Jordan 代数と対称空間：解析学，幾何学への応用

京大理　野村隆昭

1930 年代初めに物理学者 P. Jordan によって導入された, 可換ではあるが結合法則が仮定されない代数系 — 1946 年に A. A. Albert により Jordan 代数と名付けられた — は量子力学への応用を目指したものであった. しかし 1950 年代の終わりに, Koecher や Vinberg によって, ユークリッド空間の自己双対凸錐と有限次元実 Jordan 代数との間の “１対１対応 ” が見い出されて以来, 解析学や幾何学への応用も盛んになされてきた. また, 有界対称領域と Jordan ３重系との関係も発見され, Lie 群, Lie 代数のみのアプローチより Jordan 構造をも考慮する手法が, 領域やその境界の代数的記述をより透明感のある, しかも初等的なものにすることが示されてきた. そして無限次元の Banach 空間内の対称領域の研究では, Banach-Lie 群論の未熟さとも相俟って, Jordan approach の有効性が大いに発揮されている (W. Kaup 等).

さて, Riemann 対称空間の内で最も基本的なものは, 球面や射影空間等の, 階数が１のコンパクト Riemann 対称空間である. これらも U. Hirzebruch によって Jordan 代数的記述が得られている：

> 有限次元形式的実 Jordan 代数 V の原始冪等元の全体 $\mathfrak{I}_1$ は, V に埋め込まれた階数１のコンパクト Riemann 対称空間であり, 階数１のコンパクト Riemann 対称空間はすべてこのようにして得られる.

本講演では, (一般に無限次元の) Hilbert-Jordan 代数の原始冪等元のなす集合を Riemann 多様体として考察し, その２点等質性や Jordan 代数構造から記述される断面曲率公式について述べる (J. Math. Soc. Japan, **45**). さらに現在準備中の, 一般の階数の冪等元のなす多様体 (*i.e.*, Hilbert-Jordan 代数の Grassmann 多様体) についても触れる. そこでは, ２つの冪等元から生成される部分代数 (C^* 代数, von Neumann 代数等で古くから繰り返し扱われてきた話題の Jordan 版) の構造が種々の計算への鍵となる.