# Bochner-Hecke 等式の表現論的証明

野　村　隆　昭　　　　　　　　　　　京 大 理

$n \geqq 3$ とし, $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}$-係数 $j$ 次斉次調和多項式の全体を $\mathcal{HP}_j$ で表す.

$\boxed{\text{Bochner-Hecke 等式.}}$ $p \in \mathcal{HP}_j$ のとき,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi\cdot x}\, dx = i^{-j} p(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}. \tag{1}$$

通常, この等式の証明は調和函数の平均値定理を用いてなされる (*e.g.*, [**1**]). ここでは, $G = SO(n, \mathbb{R})$ の $\mathcal{HP}_j$ への自然な表現 : $T(g)p(x) = p(g^{-1}x)$ $(g \in G, p \in \mathcal{HP}_j)$ が既約である事を応用した証明を報告したい.

各 $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $q_c(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ とおく. $\mathcal{N} = \{\, c \in \mathbb{C}^n\, ;\, c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 0 \,\}$ とすると, $\mathcal{N}$ は $O(n, \mathbb{C})$-不変, 従って $SO(n, \mathbb{R})$-不変な集合である. $q_c^j(x) = q_c(x)^j$ とおくと, 表現 $(T, \mathcal{HP}_j)$ が既約なことと

$$\begin{cases} \varDelta q_c^j = j(j-1)(c_1^2 + \cdots + c_n^2) q_c^{j-2}, \\ T(g) q_c^j = q_{gc}^j \end{cases}$$

とから次の補題を得る.

$\boxed{\textbf{補題.}}$ $\operatorname{span}\{\, q_c^j\, ;\, c \in \mathcal{N} \,\} = \mathcal{HP}_j$.

従って, $p = q_c^j$ $(c \in \mathcal{N})$ のときに (1) を示せばよい. しかしこれは,

$$\begin{cases} q_c(D) e^{-\|\xi\|^2/2} = -q_c(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}, \\ q_c(D) q_c^m = m q_c(c) q_c^{m-1} \end{cases}$$

より, $c \in \mathcal{N}$ のとき, $q_c^j(D) e^{-\|\xi\|^2/2} = (-1)^j e^{-\|\xi\|^2/2} q_c^j(\xi)$ が示されることより明らかである. ∎

この証明の mechanism は, $p \in \mathcal{HP}_j$ のとき,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S^{n-1}} p(u) e^{-i\xi\cdot u}\, d\sigma(u) = i^{-j}\, \|\xi\|^{-\frac{n-2}{2}-j}\, p(\xi)\, J_{\frac{n-2}{2}+j}(\|\xi\|), \tag{2}$$

（ただし, $\sigma$ は $S^{n-1}$ 上の Borel 測度で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty r^{n-1}\,dr \int_{S^{n-1}} f(ru)\,d\sigma(u)$ となるもので, $J_\lambda$ は Bessel 函数）の証明や

$$p(D)(\|x\|^\alpha) = \left[\prod_{m=0}^{j-1} (\alpha - 2m)\right] \|x\|^{\alpha-2j} p(x) \tag{3}$$

の証明にも応用できる.

ただ, 残念ながら本日報告した証明が, 好みにも依るが, 最も簡単なものという訳ではない. 次数 $j$ についての帰納法に Euler 作用素 $E = x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ を援用すると, 初等 Fourier 解析だけで (1), (2) が証明されてしまう. この帰納法はもちろん (3) にも有効である.

## 参考文献


[1] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.