Berezin transforms related to multiplicity-free actions (3): $U(2)\times U(2)$-action on $M(2,\mathbb{C})$

野村 隆昭　　京大・理

2 次の複素正方行列全体のなすベクトル空間 $V := M(2,\mathbb{C})$ への，$K = U(2)\times U(2)$ の左右からの作用も重複度フリーな作用になっている．$\mathcal{P}(V)$ の K-既約分解は,

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+,\, l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+} \mathcal{P}^{m,l}(V).$$

ここで $\mathcal{P}^{m,l}(V)$ は，次の $GL(2,\mathbb{C})$ の複素解析的な既約多項式表現 $T^{m,l}$ の行列要素で張られる空間である：

$$T^{m,l}(g)p(z) := (\det g)^m p(zg) \qquad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ g \in GL(2,\mathbb{C}))$$

$$p \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{C}^2) : \mathbb{C}^2 \text{ 上の次数 } 2l \text{ の斉次多項式の空間.}$$

表現 $T^{m,l}$ の指標を $\xi^{m,l}(g) := \operatorname{tr} T^{m,l}(g)$ とするとき，$\mathcal{P}^{m,l}(V)$ の再生核 $\kappa^{m,l}$ は次式で与えられる：

$$\kappa^{m,l}(Z,W) = \frac{2l+1}{m!\,(m+2l+1)!}\,\xi^{m,l}(W^*Z).$$

$\mathfrak{H}^{m,l}(V) := \{F(Z,Z)\ ;\ F \in \mathcal{P}^{m,l}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}^{m,l}(V)}\}$ とおくとき，これの K-既約分解をあからさまに書き下せる．それは $GL(2,\mathbb{C})$ の，空間 $\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2) := \{h(z,z)\ ;\ h \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{C}^2)\otimes\overline{\mathcal{P}_{2l}(\mathbb{C}^2)}\}$ への表現 $\tau^l(g)\varphi(z) := \varphi(zg)$ の行列要素を用いてなされる．そのための基底の取り方は，$\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2)$ の $U(2)$-既約分解に沿うようにする：

$$\mathfrak{H}_{ll}(\mathbb{C}^2) = \sum_{k=0}^{2l} \|z\|^{2(2l-k)}\cdot\mathcal{H}_{k/2,\,k/2}(\mathbb{C}^2) =: \sum_{k=0}^{2l}\mathcal{F}^l_k(\mathbb{C}^2).$$

ただし，$\mathcal{H}_{jj}(\mathbb{C}^2) := \{h \in \mathfrak{H}_{jj}(\mathbb{C}^2)\ ;\ \Delta h = 0\}$（調和多項式の空間）.
$\mathcal{F}^l_k(\mathbb{C}^2)$ の $U(2)$-標準基底（これもあからさまに取れる）を $\{\phi^{l,k}_j\}_j$ とし，$\tau^{l,k'k}_{j'j}(g) := (\tau^l(g)\phi^{l,k}_j \mid \phi^{l,k'}_{j'})$ とおき，次の函数空間を考える.

$$\mathcal{T}^{m,l}_{k'k}(V) := \operatorname{span}\{|\det(\cdot)|^{2m}\cdot\tau^{l,k'k}_{j'j}\ ;\ j', j\}.$$

定理 1. $\mathfrak{H}^{m,l}(V) = \sum_{k,k'=0}^{2l} \mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$（$K$-既約分解）.

$\mathcal{P}^{m,l}(V)$ に付随する Berezin 変換 $B_{m,l}$ については，測度

$$d\lambda_{m,l}(Z) := \frac{1}{\pi^4}\kappa^{m,l}(Z,Z)^{-1} e^{-\mathrm{tr}\,(Z^*Z)}\, dm(Z)$$

を考え，$L^2(V, d\lambda_{m,l})$ 上で扱う．そこでは作用素 $B_{m,l}$ は $|\kappa^{m,l}(Z,W)|^2$ を積分核とする積分作用素になる．$L^2(V, \lambda_{m,l})$ から $\mathcal{T}_{k'k}^{m,l}(V)$ への直交射影作用素を $P_{k'k}^{m,l}$ とすると

定理 2. $B_{m,l} = \sum_{k',k=0}^{2l} \Lambda_{k'k}^{m,l} P_{k'k}^{m,l}$.

ここで固有値 $\Lambda_{k'k}^{m,l}$ は Hahn 多項式

$$Q_k(n;\alpha,\beta,N) := \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j\,(-n)_j\,(k+\alpha+\beta+1)_j}{(-N)_j\,(\alpha+1)_j\, j!}$$

の積と次式で定義される Meijer の G-函数を用いて表される：

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\,\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\,\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\, z^s\, ds.$$

ただし積分路 C は $-i\infty$ から $i\infty$ へと走り，$\Gamma(b_j-s)$ 達の極を右に見，$\Gamma(1-a_j+s)$ 達の極を左に見る様にそれらを避けてカーブする．

Hahn 多項式が現れるのは，$SU(2)$ の Clebsch-Gordan 係数が Hahn 多項式で表されるからであり，Hahn 多項式の積が現れるのは，$K = U(2)\times U(2)$ の表現のテンソル積を扱うからである．また，Meijer の G-函数が現れるのは，次の定積分を求める所から来る：

$$\iint_{0<s<t} \frac{\left(\xi^{0,\,l-n/2}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix}\right)^2}{\xi^{0,\,l}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix}}\,(st)^{m+n} e^{-(s+t)}(s-t)^2\, dsdt.$$

ただし，$\xi^{m,l}[s,t] := \xi^{m,l}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix} = (st)^m \cdot \dfrac{s^{2l+1}-t^{2l+1}}{s-t}$.