Manifold of primitive idempotents in a Jordan-Hilbert algebra

野　村　隆　昭　　　　　　　　京 大 理

V を Jordan-Hilbert 代数とする．すなわち，

(1) V は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ実 Hilbert 空間，

(2) V は実 Jordan 代数，従って双線型な積 $x, y \mapsto xy$ が定義されていて，$\forall x, y \in V$ について，次の (i), (ii) が成立：

$$\text{(i)} \quad xy = yx, \qquad \text{(ii)} \quad x^2(xy) = x(x^2 y),$$

(3) $\langle xy \,|\, z \rangle = \langle y \,|\, xz \rangle$ が $\forall x, y, z \in V$ について成立．

このとき，積 $V \times V \ni (x, y) \mapsto xy \in V$ は連続になることを注意しておく．

V はゼロ代数 ($xy = 0 \; \forall x, y$) ではないという仮定のもとで，V には non-zero なべき等元が存在する．原始べき等元の全体を $\mathfrak{I}_1$ で表す．以下，V は topologically simple (*i.e.*, $\nexists$ non-trivial closed ideal) であるとする．このとき，$\mathfrak{I}_1$ のすべての元が同じノルムを持つことが示されるので，V の内積を正規化して，$\forall a \in \mathfrak{I}_1$ について，$\|a\| = 1$ としておく．

各 $a \in \mathfrak{I}_1$ に対して，$V_{1/2}(a) := \{x \in V \,;\, ax = x/2\}$ とおく (Peirce (1/2)-空間)．$V_{1/2}(a)$ への直交射影作用素 $E_{1/2}(a)$ は $E_{1/2}(a) = 4L(a) - 4L(a)^2$ で与えられる．ただし，$L(a)$ は a を乗ずるという作用素である．写像

$$\xi_a(b) := -2a + \frac{2}{\langle a \,|\, b \rangle}\, ab \qquad (b \in N_a := \{b \in \mathfrak{I}_1 \,;\, \langle b \,|\, a \rangle \neq 0\})$$

は N_a から $V_{1/2}(a)$ への bijection を与えるので，この ξ_a を用いて，接空間 $T_a(\mathfrak{I}_1)$ が $V_{1/2}(a)$ となる Hilbert 多様体構造を $\mathfrak{I}_1$ に導入できて，これにより，包含写像 $\mathfrak{I}_1 \hookrightarrow V$ は embedding になる．従って，$\mathfrak{I}_1$ は Hilbert 空間 V の閉部分多様体として，Riemannian Hilbert 多様体となる．また，$\mathfrak{I}_1$ の Riemannian distance $\mathrm{dist}(a, b)$ は $\sqrt{2}\,\arcsin \dfrac{\|a - b\|}{\sqrt{2}}$ に等しいことが示される．

Jordan-Hilbert 代数 V の自己同型群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す．Hilbert 空間としての V の直交群を $O(V)$ とすると，$\mathrm{Aut}(V) \subset O(V)$ が成り立つ．$\mathrm{Aut}(V)$ も $O(V)$ も作用素のノルム位相で Banach-Lie 群になっている．

定理 1. $\mathfrak{J}_1$ は two-point homogeneous である：$\mathrm{dist}(a_1, b_1) = \mathrm{dist}(a_2, b_2)$ のとき, $T \in \mathrm{Aut}(V)$ が存在して $Ta_1 = a_2$ かつ $Tb_1 = b_2$ となる．しかもこの T は $I - 2E_{1/2}(d)$ $(d \in \mathfrak{J}_1)$ の形の作用素の有限個の積にとれる．∎

次の定理を述べる前に，$x \in V_{1/2}(a)$ かつ $\|x\| = 1$ なら，$2x^2 - a \in \mathfrak{J}_1$ であることに注意しておく．さて，$\mathfrak{J}_1$ の a における断面曲率を $k_a(x, y)$ $(x, y \in V_{1/2}(a)$ with $\|x\| = \|y\| = 1$, $\langle x \,|\, y\rangle = 0)$ で表すと

定理 2. $k_a(x, y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\,\|E_{1/2}(2x^2 - a)y\|^2$. 特に，$\dfrac{1}{2} \leqq k_a(x, y) \leqq 2$. ∎

参考文献

U. Hirzebruch, Über Jordan-Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang 1, Math. Z., **90** (1965), 339–354.