局所コンパクト空間上の Berezin 変換と
テンソル積表現

野村 隆昭　　　京大・理

Berezin 変換は複素領域（あるいはケーラー多様体）の量子化と関連して定義されてきたが，本講演では局所コンパクト空間の一般的な枠組みで考察する．

X を第 2 可算局所コンパクト Hausdorff 空間，μ を X 上の Radon 測度とする．$L^2(X, d\mu)$ の閉部分空間 $\mathfrak{H}$ は連続函数から成り，再生核 $\kappa \in C(X \times X)$ を持つと仮定する．$\mathfrak{H}$ に付随する Berezin 変換 B とは，$L^2(X, d\mu_0)$ ($d\mu_0 := \kappa(x,x)\, d\mu$) 上の積分作用素

$$Bf(x) := \int_X \frac{|\kappa(x,y)|^2}{\kappa(x,x)\kappa(y,y)}\, f(y)\, d\mu_0(y)$$

で，それは有界な正の自己共軛作用素である．

さて，局所コンパクト群 G が X に連続に作用しているとする．そして次の仮定を置く：

(1) 連続函数 $J : G \times X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して

$$\begin{cases} J(e,x) = 1 & (\forall x \in X), \\ J(g_1g_2, x) = J(g_1, g_2x)J(g_2, x) & (g_1, g_2 \in G,\ x \in X). \end{cases}$$

(2) 次式が G のユニタリ表現を $L^2(X, d\mu)$ に定義する：

$$\pi(g)f(x) = J(g^{-1}, x)^{-1} f(g^{-1}x).$$

(3) 閉部分空間 $\mathfrak{H}$ は $\pi(G)$-不変である．

$\boxed{\textbf{補題}\ 1.}$ (1) $d\mu(gx) = |J(g,x)|^{-2}\, d\mu(x)$ ($g \in G,\ x \in X$).
(2) $\kappa(gx, gy) = J(g,x)\kappa(x,y)\overline{J(g,y)}$ ($g \in G,\ x, y \in X$).
特に $N := \{x \in X\ ;\ \kappa(x,x) = 0\}$ とおくとき，N，$X_0 := X \setminus N$ は G-不変集合であり，$d\mu_0$ は G-不変測度である．　□

補題 1 の最後の主張から，$L^2(X_0, d\mu_0)$ 上に G のユニタリな quasi-regular 表現 $\rho(g)f(x) := f(g^{-1}x)$ が実現されていることになる．

$\mathfrak{H}^\dagger$ で underlying 実 Hilbert 空間が $\mathfrak{H}$ と同一で，$\mathfrak{H}$ に反線型同型な Hilbert 空間を表すことにする．そして，$\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ を $\mathfrak{H}$ と $\mathfrak{H}^\dagger$ のテンソル積 Hilbert 空間とする．

補題 2. $M\left(\sum_j \xi_j \otimes \eta_j\right)(x) := \dfrac{1}{\kappa(x,x)} \sum_j \xi_j(x)\overline{\eta_j(x)}$ $(x \in X_0)$ は $A = \sum_j \xi_j \otimes \eta_j \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ の表し方に依らず定まり，M は $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ から $L^2(X_0, d\mu_0)$ への G-共変な有界線型作用素である ($\|M\| \leqq 1$). $\square$

定理 1. (1) $\overline{\mathrm{Range}\,(M)}$ は $\rho(G)$-不変で，$\pi \otimes \pi^\dagger|_{\mathrm{Ker}\,(M)^\perp}$ に同値な G の表現が載っている．
(2) B は $\rho(g)$ $(g \in G)$ と可換であり，$\overline{\mathrm{Range}\,(M)}$ は B で不変．そして $\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Range}\,(M)^\perp$. $\square$

例. コンパクト Lie 群 K が n-次元実ベクトル空間に線型に作用しているとする．X に K-不変な内積を入れて Gauss 測度 $d\mu(x) := \pi^{-n/2}e^{-\|x\|^2}\,dx$ を考える．$L^2(X, d\mu)$ には K のユニタリ表現 π が $\pi(k)f(x) = f(k^{-1}x)$ で実現されている．X 上の多項式函数の全体 $\mathcal{P}(X)$ は明らかに $\pi(K)$-不変である．$\mathcal{P}(X)$ の部分空間 $\mathfrak{H}$ で $\pi(K)$-既約なものを考える（必然的に $\dim \mathfrak{H} < \infty$）．明らかに $\mathfrak{H}$ は再生核を持ち，補題 1 の集合 N は μ-零集合である．$\mathfrak{H}$ に付随する Berezin 変換を B とする．

定理 2. K-不変な函数のなす閉部分空間 $L^2(X, d\mu_0)^K$ には B は定数函数のなす 1 次元部分空間への直交射影作用素として働く． $\square$

講演では $K = SO(n, \mathbb{R})$ で，$\mathfrak{H}$ が m-次斉次調和多項式 $(m = 0, 1, \dots)$ の空間のときの Berezin 変換のスペクトル分解も例として述べる．

References

T. Nomura, Berezin transforms and group representations, J. Lie Theory, **8** (1998), 433–440 (`http://www.emis.de/journals/JLT/vol.8_no.2/18.html`).

T. Nomura, Invariant Berezin transforms, preprint, 1998.