Jordan代数の表現から得られるclanの双対clan

中島　秀斗　(九大・数理)[*1]
野村　隆昭　(九大・数理)[*2]

一般に $(V, \triangle)$ を clan とし，V の内積は認容線型形式 s を用いて $\langle x|y\rangle = s(x \triangle y)$ で与えられているとする．このとき V に双線型な積 $\triangledown$ を

$$\langle x \triangledown y|z\rangle = \langle y|x \triangle z\rangle \qquad (x, y, z \in V)$$

により定義すると，代数 $(V, \triangledown)$ は clan になる．この clan を $(V, \triangle)$ の双対 clan と呼ぶ．双対 clan に対応する等質錐は，元の clan に対応する等質錐 Ω の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する双対錐 Ω^* となる．

以下 V を Euclid 型の Jordan 代数，(φ, E) を V の自己共役表現とし，直前の講演の用語，記号を引き続き用いる．特に $(V_E^0, \triangle)$ は Jordan 代数の表現から得られる clan であり，V_E^0 の元を $v = \lambda u + \xi + x$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \xi \in E,\ x \in V)$ のように表す．さらに V_E^0 上の線型形式 s^0 を Jordan 代数 V の trace 函数 $\mathrm{tr}(x)$ を用いて $s^0(v) := \lambda + \mathrm{tr}(x)$ で定義すると，s^0 は V_E^0 の認容線型形式になる．このとき s^0 により V_E^0 に入る双対 clan 積 $\triangledown$ は

$$v \triangledown v' = (\lambda\lambda' + \langle\xi|\xi'\rangle_E)u + (\underline{\varphi}(x)^*\xi' + \tfrac{1}{2}\lambda\xi' + \varphi(x')\xi) + x \triangledown x'$$

となる．ただし $x \triangledown x'$ は V における双対 clan の積である．$(V_E^0, \triangledown)$ に対応する等質開凸錐を $(\Omega^0)^*$ と表す．V の対称錐を Ω とするとき，$(\Omega^0)^*$ は次の様に記述される．

命題 1.1. $(\Omega^0)^* = \left\{v = \lambda u + \xi + x \in V_E^0\,;\ x \in \Omega \text{ and } \lambda > \tfrac{1}{2}\langle\varphi(x)^{-1}\xi|\xi\rangle_E\right\}$.

V_E^0 の基底を，u，E の基底，V の基底，の順でとり，V の双対 clan 積 $\triangledown$ に関する右乗法作用素を $R_x^{\triangledown}$ とすると，V_E^0 の双対 clan 積 $\triangledown$ の右乗法作用素 $\widetilde{R}_v^{\triangledown}$ は

$$\widetilde{R}_v^{\triangledown} = \begin{pmatrix} \lambda & \langle\,\cdot\,|\xi\rangle_E & 0 \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) & \underline{\varphi}(\,\cdot\,)^*\xi \\ 0 & 0 & R_x^{\triangledown} \end{pmatrix}$$

と表される．一方，Jordan 代数 V の Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$ の逆順 Jordan 枠 $c_r, \ldots, c_1$ に付随する V の principal minors を $\Delta_1^*(x), \ldots, \Delta_r^*(x)$ $(x \in V)$ とする．これらは $(V, \triangledown)$ に付随する基本相対不変式になっている．$\mathrm{Det}\, R_x^{\triangledown}$ の部分に三つ前の講演の定理を用い，$\varphi(x)$ の余因子作用素を ${}^{\mathrm{co}}\varphi(x)$ で表すと

$$\mathrm{Det}\, \widetilde{R}_v^{\triangledown} = \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x) \left(\lambda\, \mathrm{Det}\, \varphi(x) - \tfrac{1}{2}\langle{}^{\mathrm{co}}\varphi(x)\xi|\xi\rangle_E\right)$$

を得る．この右辺の最後の因子は，$x \in V$ の Jordan 代数の元としての余因子を ${}^{\mathrm{co}}x$ をとし，$N = \dim E$ とおくと，次のように因数分解される:

$$\lambda\, \mathrm{Det}\, \varphi(x) - \tfrac{1}{2}\langle{}^{\mathrm{co}}\varphi(x)\xi|\xi\rangle_E = (\det x)^{\frac{N}{r}-1}\left(\lambda\, \det x - \tfrac{1}{2}\langle\varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi|\xi\rangle_E\right).$$

本研究では論文 [3] の最終版作成時に科研費（課題番号:24540177）の助成を受けている。
2010 Mathematics Subject Classification: 17C50, 32A85
キーワード：Jordan algebras, relative invariants
[*1] 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 大学院数理学府
e-mail: h-nakashima@math.kyushu-u.ac.jp
[*2] e-mail: tnomura@math.kyushu-u.ac.jp

等質錐に付随する基本相対不変式は，対応する clan の右乗法作用素の行列式の既約因子としてすべて現れるので，次の定理を得る．

定理 1.2. 等質錐 $(\Omega^0)^*$ に付随する基本相対不変式 $P_j^*(v)$ $(j=1,\ldots,r,r+1)$ は次で与えられる:

$$\begin{cases} P_j^*(v) = \Delta_j^*(x) & (j=1,\ldots,r), \\ P_{r+1}^*(v) = \lambda \det x - \frac{1}{2}\langle \varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi | \xi \rangle_E & (j=r+1). \end{cases}$$

以下 $V=\mathrm{Herm}(r,\mathbb{K})$ のときに，$P_j^*(v)$ のより具体的な表示を考える．まず $(V,\triangle)$ の双対 clan 積 $\triangledown$ は $x \triangledown y = (\underline{x})^* y + y\,\underline{x}$ $(x,y\in V)$ で与えられることに注意する．さらにこの双対 clan に付随する基本相対不変式 $\Delta_j^*(x)$ は右下からの j 次小行列式 $\det_{[j]}(x)$ $(x\in V;\ j=1,\ldots,r)$ となる．また (φ,E) を Jordan 代数 V の自己共役表現とすると $E=\mathrm{Mat}(r\times p,\mathbb{K})$ であり，この表現から得られる $(V_E^0,\triangle)$ は $\mathrm{Herm}(r+p,\mathbb{K})$ の部分 clan として実現された．同様に $(V_E^0,\triangledown)$ は $\mathrm{Herm}(rp+1,\mathbb{K})$ の部分 clan として次のように実現される．

命題 1.3. 次の写像 $(V_E^0,\triangledown)\to \mathrm{Herm}(rp+1,\mathbb{K})$ は clan としての単射準同型写像である:

$$V_E^0 \ni \lambda u + \xi + x \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}}\iota(\xi)^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\iota(\xi) & x\otimes I_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(rp+1).$$

ただし $\mathrm{Herm}(rp+1,\mathbb{K})$ の clan 積は双対 clan 積 $\triangledown$ であり，写像 ι は縦ベクトル $\xi_j\in\mathbb{K}^p$ $(j=1,\ldots,r)$ を用いて以下のように定義される E から $\mathbb{K}^{rp}$ への同型写像である:

$$\iota\colon E\ni \xi = \begin{pmatrix} {}^t\xi_1 \\ \vdots \\ {}^t\xi_r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{rp}.$$

この埋め込みを用いると，V が Hermite 型のとき，$(\Omega^0)^*$ に付随する基本相対不変式 $P_j^*(v)$ $(j=1,\ldots,r+1)$ は

$$\begin{cases} P_j^*(v) = \det_{[j]}(x) & (j=1,\ldots,r), \\ P_{r+1}^*(v) = \lambda\det x - \frac{1}{2}\iota(\xi)^*({}^{\mathrm{co}}x\otimes I_p)\iota(\xi) & (j=r+1) \end{cases}$$

と表されることがわかる．文献 [2] ではこれの $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ かつ $r=2$ の場合が例として現れている．本稿で Jordan 代数の表現から出発して構成した等質錐 $(\Omega^0)^*$ は，それに付随する基本相対不変式 $P_j^*(v)$ が $\deg P_j^*(v)=j$ $(j=1,\ldots,r,r+1)$ を満たしていて，文献 [2] の例を系統的に一般化したものになっている．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[3] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, Preprint, 38pp, 2012 (to appear in Kyushu J. Math.).