等質開凸錐を具現化する

(Joint work with Takashi Yamasaki)

野 村 隆 昭

九大数理

鳥取市

2014 年 12 月 25 日

第４回 日本・チュニジア ワークショップのお知らせ

- 2015年12月18日（現地集合）
- 2015年12月23日（現地解散）
- 開催地は未定（Monastirあたりか？）

- 日本からの直行便はありません.
- ヨーロッパや中東で乗り換え.

参 加 歓 迎

$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) := \{x \in \mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})\ ;\ x \gg 0\}$：$N$ 次正定値実対称行列全体

$GL(N,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathscr{P}(N,\mathbb{R})$：推移的 by $GL(N,\mathbb{R}) \times \mathscr{P}(N,\mathbb{R}) \ni (g,x) \mapsto g x\, {}^t g$

$\downarrow$ **制限**

$H^+(N,\mathbb{R}) := \{g \in GL(N,\mathbb{R})\ ;\ $下三角，対角成分 $> 0\}$

$\Longrightarrow$ 作用は単純推移的（固定部分群 $= \{$単位元$\}$）

$$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) = \{g\, {}^t g\ ;\ g \in H^+(N,\mathbb{R})\} = H^+(N,\mathbb{R}) \cdot I$$

$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) := \{x \in \mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})\ ;\ x \gg 0\}$：$N$ 次正定値実対称行列全体

$GL(N,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathscr{P}(N,\mathbb{R})$：推移的 by $GL(N,\mathbb{R}) \times \mathscr{P}(N,\mathbb{R}) \ni (g,x) \mapsto gx\,{}^t g$

$\downarrow$ 制限

$H^+(N,\mathbb{R}) := \{g \in GL(N,\mathbb{R})\ ;\ $下三角，対角成分 $> 0\}$

$\Longrightarrow$ 作用は単純推移的（固定部分群 $= \{$単位元$\}$）

$$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) = \{g\,{}^t g\ ;\ g \in H^+(N,\mathbb{R})\} = H^+(N,\mathbb{R}) \cdot I$$

$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{等質性に注目して一般化}}$ **等質開凸錐**

$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) := \{x \in \mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})\ ;\ x \gg 0\}$：$N$次正定値実対称行列全体

$GL(N,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathscr{P}(N,\mathbb{R})$：推移的 by $GL(N,\mathbb{R}) \times \mathscr{P}(N,\mathbb{R}) \ni (g,x) \mapsto gx\,{}^t g$

$\downarrow$ **制限**

$H^+(N,\mathbb{R}) := \{g \in GL(N,\mathbb{R})\ ;\ $下三角，対角成分 $> 0\}$

$\Longrightarrow$ 作用は単純推移的（固定部分群 $= \{$単位元$\}$）

$$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) = \{g\,{}^t g\ ;\ g \in H^+(N,\mathbb{R})\} = H^+(N,\mathbb{R}) \cdot I$$

$\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{等質性に注目して一般化}}$ **等質開凸錐**

V：有限次元実ベクトル空間（内積を持つ）

$V \supset \Omega$：正則開凸錐（直線を含まない）

$GL(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$：$\Omega$の線型同型群

（$GL(V)$の閉部分群としてLie群）

Ω：**等質** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $GL(\Omega) \curvearrowright \Omega$が推移的.

Vinbergの非結合的行列代数 with $*$（T代数）により
任意の等質開凸錐 $= \{hh^* \,;\, h \in H^+\}$（$T$代数での積）
　ただし，$H^+ := \{h \,;\,$ 下三角，対角成分 $> 0\}$
Theoretically beautiful analogue of $\mathscr{P}(N, \mathbb{R}) = \{g\,{}^t g \,;\, g \in H^+(N, \mathbb{R})\}$.

Vinbergの非結合的行列代数 with $*$（T代数）により
任意の等質開凸錐 $= \{hh^* \,;\, h \in H^+\}$（$T$代数での積）
　ただし，$H^+ := \{h \,;$ 下三角，対角成分 $> 0\}$
Theoretically beautiful analogue of $\mathscr{P}(N, \mathbb{R}) = \{g\,{}^t g \,;\, g \in H^+(N, \mathbb{R})\}$.

でも実際には

- 結合法則なしでの行列の計算は大変.

Vinbergの非結合的行列代数 with $*$（T代数）により
任意の等質開凸錐 $= \{hh^* \, ; \, h \in H^+\}$（$T$代数での積）
　ただし，$H^+ := \{h \, ; \,$ 下三角，対角成分 $> 0\}$
Theoretically beautiful analogue of $\mathscr{P}(N, \mathbb{R}) = \{g\,{}^t g \, ; \, g \in H^+(N, \mathbb{R})\}$.

でも実際には

- 結合法則なしでの行列の計算は大変.

応用上は

- より容易に開凸錐にアクセスできるのが望ましい

Vinbergの非結合的行列代数 with $*$（T代数）により

任意の等質開凸錐 $= \{hh^* \,;\, h \in H^+\}$（$T$代数での積）

　ただし，$H^+ := \{h \,;\,$ 下三角，対角成分 $> 0\}$

Theoretically beautiful analogue of $\mathscr{P}(N,\mathbb{R}) = \{g\,{}^t g \,;\, g \in H^+(N,\mathbb{R})\}$.

でも実際には

- 結合法則なしでの行列の計算は大変.

応用上は

- より容易に開凸錐にアクセスできるのが望ましい

他の目的

- T代数を使うのをやめる（定義中の要求項目が多すぎる）
- 基本事項を**Vinberg代数**（クランと呼ぶのもやめる）で書き上げたい

　そもそも clan という英単語（仏単語）が別にある.

　ロシア語の雰囲気を残して **klan** とすべきであった.

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

$E \in \Omega$を固定すると，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$は微分同相

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

$E \in \Omega$を固定すると，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ は微分同相

$\implies$ Eでの微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$ は線型同型 $(\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H))$

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

$E \in \Omega$を固定すると，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$は微分同相

$\Longrightarrow$ Eでの微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$は線型同型 ($\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$)

$\Longrightarrow$ $\forall x \in V$，$\exists 1 L(x) \in \mathfrak{h}$ s.t. $L(x)E = x$.

(注意：$V \ni x \mapsto L(x) \in \mathscr{L}(V)$は線型)

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

$E \in \Omega$を固定すると，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$は微分同相

$\Longrightarrow$ Eでの微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$は線型同型 ($\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$)

$\Longrightarrow$ $\forall x \in V$，$\exists 1 L(x) \in \mathfrak{h}$ s.t. $L(x)E = x$.

（注意：$V \ni x \mapsto L(x) \in \mathscr{L}(V)$は線型）

$\Longrightarrow$ $x \vartriangle y := L(x)y$で$V$に双線型な積（結合法則は気にしない）

等質開凸錐実現のブラック・ボックス化

Ω：与えられた等質錐 $\subset V$

$\exists H$（共役を除いて一意的）分裂可解 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

$E \in \Omega$を固定すると，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$は微分同相

$\Longrightarrow$ Eでの微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$は線型同型 ($\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$)

$\Longrightarrow$ $\forall x \in V$，$\exists 1 L(x) \in \mathfrak{h}$ s.t. $L(x)E = x$.

（注意：$V \ni x \mapsto L(x) \in \mathscr{L}(V)$は線型）

$\Longrightarrow$ $x \bigtriangleup y := L(x)y$で$V$に双線型な積（結合法則は気にしない）

$\Longrightarrow$ Vに**Vinberg代数**の構造が入り，Eはその単位元

Vinberg代数 (Vinberg 1963)

定義 1

V：実ベクトル空間 with 双線型な積 $x \triangle y = L(x)y$.

V：**Vinberg代数** $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ $(\forall x, y \in V)$,

(2) $\exists s \in V^*$ s.t. $s(x \triangle y)$ は V に内積を定義する,

(3) 各 $L(x)$ の固有値は実数のみ.

- 積 $\triangle$ に結合法則は要求しない.

Vinberg代数 (Vinberg 1963)

定義 1

V：実ベクトル空間 with 双線型な積 $x \triangle y = L(x)y$.

V：**Vinberg代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ $(\forall x, y \in V)$,

(2) $\exists s \in V^*$ s.t. $s(x \triangle y)$ は V に内積を定義する,

(3) 各 $L(x)$ の固有値は実数のみ.

- 積 $\triangle$ に結合法則は要求しない.
- 一般には単位元の存在を仮定しない.
- (1) $\Longleftrightarrow$ $[x, y, z] = [y, x, z]$ $(\forall x, y, z \in V)$,
  ただし，$[x, y, z] := x \triangle (y \triangle z) - (x \triangle y) \triangle z$：結合子.
- (1) をみたす代数は左対称代数と呼ばれている.
- 左対称代数は数理物理等で時々現れる.

元にもどって：

- $\Omega \subset V$ において，V に Vinberg 代数の構造が入った．

元にもどって：

- $\Omega \subset V$ において，V に Vinberg 代数の構造が入った.

$$\Longrightarrow\ V = \bigoplus_{1 \leqq j \leqq k \leqq r} V_{ji}\ (V_{jj} = \mathbb{R}c_j; j = 1, \ldots, r)：$$

Vinberg 枠 $c_1, \ldots .c_r$ に関する正規分解.

- Vinberg 枠 $=$ 原始ベキ等元の完全系 $(c_1 + \cdots + c_r = E)$

元にもどって：

- $\Omega \subset V$ において，V に Vinberg 代数の構造が入った．

$$\Longrightarrow \ V = \bigoplus_{1 \leqq j \leqq k \leqq r} V_{ji} \ (V_{jj} = \mathbb{R}c_j; j = 1, \ldots, r)：$$

Vinberg 枠 $c_1, \ldots .c_r$ に関する正規分解．

- Vinberg 枠 $=$ 原始ベキ等元の完全系 $(c_1 + \cdots + c_r = E)$
- 要するに V を次のように思えということ：

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & V_{21} & \cdots & V_{r-1,1} & V_{r1} \\ V_{21} & \mathbb{R}c_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ V_{r-1,1} & & & \mathbb{R}c_{r-1} & V_{r,r-1} \\ V_{r1} & \cdots & \cdots & V_{r,r-1} & \mathbb{R}c_r \end{pmatrix} \qquad (r：\Omega \text{ あるいは } V \text{ の\textbf{階数}})$$

- $d_{ji} := \dim V_{ji}$ (off-diagonal subspacesの次元)
- 以上のデータからグラフを描く

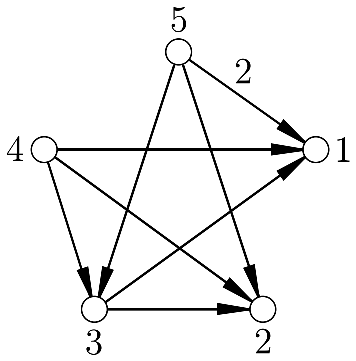
$$\mathscr{V} := \{1, \ldots, r\}, \quad \mathscr{A} := \{[j \to i] \,;\, i < j, \text{ and } d_{ji} > 0\}.$$

$[j \to i]$あるいは$j \to i$：jを出てiに入るarc

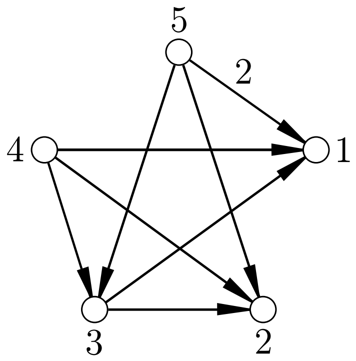
$$\overset{j}{\circ} \xrightarrow{d_{ji}} \overset{i}{\circ} \qquad \text{if } \dim V_{ji} > 0.$$

- グラフ$\Gamma = \Gamma(V) = (\mathscr{V}, \mathscr{A})$ は向き付け (oriented) グラフである：
  $j \to i$と$i \to j$は同時にはないし，$i \to i$もない.

例 $d_{ji} = 1$ のときは，arc の上には数字を書かない（簡単のため）.



例 $d_{ji}=1$ のときは，arc の上には数字を書かない（簡単のため）.

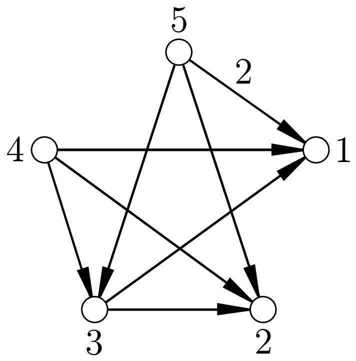


- グラフ Γ から sources をすべて集める.

  (source = 入ってくる arc のない vertex)

  $\mathscr{S}$: Γ の sources 全体．つねに $r \in \mathscr{S}$ ゆえ，$\mathscr{S} \neq \varnothing$ に注意.
- 上の例では $\mathscr{S}=\{4,5\}$.

例 $d_{ji} = 1$のときは，arcの上には数字を書かない（簡単のため）.



- グラフΓからsourcesをすべて集める.

  (source = 入ってくるarcのないvertex)

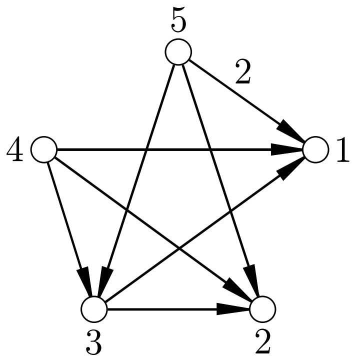
  $\mathscr{S}$：Γのsources全体．つねに$r \in \mathscr{S}$ゆえ，$\mathscr{S} \neq \varnothing$に注意.
- 上の例では$\mathscr{S} = \{4, 5\}$.
- 各$\omega \in \mathscr{S}$に対して，そのout-neighborsを全部拾い上げる.

  (ωのout-neighbors = $[\omega \to k] \in \mathscr{A}$となるvertices k).

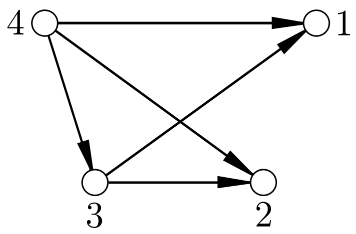
  $N^{\mathrm{out}}(\omega) :=$ {out-neighbors of ω}，$N^{\mathrm{out}}[\omega] := N^{\mathrm{out}}(\omega) \cup \{\omega\}$.
- 上の例では，$N^{\mathrm{out}}[4] = \{1, 2, 3, 4\}$，$N^{\mathrm{out}}[5] = \{1, 2, 3, 5\}$.

- $N^{\mathrm{out}}[\omega]$ から oriented sub-graphs $\Gamma_{[\omega]}$ を形成する.

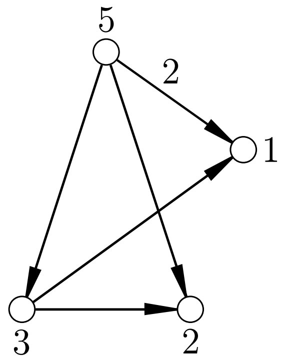
  先の例では $N^{\mathrm{out}}[4] = \{1, 2, 3, 4\}$, $N^{\mathrm{out}}[5] = \{1, 2, 3, 5\}$ であったから



Γ



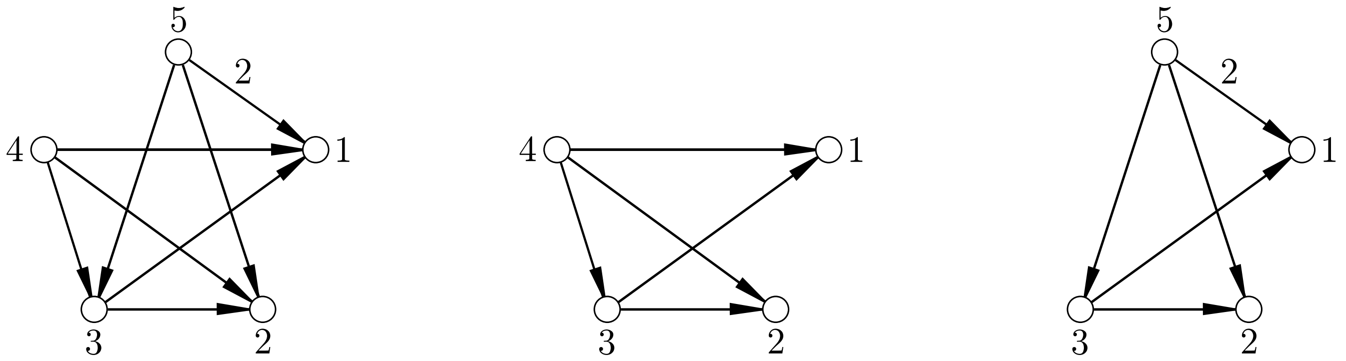
$\Gamma_{[4]}$



$\Gamma_{[5]}$

- $N^{\mathrm{out}}[\omega]$ から oriented sub-graphs $\Gamma_{[\omega]}$ を形成する.

  先の例では $N^{\mathrm{out}}[4]=\{1,2,3,4\}$, $N^{\mathrm{out}}[5]=\{1,2,3,5\}$ であったから



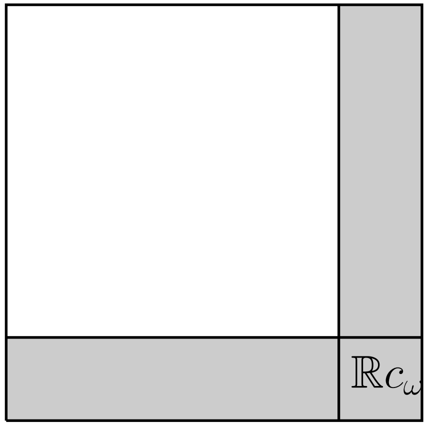
Γ $\Gamma_{[4]}$ $\Gamma_{[5]}$

各 $\omega\in\mathscr{S}$ に対して

- $V_{[\omega]}:=\displaystyle\bigoplus_{\substack{i\le j\\ i,j\in N^{\mathrm{out}}[\omega]}} V_{ji}$ は V の部分代数 (the source subalgebra corresp.to ω).

- $E_{[\omega]}:=\displaystyle\bigoplus_{i\in N^{\mathrm{out}}[\omega]} V_{\omega i}$ は $V_{[\omega]}$ の両側ideal.

ω と結ばれていない vertices を削除すると，V_ω，E_ω は下記のように見る事ができる

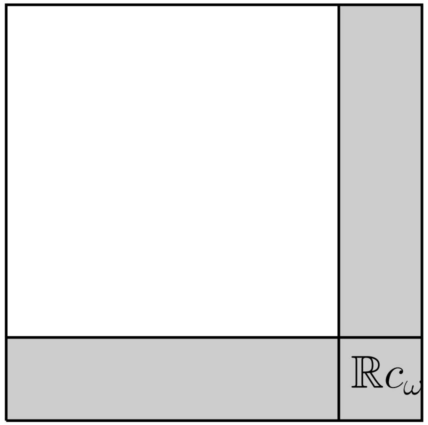
$V_{[\omega]} =$ 

$V_{[\omega]} =$ 大きい正方形

$\supset E_{[\omega]} =$ 網かけ部分

ωと結ばれていないverticesを削除すると，V_ω，E_ωは下記のように見る事ができる

$V_{[\omega]} =$



$V_{[\omega]} =$ 大きい正方形

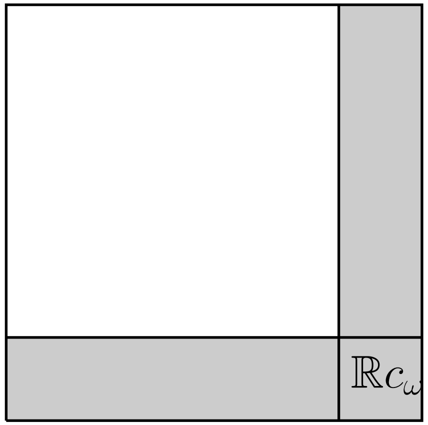
$\supset E_{[\omega]} =$ 網かけ部分

- $\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \bigtriangleup x$ $(x \in V_{[\omega]},\ \eta \in E_{[\omega]})$.

  $E_{[\omega]}$の内積のminor change後，$\varphi_{[\omega]}(x) \in \mathrm{Sym}(E_{[\omega]})$となる.

ω と結ばれていない vertices を削除すると，V_ω，E_ω は下記のように見る事ができる

$V_{[\omega]} =$



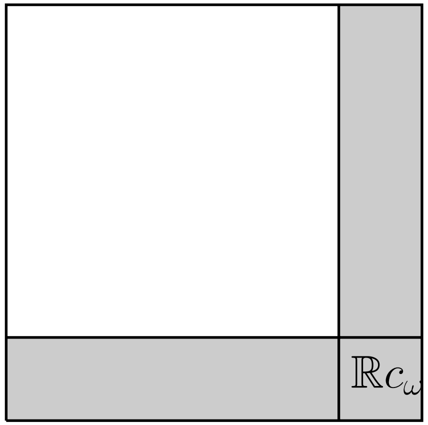
$V_{[\omega]} =$ 大きい正方形

$\supset E_{[\omega]} =$ 網かけ部分

- $\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \triangle x \ (x \in V_{[\omega]},\ \eta \in E_{[\omega]})$.
  $E_{[\omega]}$ の内積の minor change 後，$\varphi_{[\omega]}(x) \in \mathrm{Sym}(E_{[\omega]})$ となる.
- $\Omega_{[\omega]}$: $V_{[\omega]}$ に対応する等質開凸錐.

ω と結ばれていない vertices を削除すると，V_ω，E_ω は下記のように見る事ができる

$V_{[\omega]} =$



$V_{[\omega]} =$ 大きい正方形

$\supset E_{[\omega]} =$ 網かけ部分

- $\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \triangle x \ (x \in V_{[\omega]},\ \eta \in E_{[\omega]})$.

  $E_{[\omega]}$ の内積の minor change 後，$\varphi_{[\omega]}(x) \in \mathrm{Sym}(E_{[\omega]})$ となる.

- $\Omega_{[\omega]}$：$V_{[\omega]}$ に対応する等質開凸錐.

$$e_{[\omega]} := \sum_{j \in N^{\mathrm{out}}[\omega]} c_j：V_{[\omega]} \text{の単位元}, \qquad \mathfrak{h}_{[\omega]} := \{L_{[\omega]}(x)\ ;\ x \in V_{[\omega]}\},$$

$$H_{[\omega]} := \exp \mathfrak{h}_{[\omega]}, \qquad \Omega_{[\omega]} := H_{[\omega]} e_{[\omega]}$$

- $\Omega_{[\omega]}$：source ω に対応する **source homogeneous cone** と呼ぶ.

Source cones は simple な記述を持つ.

定理 2

$x \in V_{[\omega]}$ とするとき, $x \in \Omega_{[\omega]} \iff \varphi_{[\omega]}(x) \gg 0$.

Source cones はsimpleな記述を持つ.

定理 2

$x \in V_{[\omega]}$ とするとき，$x \in \Omega_{[\omega]} \iff \varphi_{[\omega]}(x) \gg 0$.

- $\mathscr{S} = \{r\}$ なら手続き終わり．このときは，$V = V_{[r]}$, $\Omega = \Omega_{[r]}$ であり，$\Omega^0_{[r]} := \varphi_{[r]}(\Omega_{[r]}) \subset \mathscr{P}(E_{[r]})$ が求めていた実現.
- $\varphi_{[r]}$ は単純推移的な作用をintertwineする：
$$H \curvearrowright \Omega \quad \text{and} \quad \exp L(V^0_{[r]}) \curvearrowright \Omega^0_{[r]}.$$
ただし，$V^0_{[r]} := \varphi_{[r]}(V_{[r]}) \subset \mathrm{Sym}(E_{[r]})$, $\exp L(V^0_{[r]}) \subset GL(E_{[r]})$.
- $\varphi_{[r]}$ は次の意味で極小，すなわち
$\Phi : V \to \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$: injective LSA hom. $\implies N \geq \dim E_{[r]}$.

一般には

命題 3

$x \in V$ のとき, $x \in \Omega \iff \pi_{[\omega]}(x) \in \Omega_{[\omega]}$ for $\forall \omega \in \mathscr{S}$

($\pi_{[\omega]} : V \to V_{[\omega]}$ は直交射影作用素).

一般には

命題 3

$x \in V$ のとき，$x \in \Omega \iff \pi_{[\omega]}(x) \in \Omega_{[\omega]}$ for $\forall\omega \in \mathscr{S}$

（$\pi_{[\omega]} : V \to V_{[\omega]}$ は直交射影作用素）.

したがって

定理 4

$$\Omega = \left\{x \in V \ ; \ \varphi_{[\omega]}(\pi_{[\omega]}(x)) \gg 0 \ \ (\forall\omega \in \mathscr{S})\right\}.$$

一般には

命題 3

$x \in V$ のとき，$x \in \Omega \iff \pi_{[\omega]}(x) \in \Omega_{[\omega]}$ for $\forall\omega \in \mathscr{S}$

（$\pi_{[\omega]} : V \to V_{[\omega]}$ は直交射影作用素）.

したがって

定理 4

$$\Omega = \left\{ x \in V \ ; \ \varphi_{[\omega]}(\pi_{[\omega]}(x)) \gg 0 \ \ (\forall\omega \in \mathscr{S}) \right\}.$$

次の仕事は，各 $\Omega^0_{[\omega]} := \varphi_{[\omega]}(\Omega_{[\omega]})$ $(\omega \in \mathscr{S})$ を**組み立て直す**こと.

$\mathscr{S} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ $(s > 1)$.

$V^0_{[\omega_i]} := \varphi_{[\omega_i]}(V_{[\omega_i]}) \subset \mathrm{Sym}(E_{[\omega_i]})$.

$V^0 := V^0_{[\omega_1]} \oplus \cdots \oplus V^0_{[\omega_s]}$：ベクトル空間$V^0_{[\omega_i]}$ $(i = 1, \ldots, s)$ の外部直和.

$\mathscr{S} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ $(s > 1)$.

$V^0_{[\omega_i]} := \varphi_{[\omega_i]}(V_{[\omega_i]}) \subset \mathrm{Sym}(E_{[\omega_i]})$.

$V^0 := V^0_{[\omega_1]} \oplus \cdots \oplus V^0_{[\omega_s]}$：ベクトル空間 $V^0_{[\omega_i]}$ $(i = 1, \ldots, s)$ の外部直和.

$\pi_{[\omega]} : V \to V_{[\omega]}$ は直交射影作用素

$V^0_{[\mathscr{S}]} := \left\{(X_1, \ldots, X_s) \in V^0 \ ; \ \pi_{[\omega_j]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_i]}(X_i) = \pi_{[\omega_i]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_j]}(X_j) \text{ for any } i \neq j\right\}$.

これを $V^0_{[\mathscr{S}]} = \left[V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}\right]$ と表して，$V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}$ の **stapling** と呼ぶ.

$\mathscr{S} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ $(s > 1)$.

$V^0_{[\omega_i]} := \varphi_{[\omega_i]}(V_{[\omega_i]}) \subset \mathrm{Sym}(E_{[\omega_i]})$.

$V^0 := V^0_{[\omega_1]} \oplus \cdots \oplus V^0_{[\omega_s]}$：ベクトル空間 $V^0_{[\omega_i]}$ $(i = 1, \ldots, s)$ の外部直和.

$\pi_{[\omega]} : V \to V_{[\omega]}$ は直交射影作用素

$V^0_{[\mathscr{S}]} := \left\{(X_1, \ldots, X_s) \in V^0 \ ; \ \pi_{[\omega_j]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_i]}(X_i) = \pi_{[\omega_i]} \circ \varphi^{-1}_{[\omega_j]}(X_j) \text{ for any } i \neq j\right\}$.

これを $V^0_{[\mathscr{S}]} = \left[V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}\right]$ と表して，$V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}$ の **stapling** と呼ぶ.

- $s = 2$ のとき．$(W := V_{[\omega_1]} \cap V_{[\omega_2]})$

$$V^0_{[\omega_1]} \oplus V^0_{[\omega_2]} = \varphi_{[\omega_1]}\big(W + (V_{[\omega_1]} \cap W^\perp)\big) \oplus \varphi_{[\omega_2]}\big(W + (V_{[\omega_2]} \cap W^\perp)\big).$$

したがって

$$\left[V^0_{[\omega_1]}, V^0_{[\omega_2]}\right] = \left\{\big(\varphi_{[\omega_1]}(w + x_1),\ \varphi_{[\omega_2]}(w + x_2)\big) \ ; \ w \in W,\ x_j \in V_{[\omega_j]} \cap W^\perp\right\}.$$

線型同型写像 $\varphi_{[\mathscr{S}]} = [\varphi_{[\omega_1]}, \ldots, \varphi_{[\omega_s]}] : V \to V^0_{[\mathscr{S}]}$ を自然に定義する.

$V = \sum_{i=1}^{s} V_{[\omega_i]}$ （直和とは限らない部分空間の和）

$$\Longrightarrow \dim V = \sum_{p=1}^{s} (-1)^{p-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le s} \dim(V_{[\omega_{i_1}]} \cap \cdots V_{[\omega_{i_p}]}).$$

かくして $V^0_{[\omega_i]}$ 達の stapling が完成：$V^0_{[\mathscr{S}]} = \left[V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}\right]$ $\cdots\cdots(*)$

線型同型写像 $\varphi_{[\mathscr{S}]} = [\varphi_{[\omega_1]}, \ldots, \varphi_{[\omega_s]}] : V \to V^0_{[\mathscr{S}]}$ を自然に定義する.

$V = \sum_{i=1}^{s} V_{[\omega_i]}$ （直和とは限らない部分空間の和）

$$\Longrightarrow \dim V = \sum_{p=1}^{s} (-1)^{p-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le s} \dim(V_{[\omega_{i_1}]} \cap \cdots V_{[\omega_{i_p}]}).$$

かくして $V^0_{[\omega_i]}$ 達の stapling が完成：$V^0_{[\mathscr{S}]} = \left[V^0_{[\omega_1]}, \ldots, V^0_{[\omega_s]}\right] \cdots\cdots (*)$

- $\Omega^0_{[\omega_i]}$ 達も $(*)$ に従って staple する：$\Omega^0_{[\mathscr{S}]} := \left[\Omega^0_{[\omega_1]}, \ldots, \Omega^0_{[\omega_s]}\right]$.
- 単純推移的に働いている線型 Lie 群も staple する：$H^0_{[\mathscr{S}]} := \left[H^0_{[\omega_1]}, \ldots, H^0_{[\omega_s]}\right]$.

$$\begin{array}{ccccc} H^0_{[\omega_i]} := & \exp L(V^0_{[\omega_i]}) & \curvearrowright & \Omega^0_{[\omega_i]} \\ & \cap & & \cap \\ & GL(E_{[\omega_i]}) & \curvearrowright & \mathrm{Sym}(E_{[\omega_i]}) \end{array}$$

Staplingの過程で起こっていること

Staplingの過程で起こっていること

$\mathscr{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\mathrm{out}}[\omega_i] \cap N^{\mathrm{out}}[\omega_j]$ $(i < j)$: ω_i, ω_j の junction set と呼ぶ.

$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i,j \in \mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)}} V_{ji}$ が $V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ の正規分解.

Staplingの過程で起こっていること

$\mathscr{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\mathrm{out}}[\omega_i] \cap N^{\mathrm{out}}[\omega_j]$ $(i < j)$：ω_i, ω_j の junction set と呼ぶ.

$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \displaystyle\bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i,j \in \mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)}} V_{ji}$ が $V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ の正規分解.

$\Omega_{[\omega_i\omega_j]}$：$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ に対応する等質開凸錐.

Then $\Omega_{[\omega_i\omega_j]} = \pi_{\omega_i\omega_j}(\Omega_{[\omega_i]}) = \pi_{\omega_j\omega_i}(\Omega_{[\omega_j]})$. ただし

$$\pi_{\omega_i\omega_j} : V_{[\omega_i]} \longrightarrow V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}, \quad \pi_{\omega_j\omega_i} : V_{[\omega_j]} \longrightarrow V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$$ 直交射影作用素.

Staplingの過程で起こっていること

$\mathscr{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\mathrm{out}}[\omega_i] \cap N^{\mathrm{out}}[\omega_j]$ $(i < j)$：ω_i, ω_j の junction set と呼ぶ.

$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i,j \in \mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)}} V_{ji}$ が $V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ の正規分解.

$\Omega_{[\omega_i\omega_j]}$：$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ に対応する等質開凸錐.

Then $\Omega_{[\omega_i\omega_j]} = \pi_{\omega_i\omega_j}(\Omega_{[\omega_i]}) = \pi_{\omega_j\omega_i}(\Omega_{[\omega_j]})$. ただし

$\pi_{\omega_i\omega_j} : V_{[\omega_i]} \to V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}, \quad \pi_{\omega_j\omega_i} : V_{[\omega_j]} \to V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ 直交射影作用素.

$\mathscr{J}(\omega_i, \omega_j)$ から $\Gamma = \Gamma(V)$ の部分グラフ $\Gamma_{\mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)}$ を描く.

$\mathscr{J}_0(\omega_i, \omega_j) := \mathscr{S}(\Gamma_{\mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)})$: the source set for $\Gamma_{\mathscr{J}(\omega_i,\omega_j)}$.

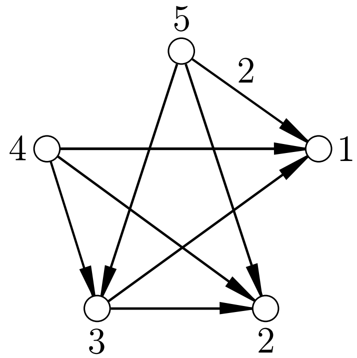
(the reduced junction set for ω_i, ω_j)

$\mathscr{J}_0(\omega_i, \omega_j) = \{j_1, \ldots, j_t\}$ とし，$\Omega^0_{[\mathscr{J}_0(\omega_i,\omega_j)]} := \left[\Omega^0_{[j_1]}, \ldots, \Omega^0_{[j_t]}\right]$.

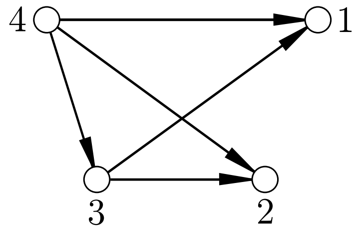
このとき $\Omega_{[\omega_i\omega_j]} \cong \Omega^0_{[\mathscr{J}_0(\omega_i,\omega_j)]}$ ゆえ，次のように言う：

$\Omega^0_{[\omega_i]}$ と $\Omega^0_{[\omega_j]}$ は $\Omega^0_{[\mathscr{J}_0(\omega_i,\omega_j)]}$ においてstapleされている.

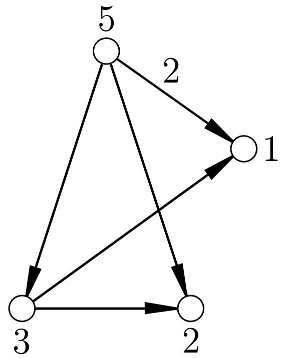
例に戻ろう：



Γ

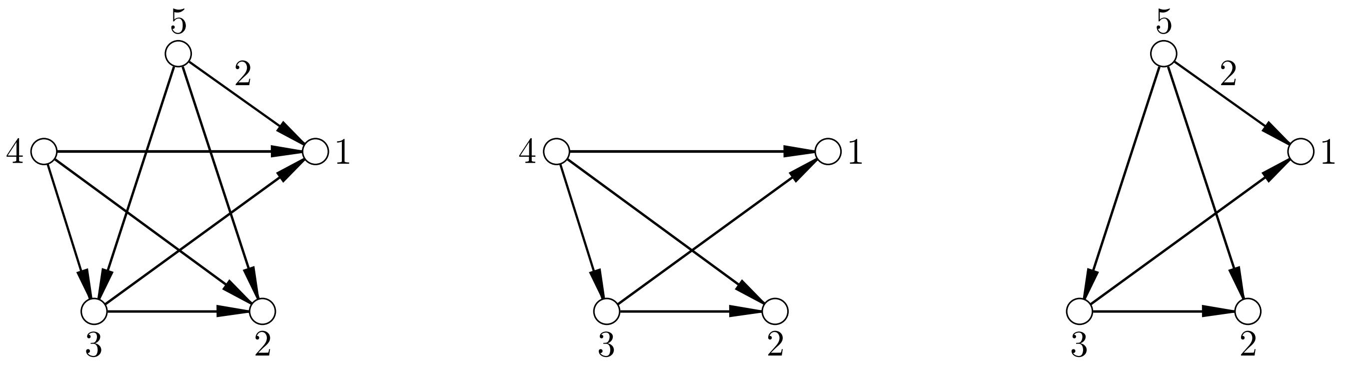


$\Gamma_{[4]}$



$\Gamma_{[5]}$

例に戻ろう：



Γ $\qquad\qquad$ $\Gamma_{[4]}$ $\qquad\qquad$ $\Gamma_{[5]}$

$$\Omega^0_{[4]} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & x_{31} & x_{41} \\ 0 & \lambda_2 & x_{32} & x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & x_{43} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{pmatrix} \gg 0 \right\}, \quad \Omega^0_{[5]} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & x_{31}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{x}_{51} \\ {}^t\mathbf{0}_2 & \lambda_2 & x_{32} & x_{52} \\ x_{31}{}^t\boldsymbol{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & x_{53} \\ {}^t\boldsymbol{x}_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{pmatrix} \gg 0 \right\}$$

網掛け部分がstapleされた箇所. $\mathscr{J}(5,4) = \{1,2,3\}$ に注意.

$\Omega^0_{[4]}$ において：網掛け部分は双対Vinberg coneの極小実現.

$\Omega^0_{[5]}$ において：網掛け部分は双対Vinberg coneの極小実現ではない.

$$H^0_{[4]} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{pmatrix} \right\}_{(\lambda_j > 0)}, \quad H^0_{[5]} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ {}^t\mathbf{0}_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31}{}^t\boldsymbol{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ {}^t\boldsymbol{x}_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{pmatrix} \right\}_{(\lambda_j > 0)},$$

網掛け部分がstapleされた箇所.

$$H^0_{[\mathscr{S}]} = \{h = [h_4, h_5]\ ;\ h_j \in H^0_{[j]}\ \ (j = 4, 5)\}.$$

$$H^0_{[4]} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{pmatrix}_{(\lambda_j > 0)} \right\}, \quad H^0_{[5]} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ {}^t\mathbf{0}_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ x_{31}{}^t\boldsymbol{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & 0 \\ {}^t\boldsymbol{x}_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{pmatrix}_{(\lambda_j > 0)} \right\},$$

網掛け部分がstapleされた箇所.

$$H^0_{[\mathscr{S}]} = \{h = [h_4, h_5]\ ;\ h_j \in H^0_{[j]}\ \ (j = 4, 5)\}.$$

Ω	$\rightsquigarrow$	V	: the corresponding Vinberg algebra
	$\rightsquigarrow$	$\Gamma = \Gamma(V)$	: the corresponding oriented graph
	$\rightsquigarrow$	$\mathscr{S} = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$	: the sources of Γ
	$\rightsquigarrow$	$\Omega_{[\omega_1]}, \dots, \Omega_{[\omega_s]}$	: the source homogeneous cones
	$\rightsquigarrow$	$\Omega^0_{[\omega_1]}, \dots, \Omega^0_{[\omega_s]}$	: the minimal realizations of the source cones
	$\rightsquigarrow$	$\Omega^0_{[\mathscr{S}]} := \left[\Omega^0_{[\omega_1]}, \dots, \Omega^0_{[\omega_s]}\right]$	: stapling of the $\Omega^0_{[\omega_i]}$'s

金行・辻条件 (1974)

V：Vinberg代数，$\Gamma = \Gamma(V)$：対応するoriented graph，$\mathscr{A}$：Γのarc set，
c：次で与えられる重み函数$\mathscr{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$

$$c([j \to i]) = \dim V_{ji} \quad \text{for } i < j \text{ s.t. } \dim V_{ji} > 0.$$

(KT1) $i < j < k$とし，路$k \to j \to i$があるとき，$\max\bigl(c_{kj}, c_{ji}\bigr) \leq c_{ki}$.

(KT2) $i < j < k < l$とし，路$l \to k \to i$，$l \to j \to i$があり，
$j \notin N^{\mathrm{out}}(k)$ならば，$c_{li} \geq \max(c_{lk}, c_{ki}) + \max(c_{lj}, c_{ji})$.

金行・辻条件 (1974)

V：Vinberg代数，$\Gamma = \Gamma(V)$：対応するoriented graph，$\mathscr{A}$：Γのarc set，
c：次で与えられる重み函数$\mathscr{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$

$$c([j \to i]) = \dim V_{ji} \quad \text{for } i < j \text{ s.t. } \dim V_{ji} > 0.$$

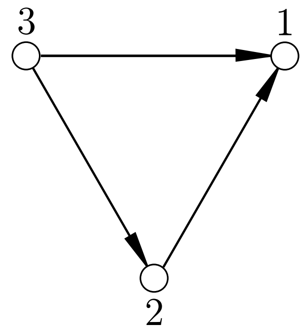
(KT1) $i < j < k$とし，路$k \to j \to i$があるとき，$\max\bigl(c_{kj}, c_{ji}\bigr) \leq c_{ki}$.

(KT2) $i < j < k < l$とし，路$l \to k \to i$，$l \to j \to i$があり，
$j \notin N^{\mathrm{out}}(k)$ならば，$c_{li} \geq \max(c_{lk}, c_{ki}) + \max(c_{lj}, c_{ji})$.

(1) $\Gamma = \Gamma(V)$は(KT1)と(KT2)をみたす.
(2) $V \mapsto \Gamma(V)$は単射でも全射でもない.
(3) しかし，$\dim V \leq 10$では全単射.
(4) $\dim V = 11$では，重みも込めて同一の$\Gamma(V)$を与える連続無限個の非同型なVが存在する.
(5) (KT1)と(KT2)をみたすΓで，$\Gamma \neq \Gamma(V)$ $(\forall V)$ となるものがある.

(5) について：下図のΓで

$$c([3 \to 1]) = c([3 \to 2]) = c([2 \to 1]) = d \in \mathbb{Z}_{>0}$$



明らかに (KT1) と (KT2) をみたすが,

$$\Gamma = \Gamma(V) \text{ for some } V \iff d = 1, 2, 4, 8.$$

この場合，$\Omega \cong \mathscr{P}(3, \mathbb{K})$．ただし

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}\ (d = 1), \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}\ (d = 2), \quad \mathbb{K} = \mathbb{H}\ (d = 4), \quad \mathbb{K} = \mathbb{O}\ (d = 8).$$