Cayley 変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け

京都大学大学院理学研究科　甲斐 千舟 (Chifune KAI[1])
京都大学大学院理学研究科　野村 隆昭 (Takaaki NOMURA[2])
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto University

§1　序.

複素平面での Cayley 変換

$$w \mapsto \frac{w-1}{w+1} = 1 - 2(w+1)^{-1} \tag{1.1}$$

は右半平面を単位円板に写す. 像である単位円板はもちろん凸集合である. この事情は, 右半平面を一般の対称管状領域に置き換えても成り立っている. このことを簡単に説明しよう. 対称管状領域は, Euclid 的 Jordan 代数 V とそこでの対称錐 Ω を以て, $W := V_{\mathbb{C}}$ 内の領域 $\Omega + iV$ としてつねに表される. ここで, 実 Jordan 代数の複素化として W は複素 Jordan 代数となっていることに注意. この Jordan 代数構造を用いて, $\Omega + iV$ の Cayley 変換を（一変数の場合の (1.1) をなぞらえて）

$$w \mapsto (w-e)(w+e)^{-1}$$

で定義することができる. ただし, e は Jordan 代数 V の（従って W の）単位元である. この Cayley 変換による $\Omega + iV$ の像は W のあるノルムに関する開単位球となる（詳しくは §2 を参照）. 特にこの Cayley 変換像も凸集合になっている. 本稿では, このような Cayley 変換像の凸性が, 等質管状領域の中で対称領域を特徴付けるものであることを示す.

さて一般に, 有限次元実ベクトル空間 V の中に等質錐 Ω が与えられたとし, V の複素化ベクトル空間を W とする. このときにも, 管状領域（第 1 種等質 Siegel 領域）$\Omega + iV$ の Cayley 変換を定義できる. 詳しくは §4 で述べるが, それは野村 [10] で導入された等質 Siegel 領域の Cayley 変換（のパラメタ付きの族）を管状領域に特化したものである. すなわち, Jordan 代数の逆元写像を一般化したパラメタ付きの擬逆元写像（の W 上の双有理写像への解析接続）$\mathcal{I}_{\mathbf{s}} : x \mapsto \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$ を用いて

$$w \mapsto E - 2\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w+E)$$

で Cayley 変換が定義される. ここで $E \in \Omega$ はあらかじめ固定しておく点である. 領域が対称で, かつパラメタ $\mathbf{s}$ が特別な場合には, この Cayley 変換は先程述べた

[1]E-mail: kai@math.kyoto-u.ac.jp
[2]E-mail: nomura@math.kyoto-u.ac.jp

Jordan 代数の Cayley 変換に本質的に一致する (§4 の最後の部分を参照). 等質錐から出発して, 擬逆元写像を経て Cayley 変換を定義したように, その双対錐から出発して, 双対擬逆元写像を経て双対 Cayley 変換が定義できる.

我々の定理をラフに述べると次のようになる. 正確な主張は §4 に述べる.

定理 1.1. 既約な等質管状領域の Cayley 変換像，およびその双対管状領域の双対 Cayley 変換像が共に凸集合になるための必要十分条件は, 考えている管状領域が対称であり, Cayley 変換のパラメタはある特定のものとなることである.

同様の特徴付けが一般の第 2 種等質 Siegel 領域でも可能であり，著者の一人の甲斐が論文を準備中である.

§2 対称管状領域の Cayley 変換.

典型的な例から入ろう. $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$（$r$ 次実対称行列の成すベクトル空間）とし, そこでの正定値なものがなす凸錐を Ω とする. 管状領域 $V + i\Omega$ は Siegel の上半空間として知られているものであるが, 本稿では「右半空間」$\Omega + iV$ を考える. $W := V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{C})$ での Cayley 変換 $z = \mathcal{C}(w) = (w-e)(w+e)^{-1}$ を考える. 容易にわかるように

$$z = (w-e)(w+e)^{-1} \iff w = (e+z)(e-z)^{-1}$$

である. 記号 $\gg 0$ によって, 実対称行列, あるいは複素エルミート行列が正定値であることを意味するものとすると, 直接の計算で

$$\mathrm{Re}\, w = (e-z)^{-1}(e-zz^*)(e-z^*)^{-1}$$

がわかるので,

$$\mathrm{Re}\, w \gg 0 \iff e - zz^* \gg 0$$

である. そして条件 $e - zz^* \gg 0$ は, 行列 z の $\mathbb{C}^r$ 上の線形作用素としての作用素ノルム $\|z\|_{\mathrm{op}}$ が 1 より小さいことと同値であるので, 結局

$$\mathcal{C}(\Omega + iV) = \{z \in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{C}) \mid \|z\|_{\mathrm{op}} < 1\}$$

となり, 特に Cayley 変換像 $\mathcal{C}(\Omega + iV)$ は凸集合であることがわかる.

このことはそのまま一般の対称管状領域で成り立つ. 以下これを Faraut と Korányi による本 [3] に沿って見てみよう. 序文に述べたように, 対称管状領域はすべて Jordan 代数を用いて記述される. 実または複素ベクトル空間 V に双線型な積（結合法則は仮定しない）$x, y \mapsto xy$ が定義されていて, 次の 2 条件がすべての x, y についてみたされるとき, V を **Jordan 代数**という:

$$xy = yx, \qquad x^2(xy) = x(x^2y).$$

実 Jordan 代数に正定値な内積が定義できて, Jordan 積によるかけ算作用素がその内積に関してすべて自己共役となるとき，その Jordan 代数は **Euclid** 的であるという.

さて V を Euclid 的 Jordan 代数とする. V のトレース $x \mapsto \mathrm{tr}(x)$ は V に内積を定義する: $\langle x|y\rangle := \mathrm{tr}(xy)$. 元 x を掛ける線型作用素 $L(x)$ は, このトレース内積に関して自己共役になっている. Ω を V の元の 2 乗がなす集合の内部とする:

$$\Omega := \mathrm{Int}\,\{x^2 \mid x \in V\}. \tag{2.1}$$

このとき Ω は開凸錐であり，自己双対になっている（対称錐と呼ぶ）:

$$\Omega = \{x \in V \mid \langle x|y\rangle > 0 \quad \text{for } \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}. \tag{2.2}$$

このようにしてすべての対称錐が得られる. $W = V_{\mathbb{C}}$ での「右半空間」$\Omega + iV$ は対称管状領域であり, 対称管状領域はすべてこのようにして得られる. W は自然に複素 Jordan 代数となり, この Jordan 積を用いて, Cayley 変換 $\mathcal{C}$ を次の式で定義する:

$$\mathcal{C}(w) := (w-e)(w+e)^{-1}. \tag{2.3}$$

Cayley 変換 (2.3) による $\Omega + iV$ の像を記述するために, まず 2 元 $x, y \in W$ に対し, W 上の線型作用素 $x\square y$ を

$$x\square y := L(xy) + L(x)L(y) - L(y)L(x)$$

で定義する. 次に V のトレース内積を自然に拡張して W のエルミート内積とし, それにより W にノルムを入れておく. このノルムによって W 上の線型作用素 $z\square z^*$（z^* は実型 V に関する z の共役）の作用素ノルム $\|z\square z^*\|$ を考え

$$|z| := \|z\square z^*\|^{1/2} \qquad (z \in W)$$

とおく. このとき $|z|$ はノルムになることがわかり ([3, Proposition X.4.1]), スペクトル・ノルムと呼ばれる. スペクトル・ノルムを用いると

$$\mathcal{C}(\Omega + iV) = \{z \in W \mid |z| < 1\}$$

と記述でき, 特に $\mathcal{C}(\Omega + iV)$ は凸集合である.

上述の例の場合では, $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に Jordan 積 $\circ$ を $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$（右辺の積は通常の行列の積）で入れ, $\mathrm{Tr}(AB)$ で定義される内積を考えれば, $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ は Euclid 的 Jordan 代数になっていて, 正定値なもののなす開凸錐が (2.1) と (2.2) をみたしていることは容易にわかる. さらに Jordan 代数 $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ での逆元 $(w+e)^{-1}$ は $w + e$ の逆行列に他ならず, また 2 つの行列 $w - e$ と $(w+e)^{-1}$ は可換であるから, $(w-e) \circ (w+e)^{-1} = (w-e)(w+e)^{-1}$ となっていることにも注意. そして, スペクトル・ノルムは作用素ノルムに一致していることがわかる ([3, Chapter X, Exercise 1]).

§3　等質錐に付随する clan.

対称錐と Jordan 代数との間に対応があるように, より一般に等質錐には clan と呼ばれる非可換な非結合的代数が対応する. それを説明しよう. ここで, 有限次元実ベクトル空間 V の中の開凸錐 Ω が等質錐であるとは, Ω が直線を含まず, さらに Ω の線型自己同型群 $G(\Omega)$, ただし

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \mid g\Omega = \Omega\},$$

が Ω に推移的に作用していることをいう. 簡単のため Ω は既約であるとする. [14] より, $G(\Omega)$ の分裂型可解部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在する. 任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する. 軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ は微分同相なので, これを H の単位元で微分して線型同型写像 $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \ni T \mapsto TE \in V$ を得る. この逆写像を $x \mapsto L_x$ で表す. V に積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := L_x y \qquad (x, y \in V)$$

で導入すると, これにより V は **clan** になる. すなわち, 次の 3 条件がみたされている:

- $[L_x, L_y] = L_{x\triangle y - y\triangle x}$,
- 0 でない任意の $x \in V$ に対し $\mathrm{Tr}\, L_{x\triangle x} > 0$.
- 線型作用素 $L_x\,(x \in V)$ の固有値は実数のみである.

E は clan V の単位元になっている. 一般に, 等質錐の線型同型類の集合と, 単位元をもつ clan の (代数としての) 同型類の集合の間には一対一の対応があることが知られている [14].

等質錐 Ω に付随する clan V は **normal** 分解と呼ばれる分解をもつ: 正整数 r と原始冪等元 $E_1, \ldots, E_r$ が存在して, $E = E_1 + \cdots + E_r$ であり, 整数 $j, k\,(1 \le j < k \le r)$ に対して

$$V_{kj} := \left\{ x \in V \;\middle|\; \forall c = \sum_m \lambda_m E_m\,(\lambda_m \in \mathbb{R}), c\triangle x = \tfrac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_k)x, x \triangle c = \lambda_j x \right\}$$

とおいたとき, V は

$$V = \sum_m \mathbb{R}E_m \oplus \sum_{k>j} V_{kj}$$

と分解される. 積 $\triangle$ に関しては次のような性質がある:

$$\begin{gathered} V_{lk} \triangle V_{kj} \subset V_{lj}, \\ \text{もし } k \neq i, j \text{ ならば } V_{lk} \triangle V_{ij} = 0, \\ V_{lk} \triangle V_{mk} \subset V_{lm} \text{ or } V_{ml} \ (l \text{ と } m \text{ の大小関係に依存する}). \end{gathered} \tag{3.1}$$

例. 対称錐でない等質錐の中で次元が最低のものは, 次で与えられる Vinberg 錐と呼ばれる 5 次元のものである:

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \\ v_2 & v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, \ldots, v_5 \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\Omega := \{ v \in V \mid v_1 > 0, v_1v_3 - v_2^2 > 0, v_1v_5 - v_4^2 > 0 \}.$$

各 $v \in V$ に対し,

$$\check{v} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 & 0 & 0 \\ v_2 & \frac{1}{2}v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & \frac{1}{2}v_5 \end{pmatrix} \qquad \hat{v} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 & v_2 & v_4 \\ 0 & \frac{1}{2}v_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}v_5 \end{pmatrix}$$

とおく. Ω に対応する clan の積 $\triangle$ は $v \triangle w = \check{v}w + w\hat{v}$ である. また normal 分解は,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$V_{21} = \left\{ v = \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{31} = \left\{ v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおくとき, $V = \mathbb{R}E_1 \oplus \mathbb{R}E_2 \oplus \mathbb{R}E_3 \oplus V_{21} \oplus V_{31}$ で与えられる. V_{32} が欠けていることに注意.

§4　管状領域の Cayley 変換.

Cayley 変換を定義するにあたって, (1.1) の $(w+1)^{-1}$ にあたるものを与えるために擬逆元写像を定義する. まず H の一次元表現の集合をパラメタ付けしよう. $\mathfrak{a} := \sum_{j=1}^{r} \mathbb{R}L_{E_j} \subset \mathfrak{h}$ とおくと, これは $\mathfrak{h}$ の極大可換部分 Lie 代数 (Cartan 部分代数) である. $\mathfrak{h}$ の導来イデアルを $\mathfrak{n}$ とおく: $\mathfrak{n} := [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{h}$ の冪零部分 Lie 代数である. さらに, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}$ と半直積に分解されることがわかり, $A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと $H = A \ltimes N$ である. パラメタ $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し, A の一次元表現 $\chi_{\mathbf{s}}$ を

$$\chi_{\mathbf{s}}\Bigl(\exp\Bigl(\sum t_j L_{E_j}\Bigr)\Bigr) := \exp\Bigl(\sum s_j t_j\Bigr) \qquad (t_j \in \mathbb{R})$$

で定義する. $H = A \ltimes N$ に注意して, $\chi_{\mathbf{s}}$ を N 上自明であるとして H の一次元表現に拡張しておく. 微分同相になっている軌道写像 $H \ni h \to hE \in \Omega$ を経由して, $\chi_{\mathbf{s}}$ を Ω 上に移した函数を $\Delta_{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE) := \chi_{\mathbf{s}}(h) \qquad (h \in H).$$

定義より明らかに $\Delta_{\mathbf{s}}$ は H の作用に関して相対不変である:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hx) = \chi_{\mathbf{s}}(h)\Delta_{\mathbf{s}}(x) \qquad (x \in \Omega).$$

[10] では擬逆元写像は双対ベクトル空間に値をとる写像として定義されているが, 本稿では擬逆元写像のパラメタに対応して決まる内積を導入し, それによって双対ベクトル空間と元のベクトル空間とを同一視して話を進める. パラメタ $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ は $s_1, \dots, s_r > 0$ を満たすとする (このとき $\mathbf{s} > 0$ と書く). V 上の C^∞ 級函数 f と元 $u, v \in V$ に対して, $D_u f(v) := \frac{d}{dt} f(v + tu)\big|_{t=0}$ とおく. V 上の双線型形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を

$$\langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} := D_x D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(E) \qquad (x, y \in V) \tag{4.1}$$

によって定義すると, これは V に正定値内積を定める. 各 $x \in \Omega$ に対して, その擬逆元 $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x) \in V$ を

$$\langle \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x) | y \rangle_{\mathbf{s}} = -D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(x) \qquad (y \in V) \tag{4.2}$$

によって定義する. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}} : \Omega \to V$ を擬逆元写像と呼ぶ. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を使って Ω の双対錐を V に実現したものを $\Omega^{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Omega^{\mathbf{s}} := \{x \in V \mid \langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} > 0 \quad \text{for } \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

[10, Proposition 3.12] より $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は Ω から $\Omega^{\mathbf{s}}$ への全単射を与える. V 上の線型作用素 A に対し $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ に関する随伴作用素を ${}^{\mathbf{s}}A$ で表すことにすると, H は V に $x \mapsto {}^{\mathbf{s}}h^{-1}x\,(x \in V, h \in H)$ としても作用する. これは H の V^* (V の双対ベクトル空間) への反傾作用を $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ で V に落としたものである. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は H 同変であることがわかる: $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(hx) = {}^{\mathbf{s}}h^{-1}\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)\,(h \in H, x \in \Omega)$. また, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E) = E$ となっている.

V の複素化を W とおく. V の積 $\triangle$ と内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を W に複素双線型に拡張しておく. [10, Lemma 3.17] より, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は有理写像 $W \to W$ に解析接続される. Lie 群 H の複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とおく. 解析接続により, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は $H_{\mathbb{C}}$ 同変である: $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(hx) = {}^{\mathbf{s}}h^{-1}\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)\,(h \in H_{\mathbb{C}})$. W における実型 V に関する複素共役を $w \mapsto w^*$ で表すことにすると, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w^*) = \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w)^*$ が成立する.

双対錐 $\Omega^{\mathbf{s}}$ から出発して上述と同様の操作を行うことにより, 双対擬逆元写像 $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}} : \Omega^{\mathbf{s}} \to V$ を得る. $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ は $\Omega^{\mathbf{s}}$ から Ω への全単射であり, 有理写像 $W \to W$ に解析接続され, $H_{\mathbb{C}}$ 同変性をもつ: $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}({}^{\mathbf{s}}h^{-1}x) = h\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(x)\,(h \in H_{\mathbb{C}})$. また, $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(E) = E$ である. [10, Proposition 3.16] より, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ と $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ は互いの逆写像になっている. 特に $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ は双有理写像である. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ はそれぞれ $\Omega + iV, \Omega^{\mathbf{s}} + iV$ 上で正則であり, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega + iV), \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(\Omega^{\mathbf{s}} + iV)$ はそれぞれ $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ の正則領域に含まれている.

一変数の Cayley 変換が (1.1) によって与えられることに注意して, 管状領域 $\Omega + iV$ の **Cayley 変換** $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}$ を

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(w) := E - 2\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w + E) \qquad (w \in \Omega + iV)$$

で定義する．また, 双対錐 $\Omega^{\mathbf{s}}$ 上の管状領域（双対管状領域）$\Omega^{\mathbf{s}}+iV$ の双対 **Cayley** 変換 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^*$ を

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^*(w) := E - 2\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^*(w+E) \qquad (w \in \Omega^{\mathbf{s}} + iV)$$

で定める．[10, Theorem 4.20] より, Cayley 変換像 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ 及び双対 Cayley 変換像 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^*(\Omega^{\mathbf{s}}+iV)$ は共に有界である．

Ω によって決まる特別なパラメタ $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ を $d_i := \operatorname{Tr} L_{E_i}\,(i = 1, \ldots, r)$ で定義する．以上の準備のもとで, 主定理を正確に述べることができる:

定理 4.1. $\Omega + iV$ を既約な（等質）管状領域とし, $\mathbf{s} > 0$ とする．このとき, 次の 2 つは同値である:

(A) $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ と $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^*(\Omega^{\mathbf{s}}+iV)$ は共に凸である．

(B) $\Omega + iV$ は対称であり, かつ $\mathbf{s}$ は $\mathbf{d}$ の正の定数倍である．

実際には, (B) が成立するとき $d_1 = \cdots = d_r$ なので $s_1 = \cdots = s_r$ となっている (詳しくは, d_i を明示的に記述した [5] の式 (2.5) と本稿の命題 5.11 を参照).

(B)⇒(A) の証明について述べておこう[3]. (B) の成立を仮定する．$\mathbf{s} = p\mathbf{d}\,(p > 0)$ とおく．[4, Theorem 1.2] より, $\Omega = \Omega^{\mathbf{s}}$ である．さらに (4.1) より $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{s}} = p\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{d}}$ であるから, $\Omega = \Omega^{\mathbf{s}} = \Omega^{\mathbf{d}}$. Ω の特性函数を φ とおく:

$$\varphi(x) := \int_{\Omega} e^{-\langle x|y\rangle_{\mathbf{d}}}\, dy \qquad (x \in \Omega).$$

Vinberg が [14] で導入した $*$ 写像を

$$\langle x^*|y\rangle_{\mathbf{d}} = -D_y \log\varphi(x) \qquad (y \in V)$$

で定義する．[3, Proposition I.3.5] より $*$ 写像は一意的な固定点 $\widetilde{E}$ をもつ．その $\widetilde{E}$ を単位元とする Euclid 的 Jordan 代数の構造を V に入れる．このとき W は自然に複素 Jordan 代数となる．[4, Lemma 5.2] より, 可逆な $x \in V$ に対し $x^* = x^{-1}$. また [4, Subsection 5.2] より $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}(x) = x^{-1}$. よって $x^* = \mathcal{I}_{\mathbf{d}}(x)$. さらに $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{s}} = p\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{d}}$ と (4.2) から $\mathcal{I}_{\mathbf{s}} = \mathcal{I}_{\mathbf{d}}$. ゆえに $x^* = \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$. これと $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E) = E$ を使うと, $*$ 写像の固定点の一意性から $E = \widetilde{E}$. よって $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ から得られる Cayley 変換 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}$ と, §2 で e を E として得られる Cayley 変換 $\mathcal{C}$ は一致する．従って

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV) = \mathcal{C}(\Omega+iV) = \{w \in W \mid |w| < 1\}.$$

ゆえに $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ は凸集合である．また, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^*(x) = \mathcal{I}_{\mathbf{s}}^{-1}(x) = x^{-1}$ であるから $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^* = \mathcal{C}_{\mathbf{s}}$. よって $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^*(\Omega^{\mathbf{s}}+iV) = \mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ となる．これで (A) が成立することが証明された．

[3] 本稿で述べる証明の方法は, 論文 [5] の §4 とは多少異なる．そこでは Vinberg の $*$ 写像の定義に内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{s}}$ を用いたが, 本稿では内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbf{d}}$ を用いている．

§5　(A)⇒(B) の証明の概略.

この節で我々が用いる証明の方法は [4] のものと似ており, 3 段階に分けて計算を行い, 順次情報を引き出していく. ただし計算の各段階において, [4] ではある一点をとってその Cayley 変換像を計算するだけであったが, 本稿ではある 2 点をとってその Cayley 変換像を端点にもつ線分を計算するので, 計算はより複雑になっている.

$W_{kj} := (V_{kj})_{\mathbb{C}}\,(1 \le j \le k \le r)$ とおく. (3.1) と同様の事実が W でも成立する:

$$\begin{gathered} W_{lk} \triangle W_{kj} \subset W_{lj}, \\ \text{もし } k \neq i, j \text{ ならば } W_{lk} \triangle W_{ij} = 0, \\ W_{lk} \triangle W_{mk} \subset W_{lm} \text{ or } W_{ml} \; (l \text{ と } m \text{ の大小関係に依存する}). \end{gathered} \tag{5.1}$$

以後, この節では整数 j, k, l は $j < k < l$ を満たすとする. また, $w_{kj}, w_{lj}, w_{lk} \in W$ はそれぞれ $w_{kj} \in W_{kj}, w_{lj} \in W_{lj}, w_{lk} \in W_{lk}$ であるとする. 表記を簡略化するため $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を $\langle \cdot | \cdot \rangle$ と書くことにし, $\nu[w] := \langle w | w \rangle\,(w \in W)$ とおく. $\nu[iw] = -\nu[w]$ となっていることに注意する.

具体的な計算に入る前に, clan に対して常に成立する事実をいくつか述べておこう. w_{lj}, w_{kj} が与えられたとき,

$$S_{lk} := \tfrac{1}{2}(w_{lj} \triangle w_{kj} + w_{kj} \triangle w_{lj})$$

とおく. (5.1) より $S_{lk} \in W_{lk}$ である. 擬逆元を計算する際に次の公式を使う.

命題 5.1 ([4, Proposition 4.2]). $t_j, t_k, t_l \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} &\exp(L_{w_{lj}} + L_{w_{kj}}) \exp(L_{w_{lk}}) \exp(t_j H_j + t_k H_k + t_l H_l) E \\ &\quad = \sum_{m \neq j,k,l} E_m + e^{t_j} E_j + (e^{t_k} + (2s_k)^{-1} e^{t_j} \nu[w_{kj}]) E_k \\ &\qquad + \big(e^{t_l} + (2s_l)^{-1} e^{t_k} \nu[w_{lk}] + (2s_l)^{-1} e^{t_j} \nu[w_{lj}]\big) E_l \\ &\qquad + e^{t_j} w_{lj} + e^{t_j} w_{kj} + (e^{t_j} S_{lk} + e^{t_k} w_{lk}). \end{aligned}$$

命題 5.2 ([4, Proposition 4.6]). $t_j, t_k, t_l \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} &{}^{\mathbf{s}}\big(\exp(L_{w_{lj}} + L_{w_{kj}}) \exp(L_{w_{lk}}) \exp(t_j H_j + t_k H_k + t_l H_l)\big)^{-1} E \\ &= \sum_{m \neq j,k,l} E_m + \big(e^{-t_j} + (2s_j)^{-1}(e^{-t_k} + (2s_k)^{-1} e^{-t_l} \nu[w_{lk}]) \nu[w_{kj}] \\ &\qquad\qquad + (2s_j)^{-1} e^{-t_l} \nu[w_{lj}] - s_j^{-1} e^{-t_l} \langle S_{lk} | w_{lk} \rangle\big) E_j \\ &\quad + (e^{-t_k} + (2s_k)^{-1} e^{-t_l} \nu[w_{lk}]) E_k + e^{-t_l} E_l \\ &\quad + \big(e^{-t_l}\, {}^{\mathbf{s}}L_{w_{lj}} w_{lk} - (e^{-t_k} + (2s_k)^{-1} e^{-t_l} \nu[w_{lk}]) w_{kj}\big) \\ &\quad + e^{-t_l}({}^{\mathbf{s}}L_{w_{kj}} w_{lk} - w_{lj}) - e^{-t_l} w_{lk}. \end{aligned}$$

さらに $v_{lk}\in V_{lk}, v_{kj}\in V_{kj}$ とするとき, 次の等式が成立する [4, Lemma 4.7]:

$$\|v_{lk}\triangle v_{kj}\|^2=(2s_k)^{-1}\|v_{lk}\|^2\|v_{kj}\|^2. \tag{5.2}$$

$n_{kj}:=\dim V_{kj}\,(1\le j<k\le r)$ とおく. (5.2) より次の事実が導かれる [4, Lemma 4.8].

補題 5.3. (1) $n_{kj}\neq 0$ ならば $n_{lj}\ge n_{lk}$.

(2) $n_{lk}\neq 0$ ならば $n_{lj}\ge n_{kj}$.

$v_{lj}\in V_{lj}, v_{kj}\in V_{kj}$ に対し,

$$U_{lk}:=\tfrac{1}{2}(v_{lj}\triangle v_{kj}+v_{kj}\triangle v_{lj})$$

とおく. (3.1) より $U_{lk}\in V_{lk}$ である. 一般に次のノルム不等式が成立する:

補題 5.4 ([4, Lemma 4.9]). $\|U_{lk}\|^2\le(2s_k)^{-1}\|v_{lj}\|^2\|v_{kj}\|^2$.

さて, 定理 4.1 の (A) の成立を仮定しよう. このとき, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV), \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(\Omega^{\mathbf{s}}+iV)$ も共に凸集合であることがわかる.

第 1 段階として $s_1=\cdots=s_r$ を証明する. $n_{kj}\neq 0$ を仮定する. $v_{kj}\in V_{kj}, v_{kj}\neq 0$ に対し, $z_1:=\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E+iv_{kj})$, $z_2:=\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E-i_{kj})=\overline{z}_1$ とおく. 仮に $s_k>s_j$ であるとする. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ の凸性より, 2 点 z_1,z_2 を結ぶ線分は $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega+iV)$ に含まれている. この情報を解析していくと次の不等式を得る:

$$\frac{s_j}{s_k}\frac{2s_k+\|v_{kj}\|^2}{\|v_{kj}\|^2}\le\frac{2s_js_k}{(s_k-s_j)\|v_{kj}\|^2}.$$

v_{kj} は任意であるから, この不等式において $\|v_{kj}\|\to\infty$ とすると $s_j/s_k\le 0$ が得られるので矛盾が起きる. よって $s_k\le s_j$ である.

同様に $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(\Omega^{\mathbf{s}}+iV)$ の凸性を用いて, $z_1:=\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(E+iv_{kj})$, $z_2:=\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(E-iv_{kj})=\overline{z}_1$ に対して同様の議論を行うと $s_k\ge s_j$ が得られ, 結局次の命題が従う.

命題 5.5. $n_{kj}\neq 0$ ならば $s_k=s_j$.

ここで Ω は既約としているから, [1, Theorem 4] より, 任意の j,k に対して相異なる自然数から成る列 $\{j_\lambda\}_{\lambda=0}^m$ $(j_0=k,\ j_m=j)$ で $n_{j_{\lambda-1}j_\lambda}\neq 0$ を満たすものが存在する. ただし, $j_{\lambda-1}<j_\lambda$ のときは $n_{j_{\lambda-1}j_\lambda}:=n_{j_\lambda j_{\lambda-1}}$ とする. これを用いると,

命題 5.6. $s_i\,(i=1,\dots,r)$ は i によらず一定である.

以後 $s_i\,(i=1,\dots,r)$ を単に s と書く.

次に, $n_{lk}\neq 0$ ならば $n_{lj}\le n_{kj}$ であることを証明する. $n_{lk}\neq 0$ を仮定する. $n_{lj}=0$ ならばこの不等式は明らかに成立するから, $n_{lj}\neq 0$ とする. 0 でない

$v_{lj} \in V_{lj}, v_{lk} \in V_{lk}$ をとる. $z_{kj} := -{}^{\mathbf{s}}L_{v_{lj}} v_{lk}$ とおく. [4, Lemma 4.4] より $z_{kj} \in W_{kj}$ であり, さらに v_{lj}, v_{lk} が実ベクトルであるから $z_{kj} \in V_{kj}$ であることに注意. 2 点 $z_1 := \mathcal{I}_{\mathbf{s}}^*(E + i(v_{lk} - {}^{\mathbf{s}}L_{z_{kj}} v_{lk} + v_{lj}))$, $z_2 := \overline{z}_1$ を考える. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^*(\Omega^{\mathbf{s}} + iV)$ は凸であるから, z_1 と z_2 を結ぶ線分は $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^*(\Omega^{\mathbf{s}} + iV)$ に含まれている. このことから, やや複雑な計算を経て次の不等式を得る:

$$(2s)^{-1} \|v_{lj}\|^2 \|v_{lk}\|^2 \leq \|z_{kj}\|^2.$$

これより, V_{kj} の正規直交基底をとって $\|z_{kj}\|^2$ を計算したり, V_{lj} の正規直交基底をとって, v_{lj} にその上を走らせるなどの操作によって, $n_{lj} \leq n_{kj}$ を得る. これと補題 5.3 (2) を合わせて,

命題 5.7. $n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{lj} = n_{kj}$.

第 3 段階としては次の補題を証明するのであるが. 本稿では詳細は省略する.

補題 5.8. $\|U_{lk}\|^2 = (2s)^{-1} \|v_{lj}\|^2 \|v_{kj}\|^2$.

ここで $n_{kj} \neq 0$ と仮定し, $v_{kj} \neq 0$ をとって線型写像 $V_{lj} \ni v_{lj} \mapsto U_{lk} \in V_{lk}$ を考える. 補題 5.8 よりこの線型写像は単射となり, 次の命題が従う.

命題 5.9. $n_{kj} \neq 0$ ならば $n_{lk} = n_{lj}$.

これより先の議論は [11, Subsection 5.5] に平行である. 命題 5.7, 5.9 を使うことによりまず次の補題が出る (証明は [11, Lemma 5.15] を参照されたい):

補題 5.10. もし n_{lk}, n_{lj}, n_{kj} のうち少なくとも 2 つが 0 でなければ, これら 3 つは全て等しい.

この補題と浅野氏による定理 [1, Theorem 4] を用いた帰納的な議論から, n_{kj} $(1 \leq j < k \leq r)$ はすべて等しいことが証明される (証明は [11, Proposition 5.16]). すると次の Vinberg の定理より Ω は対称錐となる.

命題 5.11 ([15, Proposition 3]). 既約な等質錐 Ω が対称錐であるための必要十分条件は n_{kj} $(1 \leq j < k \leq r)$ が j, k に依らず一定なことである.

[3, Theorem X.1.1] より $\Omega + iV$ は対称となり, 定理 4.1 の証明が完了する.

参考文献

[1] H. Asano, *On the irreducibility of homogeneous convex cones*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **15** (1968), 201-208.

[2] J. Dorfmeister, *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains*, Amer. J. Math., **102** (1980), 537–563.

[3] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[4] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, preprint, Kyoto-Math., 2004-4, to appear in Diff. Geom. Appl.

[6] A. Korányi and J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math., **81** (1965), 265–288.

[7] O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lecture Notes, Univ. California at Irvine, 1977.

[8] T. Nomura, *On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185-206.

[9] T. Nomura, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, Transform. Groups, **6** (2001), 227–260.

[10] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl., **18** (2003), 55-78.

[11] T. Nomura, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal., **198** (2003), 229-267.

[12] R. Penney, *The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in* $\mathbb{C}^n$, in "Topics in Geometry in Memory of Joseph D'Atri," Ed. by S. Gindikin, Birkhäuser, Boston, 1996, 295-313.

[13] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo–Princeton, 1980.

[14] E. B. Vinberg, *The theory of the convex homogeneous cones*, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **12**, 303-358.

[15] E. B. Vinberg, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **13**, 56-83; Trans. Moscow Math. Soc., **13**, 63-93.