等質開凸錐と基本相対不変式

野村隆昭

(九大数理)

広島大学・談話会

2013 年 10 月 29 日

- 等質開凸錐は，簡約可能でない概均質空間の例を数多く提供する

  $\rightsquigarrow$ 基本相対不変式を知ることの重要性

- 統計学への応用（正定値行列から一般の（等質）開凸錐へ）

- 興味ある等質開凸錐の行列表現

  Vinberg の理論によれば，ある非結合的代数の上三角行列 T を用いて，

  「正定値行列 TT^*」で実現できる．

  ○ 理論上は美しいが，実際の計算はとても不便．

等質開凸錐

V：実ベクトル空間 $(\dim V < \infty)$
$V \supset \Omega$：正則開凸錐（直線を含まない）

$GL(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$: Ω の線型同型群

($GL(V)$ の閉部分群として Lie 群)

Ω が**等質** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G(\Omega) \curvearrowright \Omega$ が推移的

Vinberg (1963)

等質（正則 affine）凸領域

$\rightleftarrows$ ambient ベクトル空間（$\equiv$ ref. pt. の接空間）の代数構造

等質凸領域に付随する（非結合的）代数 (Vinberg 1963)

定義. V はベクトル空間，双線型な積 $x \triangle y = L(x)y = R(y)x$ を持つ.
V が **clan** $\overset{\text{def}}{\iff}$
(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ (left symmetric algebra),
(2) $\exists s \in V^*$（認容線型形式）s.t. $s(x \triangle y)$ は V の内積 (compact),
(3) 各 $L(x)$ は実固有値のみ持つ (normal).

- 等質開凸錐には，単位元を持つ clan が対応する.
- **等質開凸錐 $\Longrightarrow$ clan** の部分：
  $\exists H$: $GL(\Omega)$ の分裂可解部分群 s.t. $H \curvearrowright \Omega$: 単純推移的
  $\rightsquigarrow$ $E \in \Omega$ を固定すると，$H \approx HE = \Omega$（微分同相）
  $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \cong T_E(\Omega) \equiv V$ （H の単位元において微分して，線型同型）
  $\rightsquigarrow$ $\forall x \in V$, $\exists 1 T \in \mathfrak{h}$ s.t. $TE = x$.
  $\rightsquigarrow$ $T = L(x)$ と書いて，積 $\triangle$ を $x \triangle y := L(x)y$ で定義する．E が単位元.

- Ω の**双対錐** Ω^* (w.r.t $\langle \cdot | \cdot \rangle$)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \Omega^* := \left\{ y \in V \; ; \; \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \right\}$$

- Ω が**自己双対** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \langle \cdot | \cdot \rangle$ s.t. $\Omega = \Omega^*$
- **対称錐** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 等質な自己双対開凸錐

- 対称錐 $\Omega \rightleftarrows$ Euclid 型 Jordan 代数 V: $\quad \Omega = \mathrm{Int}\{x^2 \; ; \; x \in V\}$.

- V はベクトル空間，双線型な積 xy を持つ．

  V が **Jordan 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $xy = yx$, $\quad$ (2) $x^2(xy) = x(x^2y)$.
- 単位元 e_0 を持つ実 Jordan 代数が **Euclid 型**

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \langle \cdot | \cdot \rangle$（結合的内積） s.t. $\langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, yz \,\rangle \quad (\forall x, y)$.

- 対称錐が既約 $\Longleftrightarrow$ 対応する Euclid 型 JA が単純

例. $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$

- Jordan 積 $\circ$ は $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$.
- clan 積 $\triangle$ は $x \triangle y = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x})$. ただし，$x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に対して

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & \text{\Large 0} & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

$x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$ に注意.

既約対称錐の分類 $\Longleftrightarrow$ 単純 Euclid 型 Jordan 代数の分類

- $\Omega = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$
- $\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})$
- $\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})$
- $\Omega = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$
- $\Omega = \Lambda_n$ (n次元 Lorentz 錐) $\subset V = \mathbb{R}^n$：Clifford 代数の線型部分

- 対称錐でない等質開凸錐は5次元から現れる．
- 11次元以上では，互いに線型同型でない等質開凸錐が連続無限個ある．
- 10次元までは有限個（線型同型を除いて）（Kaneyuki–Tsuji による分類 ('74)）
  7次元までは実現もしている．
- 等質開凸錐を一般に実対称行列で実現する方法．
  (1) Ishi による方法．
  (2) T. Yamasaki による方法（(1) より直接的）
    (2) はとくに Kaneyuki–Tsuji で残っていた 8, 9, 10次元の等質開凸錐を実現している．

基本相対不変式

Ω：等質正則開凸錐 $\subset V$,
$GL(\Omega)$：Ω の線型同型群,
$\exists H$：分裂可解 $\subset G(\Omega)$ s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

- Ω 上の函数 f が**相対不変** (w.r.t. H)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\chi$：H の 1 次元表現 s.t. $f(hx) = \chi(h)f(x)$ $(\forall h \in H,\ x \in \Omega)$.

定理. [Ishi 2001]
$\exists\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ $(r := \mathrm{rank}(\Omega))$：$V$ 上の既約な相対不変多項式函数
s.t. V 上の $\forall$ 相対不変多項式函数 P は次のように書ける：

$$P(x) = c\,\Delta_1(x)^{m_1}\cdots\Delta_r(x)^{m_r} \quad (c = \mathrm{const.},\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0}).$$

- $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$：**$\Omega$ に付随する基本相対不変式**

例. $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ のとき．$\Delta_k(x)$：左上からとった $k \times k$ 小行列式.
（右下からとってもよい）

- 一般の EJA のとき．Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$（原始ベキ等元の完全直交系）$\rightsquigarrow$ JA 版の principal minors $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$．それが基本相対不変式.

  $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ で,
  $c_k := E_{kk}\ (k = 1, \ldots, r) \implies \Delta_k(x)$ は左上からとったもの.
  $c_k := E_{r-k+1,r-k+1}\ (k = 1, \ldots, r) \implies \Delta_k(x)$ は右下からとったもの.

Ω の ambient ベクトル空間 V に clan 構造を入れておく.

定理. [Ishi–N. 2008]
$R(x)y := y \triangle x$：右乗法作用素
$\implies \mathrm{Det}\, R(x)$ の既約成分は $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ に一致する.

問題. $\mathrm{Det}\, R(x) = \Delta_1(x)^{n_1}\Delta_2(x)^{n_2}\cdots\Delta_r(x)^{n_r}$ と書くとき，
正整数 $n_1, \ldots, n_r$ を V の「invariants」で表せ.

$\boldsymbol{n} := (n_1, \ldots, n_r)$：$V$ の**基本インデックス**.

例. V が単純EJAのとき，$\boldsymbol{n} = (d, \ldots, d, 1)$.
ただし，$d :=$ off-diagonals V_{kj} $(j < k)$ の共通次元.

$\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$：$d = 1$,

$\mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$：$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ （$\mathbb{K} = \mathbb{O}$ のときは $r = 3$ のみ）

$\Omega = \Lambda_n$：$\mathbb{R}^n$ の Lorentz 錐 $(n \geq 3)$：$r = 2$, $d = n - 2$.

- 一般のV (clan) に対しては，H. Nakashima (preprint, 2013) で得られている．

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}\sigma^{-1}.$$

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & V_{21} & \cdots & V_{r-1,1} & V_{r1} \\ V_{21} & \mathbb{R} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ V_{r-1,1} & & & \mathbb{R} & V_{r,r-1} \\ V_{r1} & \cdots & \cdots & V_{r,r-1} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$ ：Vの正規分解.

$m_k := 1 + \sum_{l>k} \dim V_{lk}$として，$\boldsymbol{m} := (m_1, \ldots, m_r)$.

σ：Vの**乗数行列**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 基本相対不変式$\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$の1次元表現のパラメータを並べてできる$r \times r$行列.

- 単純EJAのときは，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
- 一般にσは非負整数からなる下三角ベキ単行列.

EJAの表現からclanを新たに作る.

V：EJA，単位元 e_0， E：実ベクトル空間，内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$

定義. 線型写像 $\varphi : V \to \mathrm{End}(E)$ が V の**自己共役表現**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (1)\ \varphi(x) \in \mathrm{Sym}(E) \quad \text{for } \forall x \in V, \\ (2)\ \varphi(xy) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)\big), \quad \varphi(e_0) = I \ \text{ if } \varphi \neq 0. \end{cases}$$

- $V = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) \implies \varphi = 0$
- $V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$
  $\implies E = \mathrm{Mat}(r \times p, \mathbb{K})$， $\varphi(x)\xi = x\xi$ $(x \in V, \xi \in E)$
- V: Lorentz 型 $\implies V = \mathbb{R}e_0 \oplus W$， (W, B) はEuclidean VS.
  V のJA表現 $\rightleftarrows$ $\mathrm{Cl}(W)$ のClifford代数表現
  $(\mathrm{Cl}(W)$：Clifford代数 with $w^2 = B(w, w))$
  実際， $V \hookrightarrow \mathrm{Cl}(W)$

$c_1, \dots, c_r$：V の Jordan 枠．このとき，$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & V_{21} & \cdots & V_{r-1,1} & V_{r1} \\ V_{21} & \mathbb{R}c_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ V_{r-1,1} & & & \mathbb{R}c_{r-1} & V_{r,r-1} \\ V_{r1} & \cdots & \cdots & V_{r,r-1} & \mathbb{R}c_r \end{pmatrix}$

(φ, E)：V の自己共役表現で，$\dim E > 0$．

$\rightsquigarrow \varphi(c_1), \dots, \varphi(c_r)$：等ランクの直交射影作用素の完全系．

- $\varphi(x)$ の下三角部分 $\underline{\varphi}(x)$ を次で定義：

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i \varphi(c_i) + \sum_{j<k} \varphi(c_k)\varphi(x_{kj})\varphi(c_j) \quad \Big(x = \sum_i \lambda_i c_i + \sum_{j<k} x_{kj}\Big).$$

このとき，$\underline{\varphi}(x) + \underline{\varphi}(x)^* = \varphi(x)$.

命題.　φ はクランと見た V の表現にもなっている：

$$\varphi(x \triangle y) = \underline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x)^* \qquad (x, y \in V).$$

すなわち，$\varphi : V \to \mathrm{Sym}(E)$ は clan 準同型．

- **φ に付随する対称双線型写像** $Q : E \times E \to V$ を次で定義：

$$\langle \varphi(x)\xi \,|\, \eta \rangle_E = \langle Q(\xi,\eta) \,|\, x \rangle \qquad (x \in V,\ \xi,\eta \in E).$$

- $V_E := E \oplus V$ に積 $\triangle$ を次で定義：

$$(\xi + x) \triangle (\eta + y) := \underline{\varphi}(x)\eta + (Q(\xi,\eta) + x \triangle y) \qquad (x, y \in V,\ \ \xi,\eta \in E).$$

定理. $(V_E, \triangle)$ は clan になり，認容線型形式として，次の s' がとれる．

$$s'(\xi + x) := \mathrm{Tr}\, L(x) \qquad (\xi \in E,\ x \in V).$$

- V_E は単位元を持たない．

$\because$) $\eta_0 + y_0$ が単位元だとすると，$0 \neq \xi \in E$ をとるとき

$$\xi + 0 = (\xi + 0) \triangle (\eta_0 + y_0) = 0 + Q(\xi, \eta_0)$$

という矛盾を得る．

- V_E に対応する等質凸領域は，次で定義される実 Siegel 領域．

$$D(\Omega, Q) = \{\xi + x\ ;\ x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\}.$$

V_E に単位元 e を添加して，$V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ とする.

$u := e - e_0$ とおいて（e_0 は V の単位元），$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ と見る.

積は

$$(\lambda u + \xi + x) \vartriangle (\mu u + \eta + y) = (\lambda\mu)u + (\mu\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\eta + \underline{\varphi}(x)\eta) + (Q(\xi,\eta) + x \vartriangle y)$$

$$(\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \xi, \eta \in E \text{ and } x, y \in V).$$

- V_E^0 を次のようにイメージするとよい.

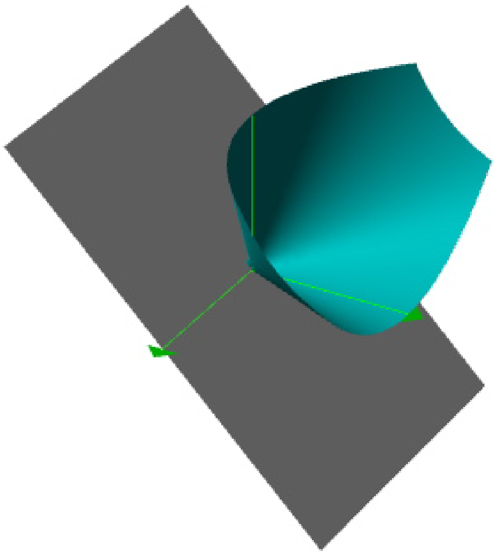
$$V_E^0 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & {}^tE \\ & & \lambda & \\ \hline & E & & V \end{array}\right).$$

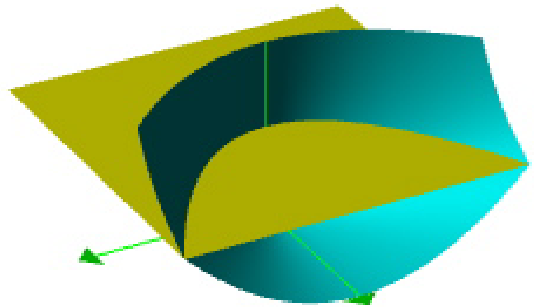
- Ω^0：V_E^0 に対応する等質開凸錐.

• Ω^0 の記述.

$$\Omega^0 = \{\lambda u + \xi + x \in V_E^0 \,;\, \lambda > 0,\, \lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\}.$$

すなわち，Ω^0 を超平面 $\lambda = 1$ で切ると，断面に $D(\Omega, Q)$ が現れる．





Ω^0 に付随する相対不変式.

V：EJA，$\varphi : V \to \mathrm{Sym}(E)$：$V$ の自己共役表現.

定義. φ が正則 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \xi_0 \in E$ s.t. $Q(\xi_0, \xi_0) = e_0$

以下，$V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(r \geq 3;\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ とする.

$E = \mathrm{Mat}(r \times p,\ \mathbb{K})$，$\varphi(x)\xi = x\xi$ $(x \in V,\ \xi \in E)$，$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi\eta^* + \eta\xi^*)$

Fact: φ が正則 $\iff$ $p \geq r$ （すなわち，$E = \boxed{}$ or $E = \boxed{}$ ）.

$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V \ni \lambda u + \xi + x =: v$，$\Delta_k(x)$：$k$ 次首座小行列式（左上から）

定理. φ が $\underset{\sim\sim\sim}{\text{正則}}$ ならば，Ω^0 に付随する基本相対不変式は

$$\Delta_0^0(v) = \lambda, \quad \Delta_j^0(v) = \Delta_j(\lambda x - \tfrac{1}{2}\xi\xi^*)\ (j = 1, \ldots, r).$$

- φが正則でない ($p < r$) とき，$\Delta_j(\xi\xi^*) = 0$ ($j = p+1, \ldots r$)

$\Longrightarrow$ そのようなjに対して，$\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}\xi\xi^*)$は既約ではない

$\Longrightarrow$ should be $\lambda^{-(j-p)}\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}\xi\xi^*) \longleftarrow$ 最終表示とはしたくない.

定理. $p < r$のとき，Ω^0に付随する基本相対不変式は

$$\begin{cases} \Delta_0^0(v) = \lambda, & \\ \Delta_j^0(v) = \Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}\xi\xi^*) & (j = 1, \ldots, p), \\ \Delta_j^0(v) = \det{}^{(p+j)} \begin{pmatrix} \lambda I_p & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x \end{pmatrix} & (j = p+1, \ldots, r). \end{cases}$$

ここで，$\det^{(p+j)} X$はHermite行列Xの左上$p+j$次の小行列式.
$\mathbb{K} = \mathbb{H}$のときは，JAの意味での行列式.

Ω^0 の双対錐 $(\Omega^0)^*$ とそれに付随する基本相対不変式.

$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ に次で内積を入れる.

$$\langle \lambda u + \xi + x \,|\, \lambda' u + \xi' + x' \rangle^0 = \lambda\lambda' + \langle \xi \,|\, \xi' \rangle_E + \langle x \,|\, x' \rangle.$$

$(\Omega^0)^* := \left\{ v \in V_E^0 \,;\, \langle v \,|\, v' \rangle^0 > 0 \ \ \forall v' \in \overline{(\Omega^0)} \setminus \{0\} \right\}$.

• $v \bigtriangledown v' = {}^t L^0(v) v'$ によって V_E^0 は clan になる（$L^0(v)$ は V_E^0 の左乗法作用素）.

命題. $(\Omega^0)^* = \left\{ v = \lambda u + \xi + x \,;\, x \in \Omega,\, \lambda > \frac{1}{2} \langle \varphi(x)^{-1} \xi \,|\, \xi \rangle_E \right\}$.

注意. 定理の内容は, $(\Omega^0)^*$ は Rothaus が次のように呼んだものに等しい：

the extension of Ω by the representation φ.

$\Delta_1^*(x), \ldots, \Delta_r^*(x)$：$c_r, \ldots, c_1$ に付随する JA principal minors
（元の Jordan 枠の順番を逆にしていることに注意）.

- $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ のときは，右下からの首座小行列式をとっている.

定理. $(\Omega^0)^*$ に付随する基本相対不変式は

$$P_j(\lambda u + \xi + x) = \Delta_j^*(x) \qquad (j = 1, \ldots, r),$$
$$P_{r+1}(\lambda u + \xi + x) = \lambda \det x - \tfrac{1}{2}\langle\, \varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi \,|\, \xi \,\rangle$$

- $x \in V$ が可逆ならば，${}^{\mathrm{co}}x := (\det x)x^{-1}$.
- 一般には，${}^{\mathrm{co}}x$ は JA 版の Cayley–Hamilton 定理を用いて定義される $r-1$ 次の多項式写像.
- $\deg P_j = j$ $(j = 1, \ldots, r, r+1)$.

先の定理は，対称錐でない等質開凸錐でも，基本相対不変式の次数が

$$1, 2, \ldots, r = \mathrm{rank}(\Omega)$$

となっている例をsystematicに得ている（Ishi–N. [2008]にある例の一般化）.

問題. Ω：階数rの等質開凸錐.

Ωが対称錐 $\iff$ Ωに付随する基本相対不変式の次数も，Ω^*に付随する基本相対不変式の次数も，$1, 2, \ldots, r$ である.

これに関しては，T. Yamasaki が肯定的結果にて学術論文を執筆中.

- JAの表現ではなくて，clanの表現から出発する.
  H. Nakashima, preprint (submitted, 2013).