

# On a certain 8-dimensional non-symmetric homogenous convex cone

九大・数理 野村隆昭

Takaaki NOMURA<sup>1</sup>

Faculty of Mathematics, Kyushu University

本講演の内容は、昨年 Rutgers 大学を訪ねたときの Simon Gindikin 氏との議論から始まり、京都大学 M2 渡辺有介氏による等質開凸錐に付随する基本相対不変式のリストと、平成 17 年夏に行われた東京大学玉原セミナーハウスにおける伊師英之氏との議論に基づいている。

This work started with a discussion with Simon Gindikin when I visited Rutgers University last year. The idea of considering the present 8-dimensional cone comes from just looking through a list of basic relative invariants associated to homogeneous convex cones given by Yusuke Watanabe who is currently preparing his master thesis. Discussions with Hideyuki Ishi also contribute to the contents.

行列のやさしい話から始めよう。次の  $GL(r, \mathbb{C})$  の部分群  $A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}$  を考える：

$$A_{\mathbb{C}} := \{a = \text{diag}[a_1, \dots, a_r] ; a_1 \in \mathbb{C}^{\times}, \dots, a_r \in \mathbb{C}^{\times}\},$$
$$N_{\mathbb{C}} := \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n_{r-1,1} & n_{r-1,2} & & 1 & 0 \\ n_{r1} & n_{r2} & \cdots & n_{r,r-1} & 1 \end{pmatrix} ; n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

実  $r \times r$  対称行列のなすベクトル空間を  $V$  とする： $V := \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ 。その中で、正定値なものなす開凸錐を  $\Omega$  とする。このとき、 $V_{\mathbb{C}} = \text{Sym}(r, \mathbb{C})$  における管状領域  $\Omega + iV$  は、三角群  $N_{\mathbb{C}}A_{\mathbb{C}}$  の  $r$  次単位行列  $E$  を通る軌道に含まれている：

$$(1.1) \quad \Omega + iV \subset N_{\mathbb{C}}A_{\mathbb{C}} \cdot E.$$

---

<sup>1</sup>E-mail: [tnomura@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:tnomura@math.kyushu-u.ac.jp)  
<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/>

さて、 $r$  次の実または複素の正方行列  $w = (w_{ij})$  に対して、 $\Delta_k(w)$  は左上からの  $k$  次首座小行列式を表すものとする ( $k = 1, \dots, r$ ) :

$$\Delta_k(w) = \det \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kk} \end{pmatrix}.$$

ただし、以下では  $\Delta_0(w) \equiv 1$  と約束する。そうすると、(1.1) より、 $w \in \Omega + iV$  ならば  $\Delta_k(w) \neq 0$  ( $k = 1, \dots, r$ ) である。

**補題 1.1.**  $w = (w_{ij}) \in \text{Sym}(r, \mathbb{C})$  は  $\text{Re } w \in \Omega$  であるとする。このとき  $n \in N_{\mathbb{C}}$  と  $a = \text{diag}[a_1, \dots, a_r] \in A_{\mathbb{C}}$  でもって  $w = na^n n$  と書くとき、

$$a_k = \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} \quad (k = 1, \dots, r)$$

となる。

**補題 1.2.**  $a = \text{diag}[a_1, \dots, a_r] \in A_{\mathbb{C}}$ ,  $n \in N_{\mathbb{C}}$  で、 $\text{Re}(na^n n)$  が正定値であるならば、 $\text{Re } a_1 > 0, \dots, \text{Re } a_r > 0$  である。

以上二つの補題から次の命題を得る：

**命題 1.3.**  $w = (w_{ij}) \in \text{Sym}(r, \mathbb{C})$  は  $\text{Re } w \in \Omega$  であるとする。このとき

$$\text{Re} \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \dots, r).$$

Euclidean Jordan 代数の枠組みを用いて、命題 1.3 を  $\Omega$  が一般の対称錐の場合に拡張することは容易である。すなわち、 $\Delta_k$  達は Faraut–Korányi の本 [1] にあるように、Jordan 代数における principal minors とすればよいだけである。補題 1.2 が、対称管状領域の逆元写像不変性を用いて比較的簡単に示せること（実はそれを使わないと面倒）、及びその不変性が対称管状領域を特徴付けていること (cf. Kai–Nomura [4]) を鑑みると、次の問は自然であろう：

**問.** 命題 1.3 は対称錐を特徴付けるか？

命題 1.3 の主張を一般の等質開凸錐（以下単に等質錐と呼ぶ）の場合に一般化するためには、 $\Delta_k(w)$  をどう一般化するかという問題が生じるが、それには Ishi [3] による等質錐に付随する基本相対不変式をとるとよい。対称錐の場合は、それらの基本相対不変式は、もちろん、Jordan 代数における principal minors に一致する。このとき、上の問を次の様に定式化することができる：

予想.  $\Omega$  を実ベクトル空間  $V$  における等質錐とし,  $\Delta_1(w), \dots, \Delta_r(w)$  ( $r := \text{rank } \Omega$ ) を  $\Omega$  に付随する基本相対不変式とする. このとき,  $w \in V_{\mathbb{C}}$  に対する主張

$$(*) \quad \text{Re } w \in \Omega \implies \text{Re } \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

と  $\Omega$  の対称性とは同値である.

本講演の目的は, この予想に対する反例を紹介することである. すなわち, 非対称な等質錐で, 上記主張 (\*) が成り立つものがあることを示す. それがタイトルでいうところの「ある 8 次元の非対称等質錐」のことである.

以後  $I$  は 2 次の単位行列とし,  $V$  は次のように記述される 8 次元の実ベクトル空間を表すことにする:

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ x_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{pmatrix}; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$V \subset \text{Sym}(5, \mathbb{R})$  であることに注意. 開凸錐  $\Omega$  としては,  $V$  に属する行列で正定値なもの全体をとる:

$$\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}.$$

この  $\Omega$  が等質であることを実際に見てみよう. 次で定義される  $GL(5, \mathbb{R})$  の部分群  $A$  と  $N$  を考える:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A &:= \{a = \text{diag}[a_1I, a_2I, a_3]; a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0\}, \\ N &:= \left\{ n = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & I & 0 \\ {}^t\mathbf{n}_1 & {}^t\mathbf{n}_2 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{n}_1 \in \mathbb{R}^2, \mathbf{n}_2 \in \mathbb{R}^2, \xi \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

このとき, 半直積群  $H = N \ltimes A$  が  $\Omega$  に  $H \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx^th \in \Omega$  によって単純推移的に作用している. 実際  $n \in N$  と  $a \in A$  を (1.2) におけるように表し, ノルムは  $\mathbb{R}^2$  における標準的なユークリッド・ノルムを表すものとする

$$(1.3) \quad na^t n = \begin{pmatrix} a_1I & a_1\xi I & a_1\mathbf{n}_1 \\ \xi a_1I & (\xi^2 a_1 + a_2)I & \xi a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 \\ a_1 {}^t\mathbf{n}_1 & a_1\xi {}^t\mathbf{n}_1 + a_2 {}^t\mathbf{n}_2 & a_1\|\mathbf{n}_1\|^2 + a_2\|\mathbf{n}_2\|^2 + a_3 \end{pmatrix}.$$

これがあらかじめ与えられた  $x = \begin{pmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ x_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{pmatrix} \in \Omega$  に等しいということにすると,  $a_1, a_2, a_3$  及び  $\xi, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  が次のように解ける:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} a_1 &= \Delta_1(x), & a_2 &= \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}, & a_3 &= \frac{\Delta_3(x)}{\Delta_2(x)}, \\ \xi &= \frac{x_{21}}{\Delta_1(x)}, & \mathbf{n}_1 &= \frac{\mathbf{y}}{\Delta_1(x)}, & \mathbf{n}_2 &= \frac{x_{11}\mathbf{z} - x_{21}\mathbf{y}}{\Delta_2(x)}. \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$  は  $\mathbb{R}^2$  での  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  の標準内積を表すものとして、

$$\begin{cases} \Delta_1(x) := x_{11}, \\ \Delta_2(x) := x_{11}x_{22} - x_{21}^2, \\ \Delta_3(x) := x_{11}x_{22}x_{33} + 2x_{21}\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - x_{33}x_{21}^2 - x_{22}\|\mathbf{y}\|^2 - x_{11}\|\mathbf{z}\|^2 \end{cases}$$

であり、これらの  $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \Delta_3(x)$  が、今扱っている  $\Omega$  に付随する基本相対不変式になっている。以上より、 $\Omega$  は 5 次の単位行列  $E \in \Omega$  を通る  $H$  の軌道であり、 $\Omega = H \cdot E$  は  $H$  に微分同相であることがわかった。

**注意 1.4.** (1) この等質錐は、それに付随する基本相対不変式  $\Delta_k(x)$  について、 $\deg \Delta_k(x) = k$  がすべての  $k = 1, 2, \dots, r$  で成り立っている非対称な等質錐の中で最低次元のものである。

(2) 等質錐の階数が 3 のとき、 $\deg \Delta_3(x) = 3$  で、どの「ルート空間」 $V_{ji}$  ( $j > i$ ) も消えないならば、 $\dim V_{32} = \dim V_{31}$  となる（渡辺有介氏の修論に含まれる予定）。 $\dim V_{21} = 0$  で、 $\dim V_{32} = \dim V_{31}$  かつ  $\deg \Delta_3(x) = 3$  で最低次元のものは、次の双対 Vinberg 錐の場合であるが、このときは  $\Delta_2(x) = x_{22}$  となっていて、 $\deg \Delta_2(x) = 1$  である：

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{22} & x_{32} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} ; x_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \text{ における正定値なものの全体.}$$

ついでながら、Vinberg 錐のときは  $\deg \Delta_3(x) = 2$  である (cf. Gindikin [2, p. 98], Ishi [3, §5]).

(3)  $\Omega$  の双対錐  $\Omega'$  は次のようにして実現される。まず

$$V' := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & {}^t\mathbf{y} \\ x_{21} & x_{22} & {}^t\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & x_{33}I \end{pmatrix} ; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

のように表される 8 次元の実ベクトル空間  $V'$  を考える。 $V' \subset \text{Sym}(4, \mathbb{R})$  であることに注意。このとき、 $\Omega'$  は  $V'$  の元で正定値なものの全体である：

$$\Omega' := \{x \in V' ; x \succcurlyeq 0\}.$$

$\Omega'$  に付随する基本相対不変式  $\Delta'_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) は

$$\Delta'_1(x) := x_{33}, \quad \Delta'_2(x) := x_{22}x_{33} - \|\mathbf{z}\|^2, \quad \Delta'_3(x) := \det x \quad (\text{as } 4 \times 4 \text{ matrix})$$

で与えられる。ここでは  $\Delta'_3(x)$  は 4 次式であることに注意。

我々の situation に戻ろう。5 次の正方行列  $x \in V$  の左上からの首座小行列式を  $\delta_1(x), \dots, \delta_5(x)$  とすると、初等的な計算から

$$\begin{aligned}\delta_1(x) &= \Delta_1(x), & \delta_2(x) &= \Delta_1(x)^2, & \delta_3(x) &= \Delta_1(x)\Delta_2(x), \\ \delta_4(x) &= \Delta_2(x)^2, & \delta_5(x) &= \Delta_2(x)\Delta_3(x).\end{aligned}$$

以上より、 $x \in V$  について、

$$x \in \Omega \iff \Delta_1(x) > 0, \Delta_2(x) > 0, \Delta_3(x) > 0$$

であることがわかる。もちろんこのことは、Ishi [3] により、一般の等質錐とそれに付随する基本相対不変式に対して言えることである。

明らかに  $\Delta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) は  $V$  上の多項式関数であり、それらを自然に  $V_{\mathbb{C}}$  上の多項式関数に拡張しておく。次に、(1.2) における部分群  $A, N$  の複素化を  $A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}$  とする：

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{C}} &:= \{a = \text{diag}[a_1 I, a_2 I, a_3]; a_1 \in \mathbb{C}^{\times}, a_2 \in \mathbb{C}^{\times}, a_3 \in \mathbb{C}^{\times}\}, \\ N_{\mathbb{C}} &:= \left\{ n = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & I & 0 \\ {}^t \mathbf{n}_1 & {}^t \mathbf{n}_2 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{n}_1 \in \mathbb{C}^2, \mathbf{n}_2 \in \mathbb{C}^2, \xi \in \mathbb{C} \right\}.\end{aligned}$$

Nomura [6] で一般的に示されているように、 $\Omega + iV \subset N_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}} \cdot E$  である。特に、管状領域  $\Omega + iV$  上ではどの  $\Delta_k$  も 0 にならない。前半と同じく、 $\Delta_0 \equiv 1$  と約束しておく。

**命題 1.5.**  $w \in V_{\mathbb{C}}$  は  $\text{Re } w \in \Omega$  であるとする。このとき

$$\text{Re} \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

が成り立つ。

**証明.**  $a = \text{diag}[a_1 I, a_2 I, a_3] \in A_{\mathbb{C}}$  と  $n = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & I & 0 \\ {}^t \mathbf{n}_1 & {}^t \mathbf{n}_2 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{C}}$  に対して、 $na^t n$  の計算は (1.3) と同じで、 $\|\mathbf{n}_j\|^2$  の所を複素 2 次形式  $\nu(\mathbf{n}_j) := \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_j$  に置き換えるだけである：

$$na^t n = \begin{pmatrix} a_1 I & a_1 \xi I & a_1 \mathbf{n}_1 \\ \xi a_1 I & (\xi^2 a_1 + a_2) I & \xi a_1 \mathbf{n}_1 + a_2 \mathbf{n}_2 \\ a_1 {}^t \mathbf{n}_1 & a_1 \xi {}^t \mathbf{n}_1 + a_2 {}^t \mathbf{n}_2 & a_1 \nu(\mathbf{n}_1) + a_2 \nu(\mathbf{n}_2) + a_3 \end{pmatrix}.$$

従って、与えられた  $w \in \Omega + iV$  に対して、 $w = na^t n$  から  $a \in A_{\mathbb{C}}$ ,  $n \in A_{\mathbb{C}}$  を求めることができ、(1.4) より、特に

$$a_k = \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} \quad (k = 1, 2, 3)$$

となる. ここで  $\Omega$  は 5 次の正定値実対称行列のなす対称錐に含まれているので, 補題 1.2 を  $r = 5$  で使えて,  $\operatorname{Re} a_k > 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) が出る.  $\square$

本稿で扱った等質錐で, 対称空間上におけるような調和解析を構築するのは興味深いことであろう. 欲しているのは Plancherel 公式であるが, 微分同相になっている非ユニモジュラー群  $H$  の Plancherel 公式ではなく, Helgason 式のフーリエ変換を意識していることを強調しておきたい. たとえば, 興味の対象は上半平面の Plancherel 公式であり,  $ax + b$  群の Plancherel 公式ではないのである.

少しだけ一般にして,  $I$  を  $n$  次の単位行列とし,

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ x_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ {}^t\mathbf{y} & {}^t\mathbf{z} & x_{33} \end{pmatrix}; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

あるいは

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I & x_{21}I & \mathbf{y} \\ \bar{x}_{21}I & x_{22}I & \mathbf{z} \\ \mathbf{y}^* & \mathbf{z}^* & x_{33} \end{pmatrix}; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, x_{ii} \in \mathbb{R}, x_{21} \in \mathbb{C} \right\}$$

の中での正定値行列のなす開凸錐上での球調和解析 (spherical harmonic analysis without  $K$ ) を考えるのもおもしろいかもしれない.

## 参 考 文 献

- [1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [2] S. Gindikin, Tube domains and the Cauchy problem, Transl. Math. Monogr., **111**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1992.
- [3] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.
- [4] C. Kai and T. Nomura, A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 195–215.
- [5] S. Kaneyuki and T. Tsuji, Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1–46.
- [6] T. Nomura, On Penney’s Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, J. Lie Theory, **11** (2001), 185–206.