

向き付けグラフを介して等質開凸錐を具現化する

山崎 貴史 (九大・数理)

野村 隆昭 (九大・数理)

京都産業大学

2015年9月14日

$\mathcal{P}(N, \mathbb{R}) := \{x \in \text{Sym}(N, \mathbb{R}) ; x \gg 0\}$: N 次正定値実対称行列全体

$GL(N, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathcal{P}(N, \mathbb{R})$: 推移的 by $GL(N, \mathbb{R}) \times \mathcal{P}(N, \mathbb{R}) \ni (g, x) \mapsto gx^t g$

↓ 制限

$H^+(N, \mathbb{R}) := \{g \in GL(N, \mathbb{R}) ; \text{下三角, 対角成分} > 0\}$

\implies 作用は単純推移的 (固定部分群 = {単位元})

$$\mathcal{P}(N, \mathbb{R}) = \{g^t g ; g \in H^+(N, \mathbb{R})\} = H^+(N, \mathbb{R}) \cdot I$$

$\mathcal{P}(N, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{等質性に注目して一般化}} \text{等質開凸錐}$

Vinbergの理論 (1963)

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c|c} V_{11} & V_{21} & \cdots & V_{r1} \\ \hline V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{r2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline V_{r1} & \cdots & V_{r,r-1} & V_{rr} \end{array} \right) \quad \text{ベクトル値の『行列』}$$

- $V_{jj} \cong \mathbb{R} \ (j = 1, \dots, r)$.
- いくつかの $k > j$ に対して $V_{kj} = \{0\}$ となることはあり得る.

$$V = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^*$$

\mathfrak{X} : T 代数と呼ばれる非結合的行列代数で対合 $*$ を持つ.

任意の等質開凸錐 = $\{hh^* ; h \in H\}$ (T 代数での積)

$H := \{ \mathfrak{X} \text{ の下三角部分で, 対角成分がすべて正である『行列』} \}$

理論的には美しい.

実際には : 結合法則がない行列代数を正面から扱うのは大変.

- 非専門家にもアクセスが容易な **realization** が望ましい.

どんな realization?

例で見る (**Vinberg 錐** : Vinberg が 1960 年に報告した最小次元の非対称等質開凸錐)

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix} \gg 0, \begin{pmatrix} a & y \\ y & c \end{pmatrix} \gg 0 \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & 0 \\ y & 0 & c \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a > 0 \\ ab - x^2 > 0 \\ ac - y^2 > 0 \end{array} \right\}$$

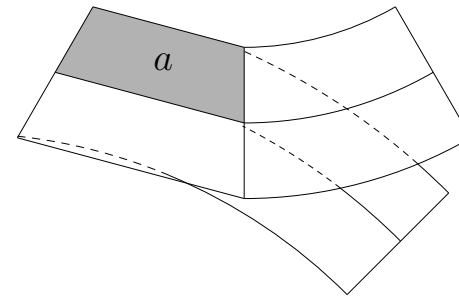
$$(3) \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & x & 0 \\ 0 & a & 0 & y \\ \hline x & 0 & \boxed{b} & 0 \\ 0 & y & 0 & \boxed{c} \end{array} \right) \gg 0 \right\} \quad (4) \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & x & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & y \\ 0 & 0 & y & c \end{array} \right) \gg 0 \right\}$$

$$(5) \left\{ \left(\begin{array}{c|cc|cc} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 & 0 \\ 0 & x & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & y \\ 0 & 0 & 0 & y & c \end{array} \right) \gg 0 \right\}$$

- (1) が Vinberg の元々の記述
- (2) と (4) は (1) と大差はない
(行列のサイズが大きくなった)
- (3) は Rothaus (1966) 式の記述
(開凸錐 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ の表現から得られる)
- Graczyk-Ishi (2014) も (3). Chua (2003) は (4)
 $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ のスライスで実現 (行列の基本変形で (3) \leftrightarrow (4))
- (5) は, Xu (本は 2005 年), Chua (2003), Ishi-N. (2008). (無駄な成分が入り込む)

本講演では、(1)の方式で任意の等質開凸錐が具現化できることを報告する。
 ただし、 $\mathcal{P}(N_k, \mathbb{R})$ のスライスを並べるというのではなく、(2)と折衷して

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} a & x \\ x & b \end{array} \right) \gg 0, \left(\begin{array}{cc} a & y \\ y & c \end{array} \right) \gg 0 \\ \left(\begin{array}{ccc} a & x & y \\ x & b & 0 \\ y & 0 & c \end{array} \right) ; \begin{array}{l} a > 0 \\ ab - x^2 > 0 \\ ac - y^2 > 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

 \Rightarrow


出発点は

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{R}c_1 & V_{21} & \cdots & V_{r1} \\ \hline V_{21} & \mathbb{R}c_2 & \cdots & V_{r2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline V_{r1} & \cdots & V_{r,r-1} & \mathbb{R}c_r \end{array} \right)$$

Vinberg代数 (Vinberg (1963) では *klan* と呼ばれている) .

定義 1

V : 実ベクトル空間, 双線型な積 $x \triangle y = L(x)y$ が定義されている.

V : **Vinberg代数** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

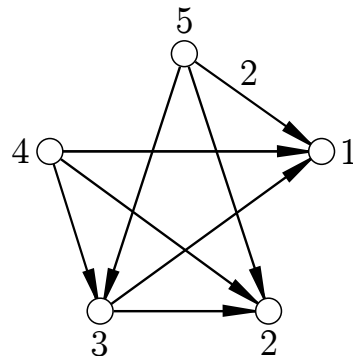
- (1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ ($\forall x, y \in V$),
- (2) $\exists s \in V^*$ s.t. $s(x \triangle y)$ は V に内積を定義する,
- (3) 各 $L(x)$ の固有値は実数のみ.

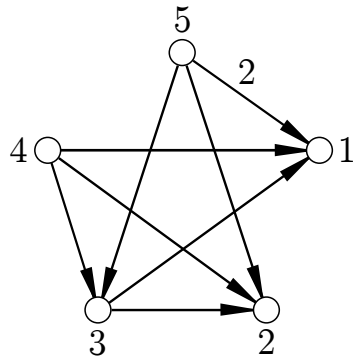
- T 代数の自己共役部分が持つ代数構造. T 代数に比べて要求事項がはるかに少ない.

Vinberg代数の情報から向き付けグラフを描く

- $j > i$ に対して, $d_{ji} := \dim V_{ji}$ (off-diagonal subspaces の次元)
- 頂点集合 $\mathcal{V} := \{1, \dots, r\}$, 弧集合 $\mathcal{A} := \{[j \rightarrow i]; i < j, \text{ and } d_{ji} > 0\}$.
 j を出て i に入る弧を $[j \rightarrow i]$ で表す. $\overset{j}{\circ} \xrightarrow{d_{ji}} \overset{i}{\circ}$ if $\dim V_{ji} > 0$.
- グラフ $\Gamma = \Gamma(V) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ は向き付け (oriented) グラフ.
 ($[j \rightarrow i]$ と $[i \rightarrow j]$ は同時にはないし, $[i \rightarrow i]$ もない).

例 $d_{ji} = 1$ のときは, 弧の上部には数字を書かない (簡単のため).

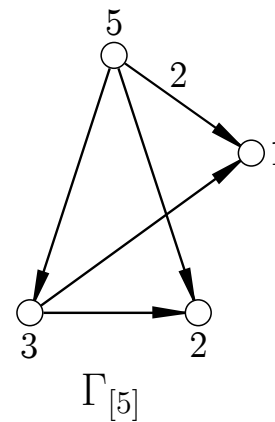
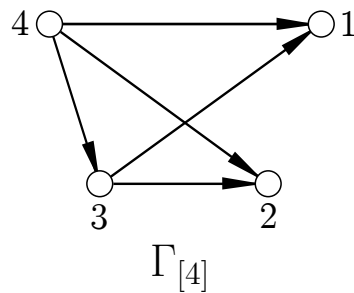




- グラフ Γ から源頂点をすべて集める。
(源頂点 = 入ってくる弧のない頂点)
- $\mathcal{S} = \{\text{源頂点}\}$ (つねに $r \in \mathcal{S}$ に注意) .
- 左の例では $\mathcal{S} = \{4, 5\}$.
- 各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して, その出先隣接頂点を全部集める。
(ω の出先隣接頂点 = $[\omega \rightarrow k] \in \mathcal{A}$ となる頂点 k) .

$$N^{\text{out}}(\omega) := \{\omega \text{ の出先頂点}\}, \quad N^{\text{out}}[\omega] := N^{\text{out}}(\omega) \cup \{\omega\}.$$

- 上の例では, $N^{\text{out}}[4] = \{1, 2, 3, 4\}$, $N^{\text{out}}[5] = \{1, 2, 3, 5\}$.
- $N^{\text{out}}[\omega]$ から部分向き付けグラフ $\Gamma_{[\omega]}$ を形成する.



各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して, $V_{[\omega]} := \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i, j \in N^{\text{out}}[\omega]}} V_{ji}$, $E_{[\omega]} := \bigoplus_{i \in N^{\text{out}}[\omega]} V_{\omega i}$

- $V_{[\omega]}$ は V の部分 Vinberg 代数, $E_{[\omega]}$ は $V_{[\omega]}$ の両側 ideal.
- $\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \Delta x$ ($x \in V_{[\omega]}$, $\eta \in E_{[\omega]}$).
- $V_{[\omega]} \longleftrightarrow \Omega_{[\omega]}$ (Vinberg 対応).

$$V_{[5]} = \begin{array}{cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 5 & \\ \hline & & 0 & & & 1 \\ 0 & & & & & 2 \\ & & & & & 3 \\ \hline & & & & & 5 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

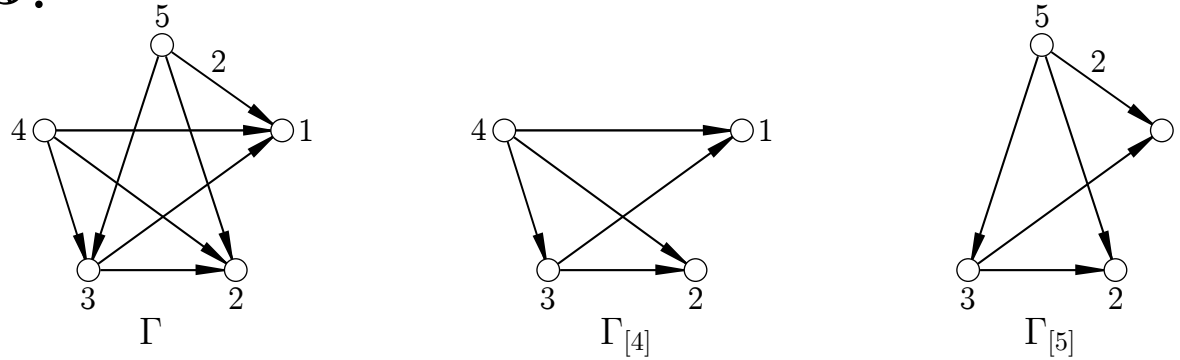
$E_{[5]} = \text{網掛け部分}$

定理 2

$x \in V_{[\omega]}$ とするとき, $x \in \Omega_{[\omega]} \iff \varphi_{[\omega]}(x) \gg 0$.

- $\mathcal{S} = \{r\}$ なら手続き終わり. このときは $V = V_{[r]}$, $\Omega = \Omega_{[r]}$ であり, $\Omega_{[r]}^0 := \varphi_{[r]}(\Omega_{[r]}) \subset \mathcal{P}(E_{[r]})$ が求めていた実現.
- 一般に $\varphi_{[\omega]}$ は単純推移的な作用を intertwine する.
- 一般に $\varphi_{[\omega]}$ は次の意味で**最小**, すなわち $\Phi : V_{[\omega]} \rightarrow \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ が単射 LSA 準同型 $\implies N \geq \dim E_{[\omega]}$.

$\#\mathcal{S} \geq 2$ のとき, 各 $\Omega_{[\omega]}^0 := \varphi_{[\omega]}(\Omega_{[\omega]})$ ($\omega \in \mathcal{S}$) を **組み立て直す**.
例で説明する.



$$\Omega_{[4]}^0 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & x_{31} & x_{41} \\ 0 & \lambda_2 & x_{32} & x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & x_{43} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{array} \right) \gg 0 \right\}, \quad \Omega_{[5]}^0 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & x_{31} \mathbf{e}_1 & \mathbf{x}_{51} \\ {}^t \mathbf{0}_2 & \lambda_2 & x_{32} & x_{52} \\ x_{31} {}^t \mathbf{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & x_{53} \\ {}^t \mathbf{x}_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{array} \right) \gg 0 \right\}$$

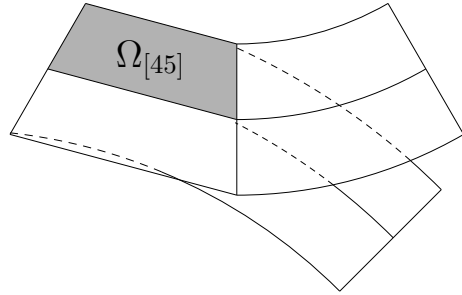
$(\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \mathbf{x}_{51} \in \mathbb{R}^2)$

網掛け部分を糊付けする.

$\mathcal{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\text{out}}[\omega_i] \cap N^{\text{out}}[\omega_j]$ ($i < j$): ω_i, ω_j の **合流頂点集合** と呼ぶ.

$$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i, j \in \mathcal{J}(\omega_i, \omega_j)}} V_{ji} \text{ が } V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}.$$

$\Omega_{[\omega_i \omega_j]} \longleftrightarrow V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ (Vinberg 対応). 例では $\mathcal{J}(5, 4) = \{1, 2, 3\}$.



糊付けされた左記の $\Omega_{[45]}$ の部分は、実際には $\varphi_4(\Omega_{[45]}) \subset \Omega_{[4]}^0$ と $\varphi_5(\Omega_{[45]}) \subset \Omega_{[5]}^0$ を糊付け.

単純推移的に作用する群の記述

$$H_{[4]}^0 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{pmatrix} \right\}_{(\lambda_j > 0)}, \quad H_{[5]}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ {}^t \mathbf{0}_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31} {}^t \mathbf{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ {}^t \mathbf{x}_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{pmatrix} \right\}_{(\lambda_j > 0)},$$

得られた等質開凸錐 Ω の realization は、部品凸錐 $\Omega_{[\omega]}^0$ ($\omega \in \mathcal{S}$) の順番の入れ替えを除いて一意的である.