成分を U とする．U は $V_{\mathbb{C}}$ の unitary 群 $U(V_{\mathbb{C}})$ の閉部分群である．従って, 半直積 $H \rtimes U$ が考えられる．このとき [**D**] より, $(H \rtimes U, U)$ は Gelfand 対である．H の無限次元既約 unitary 表現の実現としては, Fock model $(\pi_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ をとる：$\mathfrak{F}_\lambda$ は $V_{\mathbb{C}}$ 上の entire functions f で, $V_{\mathbb{C}}$ 上の Lebesgue 測度を dm で表すとき,

$$\|f\|_\lambda^2 := \left[\frac{|\lambda|}{\pi}\right]^n \int_{V_{\mathbb{C}}} |f(z)|^2 e^{-|\lambda|\|z\|^2}\, dm(z) < \infty$$

となるもの全体のなす Hilbert 空間である. 表現作用素は, $\lambda > 0$ のとき,

$$\pi_\lambda(n(z,t))f(w) = e^{i\lambda t}e^{-\lambda\|z\|^2/2}e^{\lambda(w|z)}f(w-z),$$

$\lambda < 0$ のときは, $\pi_\lambda(n(z,t)) = \pi_{-\lambda}(n(\overline{z},-t))$ で与えられる. $\mathfrak{F}_\lambda$ は $V_\mathbb{C}$ 上の holomorphic polynomials $\mathcal{P}(V_\mathbb{C})$ ($\mathcal{P}(V)$ と自然に同一視される) の閉包で, π_λ に付随する球函数 $\phi^\lambda_{\mathbf{m}}$ は, 規格化された U の Haar 測度を du とするとき,

$$\phi^\lambda_{\mathbf{m}}(h) = \int_U (\pi_\lambda(u\cdot h)p\,|\,p)_\lambda\,du \qquad (h\in H,\, p\in\mathcal{P}_{\mathbf{m}} \text{ with } \|p\|_\lambda = 1)$$

となる [**BJR**]. さて [**D**] によって,

$$\phi^\lambda_{\mathbf{m}}(n(z,t)) = e^{i\lambda t}e^{-|\lambda|\|z\|^2/2}L_{\mathbf{m}}(|\lambda|y^2) \qquad (z = uy \text{ with } u\in U,\, y\in\Omega).$$

ただし, $L_{\mathbf{m}}(x)$ は Laguerre 多項式の類似物 :

$$L_{\mathbf{m}}(x) := \sum_{|\mathbf{n}|\leqq|\mathbf{m}|}\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\frac{(-1)^{|\mathbf{n}|}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}}\varphi_{\mathbf{n}}(x).$$

ここで, $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ は二項係数の類似物で, $\varphi_{\mathbf{m}}(e+x) = \sum_{|\mathbf{n}|\leqq|\mathbf{m}|}\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\varphi_{\mathbf{n}}(x)$ で定義されるものである.

§5. 対称チューブ領域と正則離散系列.

今まで通り, V は n 次元で階数が r の形式的実単純 Jordan 代数とする. $V_\mathbb{C}$ は自然に複素 Jordan 代数の構造を持つ. $T_\Omega := V + i\Omega \subset V_\mathbb{C}$ を V の対称錐 Ω から得られるチューブ領域とし, T_Ω の正則同相のなす群を $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ で表す. $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ はコンパクト-開位相で Lie 群になる. 明らかに, $G(\Omega)\subset\mathrm{Hol}(T_\Omega)$. さらに, 各 $x\in V$ に対して, $\tau_x(z) = x + z$ とおくと, $N := \{\tau_x\,;\, x\in V\}\subset\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ である. $y\in\Omega$ のとき, $x + iy = P(y^{1/2})(P(y^{1/2})^{-1}x + ie)$ となることと $P(y^{1/2})\in G(\Omega)$ であることより, $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ は T_Ω に推移的に働くことがわかる. さらに, $T_\Omega\subset(V_\mathbb{C})^\times$ 及び $z\in T_\Omega \Rightarrow -z^{-1}\in T_\Omega$ がわかり, $s : z\mapsto -z^{-1}$ は ie を一意固定点とする involutive な $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ の元である. かくして T_Ω は対称領域となり, $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ は半単純 Lie 群である. さらに, $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ は $G(\Omega)$, N, s から生成されていることもわかる.

この節では以上のことを踏まえて, $\mathrm{Hol}(T_\Omega)$ と局所同型な半単純 Lie 群の正則離散系列表現を, T_Ω 上のベクトル値正則函数のなす Hilbert 空間上に実現し, それを

T_Ω の Silov 境界 V 上の Fourier 変換で写すことを考える．Fourier 変換後の表現の realization は, 放物型部分群 $G(\Omega)N$ (に局所同型な部分群) への表現の制限が明からさまに見えるものになる.

以下この節では, 記号は §4 までとは独立に, G を連結単純 Lie 群とし, K をその極大コンパクト群で, G/K はチューブ領域に正則同相になるものとする．簡単のため, G は連結かつ単連結な複素化 $G_{\mathbb{C}}$ の閉部分群になっているもの仮定する. そして, $\mathfrak{g}_0 := \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{k}_0 := \mathrm{Lie}(K)$ とし, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解とする. また, 対応する Cartan involution を θ で表す. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ でそれぞれ, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$ の複素化を表すものとする (§5 ではこのような記号法を採る：下ツキの 0 を落とすと複素化)．このとき, eK におけるの G/K の接空間の複素化となる $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ と正則型, 反正則型部分に分解される．$\mathfrak{p}_\pm$ は可換で $K_{\mathbb{C}}$-不変な $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 代数である．さて, コンパクト実形 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ に関する $\mathfrak{g}$ の conjugation を τ で表すと, $\mathfrak{p}_+$ は

$$\{x, y, z\} := -\frac{1}{2}\,[\,[\,x, \tau(y)\,], z\,]$$

によって正定値エルミート Jordan 3 重系になる (cf. §7). G/K がチューブ領域に正則同相であるという仮定から, 元 $E \in \mathfrak{p}_+$ が存在して, $E \,\Box\, E := \{E, E, \cdot,\}$ が $\mathfrak{p}_+$ 上の恒等作用素になる．この E を用いて, $xy := \{x, E, y\}$ で $\mathfrak{p}_+$ に積を導入すると, $\mathfrak{p}_+$ は複素 Jordan 代数になる．さらに, $z^* := \{E, z, E\}$ とおくと, 写像 $z \mapsto z^*$ は, この Jordan 代数の conjugation (*i.e.*, 反線型な involutive 実 Jordan 代数同型) になり, その固定点集合 $\mathfrak{A}$ は形式的実 Jordan 代数になる．そして, $\mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{A}$ の Jordan 代数としての複素化になっている.

以下, $c := \exp\frac{\pi}{4}(E - \sigma(E)) \in U$ とおく．ここで, $G_{\mathbb{C}} \supset U \leftrightarrow \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ で, σ は $\mathfrak{g}_0$ に関する $\mathfrak{g}$ の conjugation である．$h_0 := E + \sigma(E) \in \mathfrak{g}_0$ とおくと, 作用素 $\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(h_0)$ は $\mathfrak{g}_0$ 上対角化可能で, 固有値は $0, \pm 1$ である.

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(-1) \oplus \mathfrak{g}_0(0) \oplus \mathfrak{g}_0(1)$$

を $\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(h_0)$ の固有空間分解とする．また, $G(0) := Z_G(h_0)$ (centralizer), $G(1) := \exp \mathfrak{g}_0(1)$ とすると, $P(E) := G(0)G(1)$ は, G の放物型部分群で, $G(0)$ は $P(E)$ の Levi-part, $G(1)$ は $P(E)$ のべき単根基である．さて, $\mathfrak{g}_0(1)_{\mathbb{C}}$ は $\{x, y, z\} := -\frac{1}{2}\,[\,[\,x, \theta\sigma(y)\,], z\,]$ でエルミート Jordan 3 重系になるが, $\nu := -i(\mathrm{Ad}\, c)^{-1}$ は Jordan 3 重系としての同型 $\mathfrak{p}_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_0(1)_{\mathbb{C}}$ を与え, また, $z \in \mathfrak{p}_+$ のとき, $\nu(z^*) = \sigma\nu(z)$ ゆえ, $\mathfrak{g}_0(1)$ に $e := \nu(E)$ を単位元とする実 Jordan 代数構造を引き起こして, 実 Jordan 代数としての同型 $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_0(1)$ を与える．$V := \mathfrak{g}_0(1)$ は形式的実単純 Jordan 代数で, 階数は G の実階数に等しい. そして, Ω を V の対称錐とすると, $\Omega = (\mathrm{Ad}\, G(0))e$ となっている. チューブ領域 $T_\Omega = V + i\Omega$ は G/K と正則同相で, T_Ω への G の作用は

$$\begin{aligned} g_0 \cdot z &= (\mathrm{Ad}\, g_0)z &\qquad& (g \in G(0)), \\ (\exp x) \cdot z &= z + x && (x \in \mathfrak{g}_0(1)). \end{aligned}$$

で与えられる. さらに, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ に同型な部分 Lie 代数 $\mathbb{R}h_0 \oplus \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}(-\theta e)$ から得られる Lie 群としての準同型写像 $SL(2,\mathbb{R}) \to G$ を ψ とすると,

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = (az + be)(cz + de)^{-1} \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right).$$

ここで右辺は Jordan 代数 $V_{\mathbb{C}}$ での演算である. G は $G(0)$, $G(1)$, $s := \psi \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ で生成されるから, これで G の T_Ω への作用が記述できたことになる.

さて, $\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の極大可換部分 Lie 代数とすると (G/K がエルミート対称空間ということから) $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数になる. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ のルート系に順序を入れて, $\mathfrak{p}_+$ が非コンパクトな正のルート部分空間の和になるようにしておく. Λ を $\mathfrak{t}$ 上の K-dominant で K-integral な形式とし, Λ を highest weight とする K の有限次元既約 unitary 表現を $(\tau_\Lambda, E_\Lambda)$ とする (E_Λ はエルミート内積 $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ を持つ有限次元 Hilbert 空間). $P_\pm := \exp \mathfrak{p}_\pm$ とする. まず, τ_Λ を $K_{\mathbb{C}}$ の holomorphic な表現に拡張し, 次に P_+ 上 trivial にして, 半直積 $K_{\mathbb{C}} \ltimes P_+$ の表現に拡張しておく.

$$P_+ K_{\mathbb{C}} P_- \approx P_+ \times K_{\mathbb{C}} \times P_-$$

であるから, 各 $x \in P_+ K_{\mathbb{C}} P_-$ を

$$x = \exp \zeta_+(x) \cdot k_{\mathbb{C}}(x) \cdot \exp \zeta_-(x) \qquad (\zeta_\pm(x) \in \mathfrak{p}_\pm,\ k_{\mathbb{C}}(x) \in K_{\mathbb{C}})$$

と表す. 先に導入した $c = \exp \frac{\pi}{4}(E - \sigma(E))$ は $P_+ K_{\mathbb{C}} P_-$ に属し, $G \subset P_+ K_{\mathbb{C}} P_-$ 及び $cG \subset P_+ K_{\mathbb{C}} P_-$ より,

$$\Phi_\Lambda(g) := \tau_\Lambda(k_{\mathbb{C}}(c))^{-1} \tau_\Lambda(k_{\mathbb{C}}(cg)) \qquad (g \in G)$$

は well-defined である. 実際は,

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda(g_0) &= \tau_\Lambda(c g_0 c^{-1}) &\qquad& (g_0 \in G(0)), \\ \Phi_\Lambda(\exp x) &= \text{identity} && (x \in \mathfrak{g}_0(1)) \end{aligned}$$

となっている．ここで, Φ_Λ は 放物型部分群 $P(E)$ の表現になっていることに注意. さらに, $\Phi_\Lambda(gk) = \Phi_\Lambda(g)\tau_\Lambda(k)$ $(g \in G,\, k \in K)$ も成り立っている.

G の岩沢分解を $G = KAN$ とする． $S = AN$ とおき, $S(0) = G(0) \cap S$ とおく． $S(0)$ は orbit map によって Ω に微分同相である： 各 $y \in \Omega$ に対して, $(\mathrm{Ad}\,\eta_0(y))e = y$ となる $\eta_0(y) \in S(0)$ が一意的に存在する．これだけの準備の下に, T_Ω 上の E_Λ-値正則函数 F で,

$$\|F\|^2 := \int_{T_\Omega} \|\Phi_\Lambda(\eta_0(y))^{-1} F(x+iy)\|_\Lambda^2 \, (\det y)^{-2n/r} \, dxdy < \infty$$

となるもののなす Hilbert 空間を $H_\Lambda(T_\Omega)$ で表す．ここで, det は Jordan 代数 V の determinant であり, r は V の階数, $n = \dim V$ である．Harish-Chandra の条件

$$(\Lambda + \rho, \beta) < 0 \qquad \text{for all noncompact positive roots } \beta$$

の下で, $H_\Lambda(T_\Omega) \neq \{0\}$ である．ただし, ρ は 正のルートの和の半分. 以下この条件を仮定しよう． α を G-同変正則同相 $G/K \xrightarrow{\sim} T_\Omega$ とする．このとき,

$$J_\Lambda(g, z) := \Phi_\Lambda(gg_0)\Phi_\Lambda(g_0)^{-1} \qquad (z = \alpha(g_0 K) \in T_\Omega)$$

は, $G \times T_\Omega$ 上の E_Λ-値函数として well-defined で, z の函数としては正則である. この J_Λ は

$$J_\Lambda(g_1 g_2, z) = J_\Lambda(g_1,\, g_2 \cdot z) J_\Lambda(g_2, z) \qquad (g_1,\, g_2 \in G,\ z \in T_\Omega)$$

を満足しているので, G の unitary 表現

$$\pi_\Lambda(g)F(z) = J_\Lambda(g^{-1}, z)^{-1}\, F(g^{-1} \cdot z) \qquad (g \in G,\, z \in T_\Omega)$$

を得る．表現 $(\pi_\Lambda,\, H_\Lambda(T_\Omega))$ は既約であり, 実際 G の正則離散系列表現の１つの実現を与えている.

さて Fubini の定理から, 各 $F \in H_\Lambda(T_\Omega)$ に対して,

$$V \ni x \mapsto \Phi_\Lambda(\eta_0(y))^{-1} F(x+iy) \in E_\Lambda$$

は, *a.e.* $y \in \Omega$ に対して２乗可積分なので, その Fourier 変換

$$\phi_y(\lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \operatorname*{l.i.m.}_{M \to \infty} \int_{\|x\| \leqq M} \Phi_\Lambda(\eta_0(y))^{-1} F(x+iy)\, e^{-i\langle \lambda | x \rangle}\, dx$$

を考えることができる. 一方, 各 $\lambda \in \Omega$ に対して,

$$\Gamma_\Lambda(\lambda) := \int_\Omega e^{-2\langle\lambda|y\rangle}\, \Phi_\Lambda(\eta_0(y)^{-1})^* \,\Phi_\Lambda(\eta_0(y)^{-1})\ (\det y)^{-2n/r}\, dy$$

とおく. この積分は絶対収束して, $\Gamma_\Lambda(\lambda)$ は E_Λ 上の正定値自己共役作用素になっている.

補題 5.1. Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ の外で0となる V 上の E_Λ-値可測函数 ϕ が存在して,

$$\phi_y(\lambda) = e^{-\langle\lambda|y\rangle}\, \Phi_\Lambda(\eta_0(y))^{-1}\, \phi(\lambda) \qquad (\lambda \in V).$$

しかもこの ϕ は

$$\|\phi\|^2 := \int_\Omega \|\Gamma_\Lambda(\lambda)^{1/2}\phi(\lambda)\|_\Lambda^2\, d\lambda < \infty \tag{5.1}$$

をみたす. ∎

さて, (5.1) をみたす Ω 上の E_Λ-値可測函数ϕ 全体がなす Hilbert 空間を $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ で表すと,

命題 5.2. 写像 $\mathcal{F}_\Lambda : H_\Lambda(T_\Omega) \ni F \mapsto \phi \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ は unitary であって, 逆写像 $\mathcal{F}_\Lambda^{-1}$ は絶対収束する積分

$$\mathcal{F}_\Lambda^{-1}\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\Omega \phi(\lambda)\ e^{i\langle\lambda|z\rangle}\, d\lambda \qquad (z \in T_\Omega)$$

で与えられる. ただし, 右辺では $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を$\mathbb{C}$-双線型に $V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C}$ 上へ拡張してある. ∎

$\hat{\pi}_\Lambda(g) := \mathcal{F}_\Lambda \pi_\Lambda(g) \mathcal{F}_\Lambda^{-1}$ によって表現 $(\pi_\Lambda,\, H_\Lambda(T_\Omega))$ を $(\hat{\pi}_\Lambda, \mathcal{H}_\Lambda(\Omega))$ に変換しよう. 表現作用素 $\hat{\pi}_\Lambda(g)$ の explicit な表示は次の通り.

定理 5.3. [**No2**]

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_\Lambda(g_0)\phi(t) &= (\det\nolimits_V \mathrm{Ad}\, g_0)\, \Phi_\Lambda(g_0)\, \phi((\mathrm{Ad}\, g_0)^* t) && (g_0 \in G(0)),\\
\hat{\pi}_\Lambda(\exp x)\phi(t) &= e^{-i\langle t|x\rangle}\, \phi(t) && (x \in \mathfrak{g}_0(1)),\\
\hat{\pi}_\Lambda(s)\phi(t) &= \int_\Omega \mathcal{J}_\Lambda(t,\, \lambda)\, \phi(\lambda)\, d\lambda && (\phi \in C_c^\infty(\Omega,\, E_\Lambda)).
\end{aligned}$$

ここで,

$$\mathcal{J}_\Lambda(t,\,\lambda) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V J_\Lambda(s^{-1},z)^{-1}\,\exp -i(\langle\lambda\,|\,z^{-1}\rangle+\langle t\,|\,z\rangle)\,dx \quad (z=x+iy\in T_\Omega).$$

∎

§6. 無限次元 Jordan 代数.

無限次元の Jordan 代数の研究もいろいろとなされている. 形式的実 Jordan 代数の無限次元版としてよく扱われているのに *JB* 代数と呼ばれるものがある [**HOS**]. これは, 単位元を持つ実 Jordan 代数であると同時に実 Banach 空間であって, そのノルムが任意の $x,\,y$ に対して

$$\|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\|, \qquad \|x^2+y^2\| \geqq \|x\|^2$$

をみたしているものである. 有限次元の実 Jordan 代数が *JB* 代数であるための必要十分条件は, それが形式的実なことである. しかしながら, 本稿では *JB* 代数や *JBW* 代数の方向へは進まず, むしろ無限次元の Riemann 対称空間への応用を目指して, Hilbert Jordan 代数を取り扱う. §1 から §4 まで形式的実 Jordan 代数を扱ったが, そこで重要な働きをしたのは代数的な「形式的実」という性質ではなく, 命題 1.1 にいうところの結合的内積 $\langle x\,|\,y\rangle = \mathrm{tr}(xy)$ の存在であった (結合的というのは $\langle yx\,|\,z\rangle = \langle y\,|\,xz\rangle$, すなわち, かけ算作用素 $L(x)$ がすべて自己共役ということを意味する). そこで,

定義. 実 Jordan 代数であると同時に内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持った実 Hilbert 空間 V が <u>Hilbert Jordan 代数</u> であるとは, その内積が結合的なことである.

Hilbert Jordan 代数では Jordan 積は必ず連続になっていることに注意しておく (閉グラフ定理 + 一様有界性原理). ただし, $\|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\|$ までは要求しない.

例. 実 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の対称な Hilbert-Schmidt 作用素の全体 $\mathrm{Sym}_2(\mathfrak{H})$ に, $A\circ B = \frac{1}{2}(AB+BA)$ で積を入れ, $\langle A\,|\,B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ で内積を入れると, $\mathrm{Sym}_2(\mathfrak{H})$ は Hilbert Jordan 代数になっている. この例において, $\dim\mathfrak{H}=\infty$ ならば, $\mathrm{Sym}_2(\mathfrak{H})$ は単位元を持たないことに注意.

以下, trivial な代数 $xy=0 \ \ (\forall x,\,y)$ を排除するために, 「$L(x)=0 \Rightarrow x=0$」という仮定をおく. また, Hilbert Jordan 代数は位相的に単純, すなわち閉イデアル

は自明なものだけとする．この節の題材は, §3 の無限次元版である Hilbert-Jordan 代数 V の原始べき等元のなす多様体 $\mathfrak{I}_1$ である．有限次元の場合との相違点を挙げよう．

(1)　すでに述べたように, Hilbert-Jordan 代数は必ずしも単位元を持たない．

(2)　Banach-Lie 群の閉部分群は, 相対位相では必ずしも Lie 群にならない．

(3)　V の自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ は作用素ノルム位相で Banach-Lie 群になるが, Hilbert-Lie 群にはならない．従って, $\mathrm{Aut}(V)$ の等質空間ということから直ちに $\mathfrak{I}_1$ に Riemann-Hilbert 多様体の構造を導入できるという訳ではない．

(4)　無限次元の Riemann 多様体 M は, それが Riemann 距離で完備距離空間になっていても, M の 2 点を最短測地線で結べるとは限らない (Hopf-Rinow の定理が保証されない)．

これらに対する処置は以下の通りである．

(1)　V は位相的に単純としているので, 任意のべき等元 $c \neq 0$ に対して, その Peirce 1-空間 $V_1(c)$ も位相的に単純である (McCrimmon の定理)．この事実は, 単位元の欠如という不便さをある程度カバーしてくれる．

(2)　Harris-Kaup の定理がある．すなわち, Banach 空間 X 上で定義された有界線型作用素全体がなす Banach 代数を $\mathbf{B}(X)$ で表し, それの可逆元全体を $GL(X)$ とする．$GL(X)$ は X の位相同型群 (双射有界線型作用素の全体 ... 開写像定理) である．$GL(X)$ は作用素ノルム位相で自然に Banach-Lie 群になる．$GL(X)$ の部分群で, 次数が有界な連続多項式写像族の零点として定義されるものは相対位相, すなわち作用素ノルム位相で Banach-Lie 群になっている．従って,

$$\mathrm{Aut}(V) = \{g \in GL(V)\,;\, g(xy) = (gx)(gy) \quad \forall x,\, y \in V\}$$

は作用素ノルム位相で Banach-Lie 群であり, その Lie 代数は V の連続な derivations 全体のなす線型 Banach-Lie 代数 $\mathrm{Der}(V)$ である：

$$\mathrm{Der}(V) = \{T \in \mathbf{B}(V)\,;\, T(xy) = (Tx)y + x(Ty) \quad \forall x,\, y \in V\}.$$

$\mathrm{Aut}(V)$ は V の直交群 $O(V)$ (これも作用素ノルム位相で Banach-Lie 群) の閉部分群にもなっている．

(3)　まず, V は位相的に単純と仮定しているので, $\mathfrak{I}_1$ のすべての元が同一のノルムを持つことが示される．そこで V の内積を正規化して, 任意の $a \in \mathfrak{I}_1$ に対して $\|a\| = 1$ としておく．さて, $\mathfrak{I}_1$ の Riemann-Hilbert 多様体構造は, 具体的に

atlas を与えることで定義する：各 $a \in \mathfrak{I}_1$ に対して,

$$N_a := \{b \in \mathfrak{I}_1 \,;\, \langle\, b \,|\, a \,\rangle \neq 0\}$$

とおく. ここで, べき等元 c, d に対して, $cd = 0 \Leftrightarrow \langle\, c \,|\, d \,\rangle = 0$ がいえることに注意しておく. このとき,

$$\xi_a(b) := -2a + \frac{2}{\langle\, a \,|\, b \,\rangle}\, ab \qquad (b \in N_a),$$

$$\eta_a(x) := \frac{2 - \|x\|^2}{2 + \|x\|^2}\, a + \frac{2}{2 + \|x\|^2}\, x + \frac{2}{2 + \|x\|^2}\, x^2 \qquad (x \in V_{1/2}(a))$$

とすると, $\mathrm{Image}(\xi_a) = V_{1/2}(a)$, $\mathrm{Image}(\eta_a) = N_a$ であり, ξ_a と η_a は互いに逆写像である. これらを用いると, a での接空間が a の Peirce $\frac{1}{2}$-空間 $V_{1/2}(a)$ であるような Riemann 多様体構造を $\mathfrak{I}_1$ に導入でき, しかも $\mathfrak{I}_1 \hookrightarrow V$ は embedding になっている.

(4)　$\mathfrak{I}_1$ の 2 点が実際に最短測地線で結べることを, 標準的な Levi-Civita 接続を用いて示す：$E_{1/2}(a)$ は $V_{1/2}(a)$ への直交射影を表すことを思い出そう. また $\mathfrak{I}_1$ 上のベクトル場は, 各点 $a \in \mathfrak{I}_1$ で値が $V_{1/2}(a)$ に属する V-値函数とみて,

$$\nabla_X Y(a) = E_{1/2}(a)\,(d_a Y(X(a)))$$

とおく. ここで, $d_a Y$ は V-値函数 Y の a での Fréchet 微分を表す. $\mathfrak{I}_1$ の 2 点 a, b の Riemann 距離 $\mathrm{dist}(a, b)$ は

$$\mathrm{dist}(a, b) = \sqrt{2}\, \arcsin \frac{\|a - b\|}{\sqrt{2}}$$

で与えられ, それは a, b を通る測地線

$$t \mapsto \eta_a((\tan t)x) \quad (|t| < \pi/2) \quad \text{with some } x \in V_{1/2}(a) \text{ such that } \|x\| = \sqrt{2}$$

の a, b 間の長さになっている.

定理 6.1. [**No5**]　(1) $\mathfrak{I}_1$ は 2 点等質である：$\mathrm{dist}(a_1, b_1) = \mathrm{dist}(a_2, b_2)$ ならば, $T \in \mathrm{Aut}(V)$ が存在して, $Ta_1 = a_2$ かつ $Tb_1 = b_2$ となる. この T は $I - 2E_{1/2}(c) \in \mathrm{Aut}(V)$　$(c \in \mathfrak{I}_1)$ の形の作用素の有限個の積でとれる.

(2) $\mathfrak{I}_1$ の断面曲率 $k_a(x,y)$ ($a \in \mathfrak{I}_1,\ x, y \in V_{1/2}(a) \equiv T_a(\mathfrak{I}_1)$ with $\|x\| = \|y\| = 1,\ \langle x \,|\, y\rangle = 0$) は

$$k_a(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\|E_{1/2}(2x^2 - a)y\|^2$$

で与えられる. ∎

注意. (2) から直ちに $\frac{1}{2} \leqq k_a(x,y) \leqq 2$ が出る. $\mathfrak{H}$ が実 Hilbert 空間で, $V = \mathrm{Sym}_2(\mathfrak{H})$ のとき, $\mathfrak{I}_1 = P(\mathfrak{H})$ ($\mathfrak{H}$ の射影空間) であり, このとき任意の $a \in \mathfrak{I}_1,\ x, y \in V_{1/2}(a)$ に対して, $k_a(x,y) = \frac{1}{2}$ である.

また, 実 Hilbert 空間 W から §1 の様にして Jordan 代数 $\mathcal{S}(W)$ を作ると, $\mathcal{S}(W)$ は Hilbert-Jordan 代数になる. ただし, 内積は

$$\langle \alpha + u \,|\, \beta + v\rangle := 2\,(\alpha\beta + \langle u \,|\, v\rangle_W).$$

$\mathfrak{I}_1$ は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の W 内の球面と同一視され, このときは任意の $a \in \mathfrak{I}_1,\ x, y \in V_{1/2}(a)$ に対して, $k_a(x,y) = 2$ となっている.

§7. Jordan ３重系.

Jordan ３重系という言葉をすでに, §4 や §5 で使ってしまったが, ここで定義を与えておこう.

定義. 実ベクトル空間 V に３重線型写像 $\{\cdot, \cdot, \cdot\} : V \times V \times V \to V$ が与えられて (３重積と呼ぶ) 次の (i),(ii) をみたすとき, V を実 Jordan ３重系 という :

(i) $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$,

(ii) $\{a, b, \{x, y, z\}\} - \{x, y, \{a, b, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\}$.

以下では, $x \,\Box\, y := \{x, y, \cdot\}$ で V 上の線型作用素 $x \,\Box\, y$ を定める.

例 1. $p \times q$ 実行列の全体 $M_{pq}(\mathbb{R})$ に３重積を

$$\{X, Y, Z\} := \frac{1}{2}\,(X^tYZ + Z^tYX)$$

で入れると, $M_{pq}(\mathbb{R})$ は実 Jordan ３重系になる.

例 2. V を Jordan 代数とする. V に３重積を $x \,\Box\, y = L(xy) + [\,L(x), L(y)\,]$ で定めると V は Jordan ３重系になる.

定義. (1) 実 Jordan ３重系 V が エルミート であるとは次の (i),(ii) が成り立つときをいう：

(i)　V は複素ベクトル空間,

(ii)　３重積 $\{x, y, z\}$ は, x, z に関して $\mathbb{C}$-線型, y に関しては反線型.

(2) エルミート Jordan ３重系が 正定値 であるとは, 半双線型 (sesqui-linear) 形式 $\mathrm{tr}(x \,\Box\, y)$ が V にエルミート内積を定めるときをいう.

例 3.　$p \times q$ 複素行列の全体 $M_{pq}(\mathbb{C})$ に３重積を

$$\{X, Y, Z\} := \frac{1}{2}\,(XY^*Z + ZY^*X)$$

で入れると, $\mathrm{tr}(X \,\Box\, Y) = \dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{tr}(XY^*)$ となるから, $M_{pq}(\mathbb{C})$ は正定値エルミート Jordan ３重系である.

例 4.　V を形式的実 Jordan 代数とし, それを複素化して得られる複素 Jordan 代数を $V_{\mathbb{C}}$ とする. $V_{\mathbb{C}}$ に３重積を $x \,\Box\, y = L(x\overline{y}) + [\,L(x),\, L(\overline{y})\,]$ (バーは V に関する共役) で入れると $\mathrm{tr}(x \,\Box\, y) = \mathrm{tr}\, L(x\overline{y})$ ゆえ, $V_{\mathbb{C}}$ は正定値エルミート Jordan ３重系になる.

さて, V を正定値エルミート Jordan ３重系とする. このとき, 作用素 $x \,\Box\, x$ は半正定値であり, その半正定値な平方根 $(x \,\Box\, x)^{1/2}$ の作用素ノルムを $\|x\|_\infty$ で表す. すなわち, $\|x\|_\infty := \|(x \,\Box\, x)^{1/2}\| = \|x \,\Box\, x\|^{1/2}$ とすると, $\|\cdot\|_\infty$ は, その記号が示すように, ノルムになる (x の スペクトル・ノルム と呼ばれる).

定理 7.1. [**Lo1**]　正定値エルミート Jordan ３重系 V のスペクトル・ノルムに関する開単位球 $\mathcal{D} = \{z \in V\,;\, \|z\|_\infty < 1\}$ は V の円形 (circled) 有界対称領域であり, 円形有界対称領域はすべてこのようにして得られる. そして, それはエルミート対称領域の Harish-Chandra 実現に他ならない. ∎

さらに, 有界対称領域 $\mathcal{D}$ がチューブ領域に正則同相であるための必要十分条件は, 対応するエルミート Jordan ３重系が例４の様に, 形式的実 Jordan 代数 V の複素化 $V_{\mathbb{C}}$ から得られていることである. そしてこのとき, $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} T_\Omega$ は Cayley 変換

$$w = i(e+z)(e-z)^{-1} \qquad (z \in \mathcal{D})$$

で与えられる. ここで, 右辺は Jordan 代数 $V_{\mathbb{C}}$ での演算である.

もちろん一般には, 有界対称領域 $\mathcal{D}$ は第２種 Siegel 領域に正則同相なのである. このときも, Cayley 変換を Jordan ３重系の言葉で記述できるが, 本稿では割愛する (cf. [**Lo1**], [**S**]).

Jordan ３重系を用いた有界対称領域上の解析は, [**FK2**] をはじめ (私のささやかなもの [**No4**] の他に) いろいろとなされており, Hua 作用素 [**La**] や Toeplitz 作用素 [**U2**] 等の研究もある. また数論に関係する話題もあるが, 私には触れ得ないのでご容赦いただきたい.

それから, 実 Jordan ３重系で双線型形式 $\mathrm{tr}(x \square y)$ が正定値となっているもの (<u>コンパクト</u> 或いは <u>euclidean</u> といわれる) と対称 R空間との関係 [**Lo2**], 半単純 Jordan 代数 ($\mathrm{tr}(xy)$ が非退化なもの) のべき等元のなす多様体と対称空間との関係 [**He**], 及び無限次元有界対称領域 [**Ka**] や無限次元 Jordan ３重系 [**Ne**] 等々,「Jordan 代数と解析学」という題で語るべき話題もまだまだ尽きないが, いずれまた別の機会に, 私自身の研究成果ももっと増えた折にでもいたしたく思う.

参考文献

[A] A. A. Albert, On Jordan algebras of linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., **59** (1946), 524–555.

[BJR] C. Benson, J. Jenkins and G. Ratcliff, On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., **321** (1990), 85–116.

[BK] H. Brown and M. Koecher, Jordan-Algebren, Springer, Berlin, 1966.

[D] H. Dib, Fonctions de Bessel sur une algèbre de Jordan, J. Math. Pures Appl., **69** (1990), 403–448.

[FK1] J. Faraut and A. Koranyi, Fonctions hypergéometriques associées aux cônes symétriques, C. R. Acad. Sci. Paris, **307** (1988), 555–558.

[FK2] J. Faraut and A. Koranyi, Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal., **88** (1990), 64–89

[HOS] H. Hanche-Olsen and E. Størmer, Jordan operator algebras, Pitman, Boston, 1984.

[He] K. H. Helwig, Jordan-Algebren und symmetrische Räume I, Math. Z., **115** (1970), 315–349.

[Hi1] U. Hirzebruch, Über Jordan-Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang 1, Math. Z., **90** (1965), 339–354.

[Hi2] U. Hirzebruch, Invariant polynomial functions on Jordan algebras, Alg. Gr. Geom., **1** (1984), 442–445.

[J] N. Jacobson, Structure and representations of Jordan algebras, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1968.

[JNW] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. of Math., **35** (1934), 29–64.

[Ka] W. Kaup, Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I, Math. Ann., **257** (1981), 463–486 ; II, *ibid.*, **262** (1983), 57–75.

[La] M. Lassalle, Algèbres de Jordan et équations de Hua, J. Funct. Anal., **65** (1986), 243–272.

[Lo1] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Lecture Notes, Univ. Calif. Irvine, 1977.

[Lo2] O. Loos, Charakterisierung symmetrischer R-Räume durch ihre Einheitsgitter, Math. Z., **189** (1985), 211–226.

[Ma] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[Mu] R. J. Muirhead, Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, New York, 1982.

[Ne] E. Neher, Jordan triple systems by the grid approach, Lecture Notes in Math., **1280**, Springer, Berlin, 1987.

[No1] T. Nomura, 等質 Siegel 領域上の解析学と Lie 群の表現, 第 25 回実函数論, 第 24 回函数解析学合同シンポジウム講演集録 (1986), 63–87.

[No2] T. Nomura, Fourier transform of holomorphic discrete series, 数理研講究録 **700** (1989), 127–147.

[No3] T. Nomura, Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone, J. Reine Angew. Math., **400** (1989), 122–133.

[No4] T. Nomura, Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain, J. Math. Kyoto Univ., **31** (1991), 265–279.

[No5] T. Nomura, Manifold of primitive idempotents in a Jordan Hilbert algebra, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 37-58.

[No6] T. Nomura, in preparation.

[S] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Iwanami / Princeton Univ. Press, Tokyo / Princeton, 1980.

[Ta] A. Takemura, Zonal polynomials, Lecture Notes, Inst. Math. Stat., **4** (1984).

[U1] H. Upmeier, Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[U2] H. Upmeier, Jordan algebras in analysis, operator theory and quantum mechanics, CBMS Regional Conf. Math., **67** (1987), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[V] E. B. Vinberg, Homogeneous cones, Soviet Math. Dokl., **1** (1961), 787-790.