Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone

京大理　　野 村 隆 昭　　(Takaaki NOMURA)

よく知られた例から始めよう．[**8**], [**12**] 参照．実 $r\times r$ 対称行列のなすベクトル空間を $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ で表す．$\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ は自然な内積 $\langle x,y\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ を持つ．正定値なもの全体から成る $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ の部分集合を Ω とする．Ω は $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ の開凸錐で，しかも内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して自己双対である．すなわち，

$$\Omega = \{\, y\in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})\,;\ \langle x,y\rangle > 0 \quad \text{for}\,\forall x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}\,\}$$

($\overline{\Omega}$ は Ω の閉包) が成り立つ．線型 Lie 群 $GL(r,\mathbb{R})$ は $\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ に $x\mapsto g\,x\,{}^tg$ により作用していて，Ω はこの作用による単位行列 $e\in\Omega$ の $GL(r,\mathbb{R})$-軌道になっている．Ω 上の微分作用素で，$GL(r,\mathbb{R})$ の作用と可換なものの全体を $\mathbf{D}(\Omega)^{GL(r,\mathbb{R})}$ とする．このとき，r 個の微分作用素

$$\mathrm{tr}\left(\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\right) \qquad (j=1,2,\dots,r)$$

は $\mathbf{D}(\Omega)^{GL(r,\mathbb{R})}$ の代数的に独立な生成元になっている．

本稿では，この結果を任意の自己双対な開凸錐 (以下対称錐と呼ぶ) に，その分類を用いずしかも explicit な形で, 一般化する．そのために，1950 年代の終わりに，Koecher [**7**] や Vinberg [**13**] によって発見された事実 — 任意の対称錐はある種の Jordan 代数によって記述される — を用いる．

§1. Jordan 代数

Jordan 代数の定義から始めよう．証明は [**1**], [**3**], [**5**], [**6**], [**11**] 等を見られたい．実ベクトル空間 V に次の (1), (2) をみたす双線型写像 (すなわち, 積) $V\times V\ni(x,y)\mapsto xy\in V$ が定義されているとき，V を <u>実 Jordan 代数</u> という:
$\forall x,y\in V$ に対して，　　(1)　$xy=yx$,　　(2)　$x^2(xy)=x(x^2y)$.

ここでは，結合律は仮定されていないことに注意．各 $x \in V$ に対して，作用素 $L(x)$ を

$$L(x)y = xy \qquad (y \in V)$$

で定義する．2 つの作用素 A, B に対して, $[A, B] = AB - BA$ とおくと，(2) は作用素の等式として

$$[L(x), L(x^2)] = 0$$

と書き直せることに注意しておく．

さて，Jordan 代数 V は非結合的代数であるが，べきに関しては指数法則が成り立っている (この意味で，Jordan 代数は power associative algebra になっている)．そして，V 上の i 次の斉次多項式函数 $\sigma_i\,(1 \leqq i \leqq d)$ が存在して

$$m_x(\lambda) = \lambda^d - \sigma_1(x)\lambda^{d-1} + \sigma_2(x)\lambda^{d-2} + \cdots + (-1)^d\sigma_d(x)$$

が，V のある Zariski-dense な開集合に属する $\forall x$ に対して，x の最小多項式になること，及び $m_x(\lambda)$ の既約成分は，x の最小多項式の 1 つの因数になっていることが知られている [**5**]．多項式 $m_x(\lambda)$ は $x \in V$ の一般最小多項式と呼ばれ，d を V の <u>degree</u> という．以下では,

$$T(x) = \sigma_1(x)$$

とおいて，線型形式 T を V の <u>trace</u> と呼ぶことにする．

実 Jordan 代数 V において,

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad \text{ならば} \qquad x = y = 0$$

が成り立つとき，V は <u>形式的実</u> であるという．形式的実 Jordan 代数は必ず単位元 e を持つ．以下，Jordan 代数 V は形式的実であるとする．V の 0 でないべき等元の系 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ が <u>直交系</u> であるとは，$i \neq j$ ならば $e_i e_j = 0$ が成り立つことであり，それが<u>完全</u> であるとは，$e_1 + \cdots + e_k = e$ (単位元) となることである．

命題 1.1(スペクトル分解)**.** V の各元 x に対して，0 でないべき等元の完全直交系 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ と実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k\,(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k)$ が存在して，$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ と表される．それらは一意的で, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ のことを，x の <u>固有値</u> という．∎

0 でないべき等元は原始べき等元の直交和に分解できるから，特に単位元 e は原始べき等元の直交和として $e = e_1 + \cdots + e_r$ と，分解できることがわかる．ここで，r は原始べき等元の完全直交系のとり方によらず一定で，V の <u>階数</u> と呼ばれ，上述の degree に一致する．

命題 1.2. Jordan 代数 V において，次の (1) $\sim$ (3) は同値：
(1) Vは形式的実.
(2) 対称双線型形式 $x, y \mapsto \operatorname{tr} L(xy)$ は正定値.
(3) 対称双線型形式 $x, y \mapsto T(xy)$ は正定値. ∎

例. $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に $xy = (x \cdot y + y \cdot x)/2$ (右辺の $\cdot$ は通常の行列の乗法) で積を入れると，$\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ は形式的実 Jordan 代数になる．実際，$x^2 + y^2 = 0$ なら $x \cdot x + y \cdot y = 0$ だから，$\forall \xi \in \mathbb{R}^r$ に対して

$$0 = {}^t\xi \cdot (x \cdot x + y \cdot y) \cdot \xi = |x \cdot \xi|^2 + |y \cdot \xi|^2.$$

これより $x = y = 0$ が出る．∎

V の各元 x に対して，作用素 $P(x)$ を

$$P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2) \qquad (x \in V)$$

で定義する．対応 $P : x \mapsto P(x)$ は V の quadratic representation と呼ばれる ($P(xy) = P(x)P(y)$ は一般に成り立たないけれども)．この P について次の公式が成り立つ：$\forall x, y \in V$ に対して

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x), \tag{1.1}$$

$$P(x^n) = P(x)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

さて, V の元 x に対して，x で生成される V の部分代数を $\mathbb{R}[x]$ で表そう．V は power-associative だから，$\mathbb{R}[x]$ では結合律が成立していることに注意.

命題 1.3. V の元 x に対して, 次の (1) $\sim$ (4) は同値：
(1) 作用素 $P(x)$ は可逆，すなわち，$\det P(x) \neq 0$.
(2) $\mathbb{R}[x]$ の元 y が存在して，$xy = e$.
(3) V の元 y が存在して，$xy = e$ かつ $[L(x), L(y)] = 0$.
(4) V の元 y が存在して，$xy = e$ かつ $x^2 y = x$. ∎

命題 1.3 の条件をみたす x は 可逆 であるといわれる．(3) より x の逆元 y の一意性がわかり，(1) を用いると，$y = P(x)^{-1}x$ で与えられることがわかる．可逆元の全体を $V^\times$ で表す．このとき,

$$P(x^{-1}) = P(x)^{-1} \qquad (\forall x \in V^\times). \tag{1.3}$$

V には $\langle x, y \rangle := T(xy)$ で内積を入れておく (命題1.2). このとき, 任意の $x \in V$ に対して, $L(x), P(x)$ は自己共役作用素である.

命題 1.4. 次の 5 つの V の部分集合は同一である :
(1) $\mathrm{Int}\{\, x^2 \,;\, x \in V \}$ (Int は集合の内部).
(2) $\{\, x^2 \,;\, x \in V^\times \,\}$.
(3) $V^\times$ の単位元の連結成分.
(4) $\{\, x \in V \,;\, L(x)$ は正定値$\,\}$.
(5) $\{\, x \in V \,;\, x$ の固有値はすべて正$\,\}$. ∎

命題1.4で定義される V の部分集合を Ω で表す. Ω は V の開凸錐で内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して自己双対である. Ω のことを V の 対称錐 という. $x \in \Omega$ ならば, $P(x)$ は正定値であることも注意しておこう.

さて, 写像 $F : \Omega \ni x \mapsto x^2 \in \Omega$ を考えよう. $x_0 \in V$ での Fréchet 微分は $2L(x_0)$ で, しかもスペクトル分解を考えることにより容易に F が上への写像であることがわかるから, F は Ω から Ω の上への微分同相である. F の逆写像を $\Omega \ni y \mapsto y^{1/2} \in \Omega$ と表す.

V 上の実一般線型群を $GL(V)$ とし

$$G(\Omega) := \{\, g \in GL(V) \,;\, g\Omega = \Omega \,\}$$

とおく. $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であるから, $G(\Omega)$ は Lie 群になる. Ω が自己双対であるので, $G(\Omega)$ は reductive な Lie 群である.

補題 1.5. $x \in V^\times$ なら $P(x) \in G(\Omega)$.

証明. (1.1) より, $\forall y \in \Omega$ に対して $P(x)y$ は可逆 ($i.e.$ $\exists P(P(x)y)^{-1}$) であるから $P(x)y \in V^\times$. そして $P(x)e = x^2 \in \Omega$ だから, $P(x)\Omega$ は $V^\times$ の連結開集合で, Ω と共通部分を持つ. ゆえに, $P(x)\Omega \subset \Omega$. これと (1.3) より $P(x)\Omega = \Omega$. すなわち, $P(x) \in G(\Omega)$. ∎

任意の $x \in \Omega$ に対して, $P(x^{1/2})e = x$ ゆえ, 補題1.5から特に $\Omega = G(\Omega)e$ であることがわかる.

§2. 不変多項式

以下, 形式的実 Jordan 代数 V は単純で階数が r であるものとする. V の自己同型がなす群を K で表す. すなわち,

$$K := \{\, g \in GL(V) \,;\, g(xy) = (gx)(gy) \quad \text{for} \, \forall x, y \in V \,\}.$$

一般最小多項式の K-不変性：$m_x(\lambda) = m_{kx}(\lambda)$ $(\forall k \in K, x \in V)$ から，K は V の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する直交群 $O(V)$ の閉部分群になることがわかる．従って，K 自身コンパクト Lie 群である．V 上の K-不変な多項式函数のなす代数を $\mathrm{Pol}(V)^K$ で表す．$\mathrm{Pol}(V)^K$ については，次の結果が知られている．

命題 2.1(U. Hirzebruch [**4**])**.** r 個の V 上の多項式函数

$$f_j(x) := T(x^j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

は $\mathrm{Pol}(V)^K$ の代数的に独立な生成元である．∎

次の命題は J. Faraut 教授に教わった．

命題 2.2. $f \in \mathrm{Pol}(V)^K$ とすると，函数

$$\Omega \times V \ni (x, y) \mapsto f(P(x^{1/2})y)$$

は，$p(x, y) = p(y, x)$ $(\forall x, y \in V)$ である様な $V \times V$ 上の多項式函数 p の $\Omega \times V$ への制限である．∎

証明は，Faraut 氏の承諾を得て，[**9**] に書いておいた．

例 1. 命題 2.2 で $f = T = f_1$ とすると

$$T(P(x^{1/2})y) = \langle P(x^{1/2})y, e \rangle = \langle y, x \rangle \tag{2.1}$$

であるから，$p(x, y) = \langle x, y \rangle$．∎

例 2. 一般最小多項式の定数項の $(-1)^r$ 倍，すなわち，$\sigma_r(x)$ を $N(x)$ と書こう．もちろん，$N \in \mathrm{Pol}(V)^K$．このとき，

$$N(P(x^{1/2})y) = N(x)N(y). \tag{2.2}$$

従って，$p(x, y) = N(x)N(y)$．$V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ のときは，$N(x) = \det x$，$P(x^{1/2})y = x^{1/2} \cdot y \cdot x^{1/2}$ であるから，(2.2) は $\det(x^{1/2} \cdot y \cdot x^{1/2}) = (\det x)(\det y)$ という式に他ならない．∎

命題 2.1 の f_j に対して，$f_j(P(x^{1/2})y)$ を例 1 の様に，explicit に表そう．

命題 2.3. $\forall x \in \Omega$ と $\forall y \in V$ に対して,

$$f_{2m-1}(P(x^{1/2})y) = \langle (P(x)P(y))^{m-1}\, x, y\rangle, \tag{1}$$

$$f_{2m}(P(x^{1/2})y) = \langle (P(x)P(y))^{m-1}\, x, (y\Box x)y\rangle. \tag{2}$$

ただし, $y\Box x = L(yx) + [L(y), L(x)]$. ∎

注意. 命題 2.2 より, 命題 2.3 (1), (2) の右辺は, x, y について対称である. 作用素 $P(x)$ が自己共役であったから, (1) の右辺が x, y について対称なことは直接読み取れる. (2) の右辺については, 作用素 $y\Box x$ の adjoint が $x\Box y$ となること, 及び Jordan 代数 (というより Jordan 3 重系) での基本的な公式 :

$$(x\Box y)P(x) = P(x)(y\Box x)$$

からわかる.

以下,

$$p_{2m-1}(x, y) := \langle (P(x)P(y))^{m-1}\, x, y\rangle, \tag{2.3}$$

$$p_{2m}(x, y) := \langle (P(x)P(y))^{m-1}\, x, (y\Box x)y\rangle \tag{2.4}$$

とおく. 各 p_j は $V \times V$ 上の多項式函数であるが, さらに

命題 2.4. 各 $j = 1, 2, \ldots, r$ について,

$$p_j(gx, {}^t g^{-1} y) = p_j(x, y) \qquad \text{for}\, \forall g \in G(\Omega), x \in V, y \in V$$

が成り立つ. ただし, ${}^t g$ は 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する g の adjoint. ∎

さて, $G(\Omega)$ を $V \times V$ に

$$g \cdot (x, y) = (gx, {}^t g^{-1} y) \tag{2.5}$$

で作用させる.

補題 2.5. $\Omega \times V$ 上の C^∞-函数 L は, (2.5) による $G(\Omega)$ の作用で不変で, かつ各 $x \in \Omega$ を固定するとき, $y \mapsto L(x, y)$ は V 上の多項式函数であるとする. このとき, r 変数の多項式函数 Q が存在して,

$$L(x, y) = Q(p_1(x, y), \ldots, p_r(x, y)) \qquad (\forall x \in \Omega, \forall y \in V)$$

となる．ここで，p_j は (2.3),(2.4) で定義されたものである．

証明は，$K \subset O(V)$ に注意して，$l(y) := L(e, y)$ で定義される V 上の多項式函数 l が $\mathrm{Pol}(V)^K$ に属することと，U. Hirzebruch の結果 (命題 2.1)，及び $L(x, y) = l(P(x^{1/2})y)$ となることを用いる．∎

(2.5) による $G(\Omega)$ の作用で不変な $V \times V$ 上の多項式函数のなす代数を $\mathrm{Pol}(V \times V)^{G(\Omega)}$ で表そう．命題 2.2 を精密化すると

定理 2.6. 各 $f \in \mathrm{Pol}(V)^K$ に対して，

$$p_f(x, y) := f(P(x^{1/2})y) \qquad (x \in \Omega, y \in V)$$

とおくと，写像 $f \mapsto p_f$ は，$\mathrm{Pol}(V)^K$ から $\mathrm{Pol}(V \times V)^{G(\Omega)}$ の上への algebra isomorphism を与える．∎

§3. $G(\Omega)$-不変微分作用素

$G(\Omega)$ の V への作用は線型であったから，$G(\Omega)$ の $V \times V$ への作用 (2.5) を $\Omega \times V$ に制限すると，それは Ω の余接束 $T^*(\Omega) \approx \Omega \times V$ への $G(\Omega)$ の自然な作用に他ならない．(2.3), (2.4) で定義された p_j を用いて，微分作用素 $p_j(x, \partial/\partial x)$ を

$$p_j(x, \partial/\partial x)e^{\langle x,y \rangle} = p_j(x, y)e^{\langle x,y \rangle}$$

で定義する．

定理 3.1. r 個の微分作用素 $p_1(x, \partial/\partial x), \dots, p_r(x, \partial/\partial x)$ は, Ω 上の $G(\Omega)$-不変な微分作用素のなす代数 $\mathbf{D}(\Omega)^{G(\Omega)}$ の代数的に独立な生成元である．∎

例. $x \in \Omega$ のとき，$P(x)$ は正定値自己共役作用素であったことを思い出そう．各 $x \in \Omega$ に対して

$$B_x(u, v) := \langle P(x)u, v \rangle \qquad (u, v \in V)$$

とおくと，$B : x \mapsto B_x$ は Ω に $G(\Omega)$-不変な Riemann 構造を定義し，Ω は Riemann 対称空間となる．点 $e \in \Omega$ での symmetry は $x \mapsto x^{-1}$ (Jordan 代数 V での inverse) で与えられる．このとき，Riemann 構造 B に関する Ω 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ は

$$\Delta = p_2(x, \partial/\partial x) + \frac{n}{r} \cdot p_1(x, \partial/\partial x)$$

と表される．ここで，$p_1(x, y) = \langle x, y \rangle$ であったから，$p_1(x, \partial/\partial x)$ はいわゆる Euler 作用素である．

References

1. H. Braun and M. Koecher, "Jordan-Algebren," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
2. J. Dorfmeister and M. Koecher, *Reguläre Kegel*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **81** (1979), 109–151.
3. J. Faraut, "Algèbres de Jordan et cônes symétriques," Ecole d'été CIMPA, Univ. Poitiers, 1988.
4. U. Hirzebruch, *Invariant polynomial functions on Jordan algebras*, Algebras Groups Geom. **1** (1984), 442–445.
5. N. Jacobson, "Structure and representations of Jordan algebras," Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
6. P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. of Math. **35** (1934), 29–64.
7. M. Koecher, *Die Geodätischen von Positivitätsbereichen*, Math. Ann. **135** (1958), 192–202.
8. H. Maaß, "Siegel's modular forms and Dirichlet series," Lect. Notes in Math. **216**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
9. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone*, J. Reine Angew. Math. **400** (1989), 122–133.
10. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain*, J. Math. Kyoto Univ., to appear.
11. I. Satake, ジョルダン環とリー環 I, II, III, 科学 **51** (1981), 287–291; 387–391; 458–463.
12. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
13. E. B. Vinberg, *Homogeneous cones*, Soviet Math. Dokl. **1** (1961), 787–790.