Berezin transforms related to multiplicity-free actions (2): $U(n)$-action on $\mathbb{C}^n$

野村 隆昭　　京大・理

ユニタリ群 $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用は重複度フリーな作用になっている．$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の k 次斉次の正則な多項式函数の空間を表すと

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \qquad (k \neq k' \implies \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \not\cong \mathcal{P}_{k'}(\mathbb{C}^n)).$$

$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ の再生核は

$$\kappa_k(z,w) := \frac{(z \cdot \overline{w})^k}{k!}$$

であるから，$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ に付随する Berezin 変換 B_k は

$$B_k f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} b_k(z,w) f(w)\, dm(w) \qquad (f \in L^2(\mathbb{C}^n)),$$

ただし，
$$b_k(z,w) := \frac{1}{\pi^n k!} e^{-\|z\|^2/2} e^{-\|w\|^2/2} \frac{|z \cdot \overline{w}|^{2k}}{\|z\|^k \|w\|^k}.$$

極座標 $z = ru$ $(r > 0,\ u \in S^{2n-1})$ により $dm(ru) = r^{2n-1} dr d\sigma(u)$（$\sigma$ は S^{2n-1} 上の標準的な回転不変測度）であるから

$$L^2(\mathbb{C}^n) = L^2((0,\infty), r^{2n-1} dr) \otimes L^2(S^{2n-1}, d\sigma).$$

そして $L^2(S^{2n-1}, d\sigma)$ の $U(n)$-既約分解は次の通り： $\mathbb{C}^n$ 上の多項式函数 $h(z, \overline{z})$ で z について p 次斉次，$\overline{z}$ について q 次斉次なもののなす空間を $\mathcal{P}_{pq}$ とする．また Δ は $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ の Laplacian を表すものとし，

$$\mathcal{H}_{pq} := \{h \in \mathcal{P}_{pq}\ ;\ \Delta h = 0\} \qquad \text{（調和多項式の空間）}$$

とおくと

$$\mathcal{P}_{pq} = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} \|z\|^{2j} \cdot \mathcal{H}_{p-j,q-j}$$

が成り立つ．さらに

$$\mathcal{Y}_{pq} := \{h|_{S^{2n-1}}\ ;\ h \in \mathcal{H}_{pq}\} \qquad \text{（(p,q) 型の球面調和函数の空間）}$$

とすると

$$L^2(S^{2n-1}, d\sigma) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{pq}.$$

このとき，Berezin 変換 B_k は次の定理の様にスペクトル分解される：

$$\varphi_k(r) := \sqrt{\frac{2}{(n+k-1)!}}\, r^k e^{-r^2/2} \qquad (r > 0)$$

とおき，E_{kj} は $\mathbb{C}\varphi_k \otimes \mathcal{Y}_{jj}$ への直交射影作用素を表すとする．

定理. $B_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+k+j-1}{j}^{-1} \binom{k}{j} E_{kj}.$

証明のポイントとなる事実を書き並べておく．$\mathbf{e}_n := {}^t(0, \ldots, 0, 1) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ における $U(n)$ の固定部分群を L とする．そして $\mathcal{Y}_{jj}$ に属する函数で L-不変なもののなす部分空間を $\mathcal{Y}_{jj}^L$ とする．

(1) $\mathcal{Y}_{jj}^L = \mathbb{C}Y_j$．ただし

$$Y_j(u) := P_j^{(n-2,0)}(2\,|u \cdot \mathbf{e}_n|^2 - 1) \qquad (u \in S^{2n-1})$$

で $P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$ は j 次の Jacobi 多項式（Szegö の記号）．

(2) $\mathcal{Y}_{jj}$ の再生核 $\Phi_j(u,v)$（$u, v \in S^{2n-1}$）は

$$\Phi_j(u,v) := \frac{(n+2j-1)(n+j-2)!}{2\pi^n j!}\, P_j^{(n-2,0)}(2\,|u \cdot \overline{v}|^2 - 1).$$

(3) $$\int_{S^{2n-1}} |u \cdot \mathbf{e}_n|^{2k} P_j^{(n-2,0)}(2\,|u \cdot \mathbf{e}_n|^2 - 1)\, d\sigma(u) = \frac{2\pi^n k!}{(n+k-1)!} \binom{n+j-2}{j} \binom{n+k+j-1}{j}^{-1} \binom{k}{j}.$$

以上より B_k の積分核 b_k が次の様に書ける（$s, r > 0,\ u, v \in S^{2n-1}$）：

$$b_k(sv, ru) = \varphi_k(s)\varphi_k(r) \sum_{j=0}^{k} \binom{n+k+j-1}{j}^{-1} \binom{k}{j} \Phi_j(u,v).$$

この研究は藤田悦郎氏と共同である（同氏の京都大学修士論文の一部）．