Euclid型Jordan代数のclan構造における右乗法作用素の帰納的構造と行列式

野 村 隆 昭（九大・数理）

京都大学・吉田キャンパス

2013年3月21日

Euclid 型 Jordan 代数

- V：有限次元実ベクトル空間で，双線型な積 $xy = M(x)y$ を持つ.

  V：**Jordan 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1)\ xy = yx, \\ (2)\ x^2(xy) = x(x^2y). \end{cases}$

- 単位元 e_0 を持つ実 Jordan 代数が **Euclid 型**

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ s.t. $\langle\, xy\,|\,z\,\rangle = \langle\, x\,|\,yz\,\rangle$ （**結合的内積の存在**）.

- Euclid 型 Jordan 代数 V $\rightleftarrows$ 対称錐 $\Omega = \mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x \in V\}$

【例】 $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R}) \supset \Omega := \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++}$

V の Jordan 積 $\circ$：$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ （注： $x \circ x = x^2$）

$GL(r,\mathbb{R}) \curvearrowright \Omega$：$GL(r,\mathbb{R}) \times \Omega \ni (g,x) \mapsto gx\,{}^t g \in \Omega$ （推移的）

より一般に

V：内積$\langle\cdot|\cdot\rangle$を持つ有限次元実ベクトル空間

$V\supset\Omega$：**正則**開凸錐（直線を含まない）

$G(\Omega):=\{g\in GL(V)\ ;\ g(\Omega)=\Omega\}$：$\Omega$の**線型自己同型群**

（$GL(V)$の閉部分群としてLie群）

Ωが**等質** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G(\Omega)\curvearrowright\Omega$：推移的

- Ωの**双対錐**Ω^* (w.r.t $\langle\cdot|\cdot\rangle$)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \Omega^*:=\left\{y\in V\ ;\ \langle x\,|\,y\rangle>0\quad(\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\})\right\}$$

- Ω：**自己双対** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\langle\cdot|\cdot\rangle$ s.t. $\Omega=\Omega^*$
- **対称錐** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 等質で自己双対な開凸錐

既約対称錐と単純なEuclid型Jordan代数のリスト

- $\Omega=\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++}\subset V=\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$
- $\Omega=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{C})^{++}\subset V=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{C})$
- $\Omega=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{H})^{++}\subset V=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{H})$
- $\Omega=\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})^{++}\subset V=\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$
- $\Omega=\Lambda_n$（n次元Lorentz錐）$\subset V=\mathbb{R}^n$（正定値2次形式に付随するJA）

正則 (regular) 等質凸領域に付随する代数 (Vinberg 1963)

- V：有限次元ベクトル空間で双線型な積 $x \bigtriangleup y = L_x y = R_y x$ を持つ.

V：clan $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $[L_x, L_y] = L_{x \bigtriangleup y - y \bigtriangleup x}$ (left symmetric algebra),

(2) $\exists s \in V^*$（認容線型形式）s.t. $s(x \bigtriangleup y)$ は V に内積を定義 (compact),

(3) 各作用素 L_x の固有値は実数のみ (normal).

Affine 等質な凸領域 $\rightleftarrows$ clan,　　等質開凸錐 $\rightleftarrows$ 単位元を持つ clan

$\Omega \rightleftarrows V$: ambient VS（$\equiv$ 基点の接空間）に導入される代数構造

- **等質開凸錐 Ω の場合**

$\exists H < G(\Omega)$（分裂可解）s.t. $H \curvearrowright \Omega$ (単純推移的)

$\rightsquigarrow E \in \Omega$ を固定すると，$H \approx HE = \Omega$ (微分同相)

$\rightsquigarrow \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \cong T_E(\Omega) \equiv V$ (線型同型)

$\rightsquigarrow \forall x \in V$，$\exists 1 X \in \mathfrak{h}$ s.t. $XE = x$.

$\rightsquigarrow X = L_x$ と書いて $x \bigtriangleup y := L_x y$ と定義（clan 積は一般に非可換）.

基本相対不変式

Ω：正則開凸錐 $\subset V$，$G(\Omega)$：Ωの線型同型群
$\exists H < G(\Omega)$（分裂可解）s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的

- Ω上の函数fが**相対不変**（Hに関して）
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\chi$：Hの1次元表現 s.t. $f(hx) = \chi(h)f(x)$ (for all $h \in H$, $x \in \Omega$).

定理 [Ishi 2001].
$\exists\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ $(r := \mathrm{rank}(\Omega))$：相対不変な既約多項式函数 on V
s.t. 相対不変な$\forall$多項式函数 (on V) は次のように書ける：

$$P(x) = c\,\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \qquad (c = \mathrm{const.},\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0}).$$

定理 [Ishi–N. 2008].
R_v：clan構造によるVでの右乗法作用素：$R_v x = x \triangle v$ $(v, x \in V)$
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Det}\, R_v$の既約因子は丁度$\Delta_1(v), \ldots, \Delta_r(v)$.

- $\Delta_1(v), \ldots, \Delta_r(v)$：$\Omega$（あるいは$V$）に付随する**基本相対不変式**.

Euclid型Jordan代数をclanと見る

V：階数rの単純Euclid型Jordan代数, e_0：Vの単位元
$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2\,;\ x \in V\}$：$V$の対称錐.
Jordan枠（原始べき等元の完全直交系）$c_1, \ldots, c_r$を固定
$\rightsquigarrow$ H：それに対応する$G(\Omega)$（簡約Lie群）の岩澤可解部分群
$\rightsquigarrow$ $H \curvearrowright \Omega$ （単純推移的）よりVにclan積$\triangle$が定義できる

【例】 $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$, $\Omega = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++}$.
Ωへの$GL(r, \mathbb{R})$の作用：$GL(r, \mathbb{R}) \times \Omega \ni (g, x) \mapsto gx{}^tg \in \Omega$
Vのclan積：$x \triangle y = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x})$, ただし$x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$に対して

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \mbox{\Large 0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

したがって$x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$である.

$$L_x y = R_y x = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x})$$

Eucid型Jordan代数からの準備

$\langle x \,|\, y \rangle := \mathrm{tr}(xy)$：$V$ のtrace内積，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G(\Omega)) \subset \mathfrak{gl}(V)$，$\mathfrak{k} := \mathrm{Der}(V)$.

$\mathfrak{p} := \{M(x)\ ;\ x \in V\}$: Jordan乗法作用素がなす空間

$\rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ のCartan分解を与える：$\theta X = -{}^tX$ (Cartan involution).

$V = \bigoplus_{1 \le j \le k \le r} V_{kj}$：Jordan枠 $c_1, \ldots, c_r$ から得られる**Peirce分解**．ただし

$V_{jj} := \mathbb{R}c_j \quad (j = 1, \ldots, r)$,

$V_{kj} := \left\{x \in V\ ;\ M(c_i)x = \frac{1}{2}(\delta_{ij} + \delta_{ik})x \ \ (i = 1, 2, \ldots, r)\right\} \quad (1 \le j < k \le r)$.

- $\mathfrak{a} := \mathbb{R}M(c_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}M(c_r)$：$\mathfrak{p}$ に含まれる極大可換部分空間.
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$: $M(c_1), \ldots, M(c_r)$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底.

このとき，正の $\mathfrak{a}$ ルートは $\frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_j)$ $(j < k)$

$\mathfrak{n}_{kj} := \mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_j)/2} = \{z \,\square\, c_j\ ;\ z \in V_{kj}\} \quad (a \,\square\, b := M(ab) + [M(a), M(b)])$.

$\mathfrak{n} := \sum_{j<k} \mathfrak{n}_{kj}$ とおいて，$\mathfrak{g}$ の岩澤分解を得る：$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

$A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$ とする．$H := N \rtimes A$ は Ω に単純推移的に作用する．
H は V に clan 構造を定義し，$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) = \{L_v\,;\, v \in V\}$ となる．

補題. (1) $v \in \mathbb{R}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}c_r \implies L_v = M(v)\,(\in \mathfrak{a})$.
(2) $v \in V_{kj} \implies L_v = 2(v \,\Box\, c_j)\,(\in \mathfrak{n}_{kj})$.

V の Peirce 分解 $\rightsquigarrow$ $V = \left(\begin{array}{c|c|c|c} V_{11} & \cdots & V_{r-1,1} & V_{r1} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline V_{r-1,1} & \cdots & V_{r-1,r-1} & V_{r,r-1} \\ \hline V_{r1} & \cdots & V_{r,r-1} & V_{rr} \end{array}\right)$ $V_{kk} = \mathbb{R}c_k$ であり，$d := \dim V_{kj}\ (j < k)$ は一定

$V' := \bigoplus_{1 \le j \le k \le r-1} V_{kj}$
$\Xi := V_{r1} \oplus \cdots \oplus V_{r,r-1}$
$W := \Xi \oplus V_{rr}$
とおく： $V = \left(\begin{array}{c|c} V' & \Xi \\ \hline {}^t\Xi & V_{rr} \end{array}\right)$

- V' は Jordan 代数としても clan としても，V の部分代数.
- W は clan 構造での V の両側 ideal.
- $v' \in V' \implies R_{v'}(\Xi) \subset \Xi$．以後，$R^{\Xi}_{v'} := R_{v'}\big|_{\Xi}\ (v' \in V')$ と書く.

V' はべき等元 c_r の Peirce 0 空間，Ξ は Peirce $\frac{1}{2}$ 空間
$\rightsquigarrow$ $\phi(v')\xi := 2v'\xi$ $(v' \in V',\, \xi \in \Xi)$，$\phi : V' \to \mathrm{End}(\Xi)$ は Jordan 代数 V' の表現

命題. $R^{\Xi}_{v'} = \phi(v')$ $(\forall v' \in V')$.

- W の内積の正規化：
$$\langle\, \xi + \lambda c_r \,|\, \xi' + \lambda' c_r \,\rangle_W = \langle\, \xi \,|\, \xi' \,\rangle + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda' \qquad (\xi, \xi' \in \Xi,\ \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}).$$
- $R'_{v'}$：部分 clan である $(V', \triangle)$ における右乗法作用素.

定理. 各 $v \in V$ を $v = v' + \xi + v_r c_r$ $(v' \in V',\, \xi \in \Xi,\, v_r \in \mathbb{R})$ と表すとき

$$R_v = \left(\begin{array}{c|c|c} R'_{v'} & \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline \multirow{2}{*}{$*$} & \phi(v') & \langle\,\cdot\,|\,c_r\,\rangle_W\, \xi \\ \cline{2-3} & \langle\,\cdot\,|\,\xi\,\rangle_W\, c_r & v_r\, \mathrm{id}_{V_{rr}} \end{array}\right).$$

$\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$：Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$ に付随する principal minors
（V の基本相対不変式をなしている）

定理. $\mathrm{Det}\, R_x = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}(x)^d \Delta_r(x)$.
ただし，$d := \dim V_{kj}$：$j < k$ で一定.

- $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ のとき：$d = 1$,
- $\mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$ のとき，$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$,
- $\Omega = \Lambda_n$ $(n \geq 3)$ のとき，$r = 2,\ d = n - 2$.

注意. $\mathrm{Det}\, R_v$ は相対不変な多項式函数である（それほど明らかではない）：

$$\mathrm{Det}\, R_{hv} = \chi(h)\, \mathrm{Det}\, R_v \quad (h \in H,\ v \in V).$$

$\chi(h) = (\mathrm{Det}_V\, h)(\mathrm{Det}\, \mathrm{Ad}\, h)^{-1}$ となることが計算できるので，この $\chi(h)$ を詳細に見ることでも最後の定理は示される.