Berezin transforms related to multiplicity-free actions (1)：一般論

野村 隆昭　　　　京大・理

コンパクト Lie 群 K が有限次元複素ベクトル空間 V に重複度フリーに作用しているとする．すなわち，K は V 上の正則 (holomorphic) 多項式函数のなす空間 $\mathcal{P}(V)$ にも $\pi(k)p(z) := p(k^{-1}z)$ で作用するが，この $\mathcal{P}(V)$ が互いに同値でない K の既約表現に重複度 1 で分解されていると仮定する：

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{P}_\alpha(V) \qquad (\alpha \neq \alpha' \implies \mathcal{P}_\alpha(V) \not\cong \mathcal{P}_{\alpha'}(V)).$$

V に K-不変なエルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を入れ，測度

$$d\mu(z) := \frac{1}{\pi^n}\, e^{-\|z\|^2}\, dm(z) \qquad (n := \dim V)$$

を考えると，$\mathcal{P}_\alpha(V)$ は $L^2(V, d\mu)$ の閉部分空間で再生核 κ_α を持つ．$\mathcal{P}_\alpha(V)$ が K のユニタリ表現を実現していることから

$$\kappa_\alpha(kz, kw) = \kappa_\alpha(z, w) \qquad (\forall k \in K,\ z, w \in V)$$

が成り立っている．さらに $H \subset GL(V)$ を K の複素化とすると，対 (H, V) は概均質ベクトル空間になり，$\kappa_\alpha(z, z)$ が H の稠密開軌道上で決して 0 にならないことに注意しておく．

各 $\alpha \in A$ に対して，$\mathcal{P}_\alpha(V)$ に付随する **Berezin 変換** B_α とは，次で表示される $L^2(V)$ 上の積分作用素のことである：

$$B_\alpha f(z) = \int_V b_\alpha(z, w) f(w)\, dm(w) \qquad (f \in L^2(V)),$$

ただし　$$b_\alpha(z, w) := \frac{1}{\pi^n} e^{-\|z\|^2/2} e^{-\|w\|^2/2} \frac{|\kappa_\alpha(z, w)|^2}{\kappa_\alpha(z, z)^{1/2} \kappa_\alpha(w, w)^{1/2}}.$$

特に Berezin 変換 B_α は正の自己共役作用素である．さらに，B_α は K の作用と可換である．すなわち $\pi_2(k)f(z) := f(k^{-1}z)$ $(f \in L^2(V))$ とおくとき，$B_\alpha \pi_2(k) = \pi_2(k) B_\alpha$ $(\forall k \in K)$ が成り立つ．

K-不変な $L^2(V)$ の函数の全体を $L^2(V)^K$ と記す：

$$L^2(V)^K := \{f \in L^2(V)\,;\ \pi_2(k)f = f \quad (\forall k \in K)\}.$$

B_α は $L^2(V)^K$ を不変にする．そこでの作用は次の通り．

$\boxed{\textbf{定理}\ 1.}$ $B_\alpha|_{L^2(V)^K}$ は $\phi_\alpha(z) := \kappa_\alpha(z,z)^{1/2} e^{-\|z\|^2/2}$ で張られる 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\phi_\alpha$ への直交射影作用素である．

Berezin 変換 B_α は，K の 2 つの既約表現 $\mathcal{P}_\alpha(V)$ と $\overline{\mathcal{P}_\alpha(V)}$ のテンソル積 $\mathcal{P}_\alpha(V) \otimes \overline{\mathcal{P}_\alpha(V)}$ と密接に関連する．ただし

$$\overline{\mathcal{P}_\alpha(V)} := \{\overline{f}\ (\text{複素共役値})\ ;\ f \in \mathcal{P}_\alpha(V)\}$$

であり，これは K の表現としては $\mathcal{P}_\alpha(V)$ の反傾表現を実現している．
記号の準備をする．

$$d\lambda_\alpha(z) := \frac{1}{\pi^n}\kappa_\alpha(z,z)^{-1} e^{-\|z\|^2}\, dm(z),$$
$$J_\alpha : L^2(V, d\lambda_\alpha) \to L^2(V) \qquad \text{(via density adjustment)}.$$

$\boxed{\textbf{定理}\ 2.}$ $A_\alpha F(z) := F(z,z)$ $(F \in \mathcal{P}_\alpha(V) \otimes \overline{\mathcal{P}_\alpha(V)})$ とおく．
(1) 作用素 A_α は $L^2(V, d\lambda_\alpha)$ への H-同変 $(H = K_{\mathbb{C}})$ な単射で，$\|A_\alpha\| = 1$ かつ $B_\alpha = J_\alpha A_\alpha A_\alpha^* J_\alpha^{-1}$.
(2) $J_\alpha^{-1} f \in (\mathrm{Range}\, A_\alpha)^\perp$ ならば $B_\alpha f = 0$.

定理 2 (2)から直ちに，正の自己共役作用素である Berezin 変換 B_α は有限階の作用素であることがわかる．B_α のスペクトル分解の「台」を定理 2 は与える．その固有値について，次の 2 つの講演で具体例での結果を報告する．