Euclid型Jordan代数のclan構造における
右乗法作用素の帰納的構造と行列式

野村　隆昭　(九大・数理)*

単純な階数rのEuclid型Jordan代数をVとし，その単位元をe_0とする．VのJordan乗法作用素を$M(x)$で表す：$M(x)y = xy$．またVにはtrace函数で内積を入れておく：$\langle x \,|\, y \rangle = \mathrm{tr}(xy)$．そして$V$のJordan枠$c_1, \ldots, c_r$を一つ固定し，それによる$V$のPeirce分解を$V = \bigoplus_{1 \le j \le k \le r} V_{kj}$とする．ただし$V_{jj} := \mathbb{R}c_j$ $(j = 1, \ldots, r)$であり，

$$V_{kj} := \bigl\{ x \in V \,;\, M(c_i)x = \tfrac{1}{2}(\delta_{ij} + \delta_{ik})x \quad \text{for } i = 1, \ldots, r \bigr\} \quad (1 \le j < k \le r).$$

一方$\Omega := \mathrm{Int}\{x^2 \,;\, x \in V\}$を$V$の対称錐とし，$\Omega$の線型同型群を$G(\Omega)$とする．$G(\Omega)$はreductiveなLie群である．上記Peirce分解を経由して，$G(\Omega)$の岩澤部分群（分裂可解）Hが標準的に定義され，HはΩに単純推移的に作用している．このとき軌道写像$H \ni h \mapsto he_0 \in \Omega$は微分同相である．これを$H$の単位元において微分して得られる線型写像$X \mapsto Xe_0$は線型同型$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \cong V$を与える．その逆写像を$V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$とする：$L_x e_0 = x$．この$V$上の線型作用素$L_x$ $(x \in V)$を用いて，$x \bigtriangleup y := L_x y$ $(x, y \in V)$によりVに双線型な積を定義する．これにより，VはVinbergが導入したclanと呼ばれる非結合的代数をなしていて，e_0はその単位元にもなっている．そして上記のPeirce分解はこのclan構造における正規分解にもなっている．この二つの乗法構造の関係は次の補題の通り．

補題 1.1. $x \in V_{kj}$ $(1 \le j \le k \le r)$のとき，$L_x = 2\bigl[M(x),\, M(c_j)\bigr] + M(x)$.

タイトルにおける右乗法作用素とは，このVのclan積$\bigtriangleup$における$R_y x := x \bigtriangleup y$のことである．Jordan乗法作用素達は自己共役，clanの左乗法作用素達がVで同時三角化可能であるのに対して，右乗法作用素達はそのような性質を持たない．右乗法作用素の帰納的構造を調べるためにVの正規分解を次の様に区分けする．$V' := \bigoplus_{1 \le j \le k \le r-1} V_{kj}$とし，

$$\Xi := V_{r1} \oplus \cdots \oplus V_{r,r-1}, \quad W := \Xi \oplus \mathbb{R}c_r \qquad \left[V = \left(\begin{array}{c|c} V' & \Xi \\ \hline {}^t\Xi & \mathbb{R}c_r \end{array} \right) \leftarrow \text{イメージ図} \right]$$

とおくと，V'は，Jordan代数としてもclanとしても，Vの部分代数になっている．さらにWはclan構造でのVの両側idealになっている．そして$V = V' \oplus \Xi \oplus \mathbb{R}c_r$と分解されている．さらに$v' \in V'$のとき，$R_{v'}(\Xi) \subset \Xi$であるので，$R^{\Xi}_{v'} := R_{v'}\big|_{\Xi}$ $(v' \in V')$とおく．

一方で，V' (resp. Ξ) は冪等元c_rの Peirce 0 空間（resp. 1/2 空間）であるので，$\phi(v')\xi := 2v'\xi$ $(v' \in V', \xi \in \Xi)$とおくと，$\phi : V' \to \mathrm{End}(\Xi)$はJordan代数$V'$の表現になっている．

本研究は科研費 (課題番号:18340039) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17C50, 43A85
キーワード：Jordan algebras, relative invariants
* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744　九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: tnomura@math.kyushu-u.ac.jp
web: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/

命題 1.2. $R^{\Xi}_{v'} = \phi(v')\ (\forall v' \in V')$.

結果の見栄えを良くするために，W の内積の正規化を少しだけ変えておく：

$$\langle \xi + \lambda c_r \,|\, \xi' + \lambda' c_r \rangle_W = \langle \xi \,|\, \xi' \rangle + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda' \qquad (\xi, \xi' \in \Xi \text{ and } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}).$$

部分 clan である $(V', \triangle)$ における右乗法作用素を $R'_{v'}$ と書く．

定理 1.3. 各 $v \in V$ を $v = v' + \xi + v_r c_r$ $(v' \in V',\ \xi \in \Xi,\ v_r \in \mathbb{R})$ と表すとき

$$R_v = \left(\begin{array}{c|c|c} R'_{v'} & \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline & \phi(v') & \langle \cdot \,|\, c_r \rangle_W\, \xi \\ \cline{2-3} * & \langle \cdot \,|\, \xi \rangle_W\, c_r & v_r\, \mathrm{id}_{V_{rr}} \end{array}\right).$$

$\operatorname{Det} R_v$ を記述するために，V の Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$ に付随する Jordan 代数版の principal minors を $\Delta_1(v), \ldots, \Delta_r(v)$ $(\deg \Delta_j = j;\ j = 1, \ldots, r)$ とする．これらは H 相対不変な V 上の多項式函数であり，V の対称錐 Ω に付随する基本相対不変式をなしている．V は単純であるとしているので，$j < k$ のときの $\dim V_{kj}$ は一定である（この値を d と書く）．

定理 1.4. $\operatorname{Det} R_v = \Delta_1(v)^d \cdots \Delta_{r-1}(v)^d \Delta_r(v)\ (v \in V)$.

注意． (1) それほど明らかなことではないが，一般に単位元を持つ clan の右乗法作用素の行列式 $\operatorname{Det} R_v$ は，clan の左乗法作用素の exp から生成される Lie 群 H に関して**相対不変**な多項式函数になっている：$\operatorname{Det} R_{hv} = \chi(h) \operatorname{Det} R_v$ $(h \in H,\ v \in V)$．ここで H の 1 次元表現 $\chi(h)$ は $\chi(h) := (\operatorname{Det}_V h)(\operatorname{Det} \operatorname{Ad} h)^{-1}$ で与えられる（文献 [3, Lemma 2.7] 参照）．定理 1.4 はこの $\chi(h)$ を分析することからでも得られる．
(2) 文献 [1, Theorem 5.1] により，一般に単位元を持つ clan において，$\operatorname{Det} R_v$ の既約因子が丁度基本相対不変式をなしている．

参考文献

[1] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[2] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, Preprint, 38pp, 2012 (to appear in Kyushu J. Math.).

[3] T. Nomura, On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, J. Lie Theory, **11** (2001), 185–206.