From my forthcoming book

野 村 隆 昭

九大数理

2013年9月12日

L'Hôpital の定理の反例？？？

L'Hôpital の定理の反例？？？

$\exists f, g \in C^{\omega}(\mathbb{R})$ s.t.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$（有限）,

(3) しかし $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ は存在しない.

$$\boldsymbol{f(x) := \int_0^x \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad g(x) := f(x)e^{\sin x}}$$

- $f(x) \geqq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $g(x) \geqq e^{-1}f(x)$. $\quad \therefore \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$$\boldsymbol{f(x) := \int_0^x \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad g(x) := f(x)e^{\sin x}}$$

- $f(x) \geqq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $g(x) \geqq e^{-1}f(x)$. $\quad \therefore \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \cos^2 x$, $g'(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + f(x)e^{\sin x}\cos x$.

$$\boldsymbol{f(x) := \int_0^x \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad g(x) := f(x)e^{\sin x}}$$

- $f(x) \geqq \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, $g(x) \geqq e^{-1}f(x)$. $\quad \therefore \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \cos^2 x$, $g'(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + f(x)e^{\sin x}\cos x$.
- $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\cos x\text{を約分すると}}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}\cos x + f(x)e^{\sin x}} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}\cos x + g(x)}.$$

$x \to +\infty$のとき, $e^{\sin x}\cos x + g(x) \geqq g(x) - e \to +\infty$.

分子は$|\cos x| \leqq 1$.

$$\boldsymbol{f(x) := \int_0^x \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad g(x) := f(x)e^{\sin x}}$$

- $f(x) \geqq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$， $g(x) \geqq e^{-1}f(x)$. $\quad \therefore \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \cos^2 x$， $g'(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + f(x)e^{\sin x}\cos x$.
- $\cos x$ を約分すると

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}\cos x + f(x)e^{\sin x}} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}\cos x + g(x)}.$$

$x \to +\infty$ のとき， $e^{\sin x}\cos x + g(x) \geqq g(x) - e \to +\infty$.

分子は $|\cos x| \leqq 1$. $\quad \boxed{\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0}$

- しかし $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}}$ は， $x \to +\infty$ **のときに極限を持たない.**

L'Hôpitalの定理では,
どのタイプのものでも，分母のg'は0にならないという仮定が入っている.
その仮定はg'が分母にくるから，という理由程度に受け止められている.
（あるいはCauchyの平均値の定理を使うから？？?）
実はこの仮定が大切なことをこの例が示している.

【出典】**O. Stolz, *Über die Grenzwerte der Quotienten*, Math. Ann., 15 (1889), 556–559.**

L'Hôpital の定理の逆が成立しないこと：

- $\dfrac{0}{0}$ 型：$\boldsymbol{f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}}$ $(\boldsymbol{x \neq 0})$, $\boldsymbol{f(0) = 0}$, $\boldsymbol{g(x) = x}$.

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

L'Hôpital の定理の逆が成立しないこと：

- $\dfrac{0}{0}$ 型：$\boldsymbol{f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0),\ \ f(0) = 0,\ \ g(x) = x.}$
- $\dfrac{0}{0}$ 型：f も g も C^∞ である例．(N. W. Rickert, 1968).

$$\boldsymbol{f(x) := x\left(\sin \frac{1}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0,}$$

$$\boldsymbol{g(x) := \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \neq 0), \quad g(0) = 0.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^4} = 0.$$

$$f'(x) = \left(\sin \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^4} \cos \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2} \sin \frac{1}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} x(x^2 + 2) \sin \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^4}$$

L'Hôpital の定理の逆が成立しないこと：

- $\dfrac{0}{0}$ 型：$\boldsymbol{f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}}$ $(\boldsymbol{x \neq 0})$, $\boldsymbol{f(0) = 0}$, $\boldsymbol{g(x) = x}$.
- $\dfrac{0}{0}$ 型：f も g も C^∞ である例．(N. W. Rickert, 1968).

$$\boldsymbol{f(x) := x\left(\sin \frac{1}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \quad (\boldsymbol{x \neq 0}), \quad \boldsymbol{f(0) = 0},$$

$$\boldsymbol{g(x) := \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \quad (\boldsymbol{x \neq 0}), \quad \boldsymbol{g(0) = 0}.$$

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型： $\boldsymbol{f(x) = x(2 + \sin x)}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2 + \sin x)}{x^2 + 1} = 0.$$

$f'(x) = 2 + \sin x + x \cos x$ より，$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sin x}{2x} + \dfrac{1}{2} \cos x$

- $f(a) = g(a) = 0$ で $f'(a)$ と $g'(a)$ が存在し，$g'(a) \neq 0$ ならば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

ほとんどこれで間に合う.

- $f(a)=g(a)=0$ で $f'(a)$ と $g'(a)$ が存在し，$g'(a)\neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

ほとんどこれで間に合う．

L'Hôpital の定理では，$l:=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ とは仮定していない．

では，$l\neq\frac{f'(a)}{g'(a)}$ である場合は？

- $f(a)=g(a)=0$ で $f'(a)$ と $g'(a)$ が存在し，$g'(a)\neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

ほとんどこれで間に合う.

L'Hôpital の定理では，$l:=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ とは仮定していない.

では，$l\neq\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ である場合は？

より一般に，f も g もなめらか，

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0,$$

かつ $g^{(n)}(a) \neq 0$ とする．このとき，

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\bigl((x-a)^{n+1}\bigr) \qquad (x \to a),$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\bigl((x-a)^{n+1}\bigr) \qquad (x \to a).$$

ゆえに

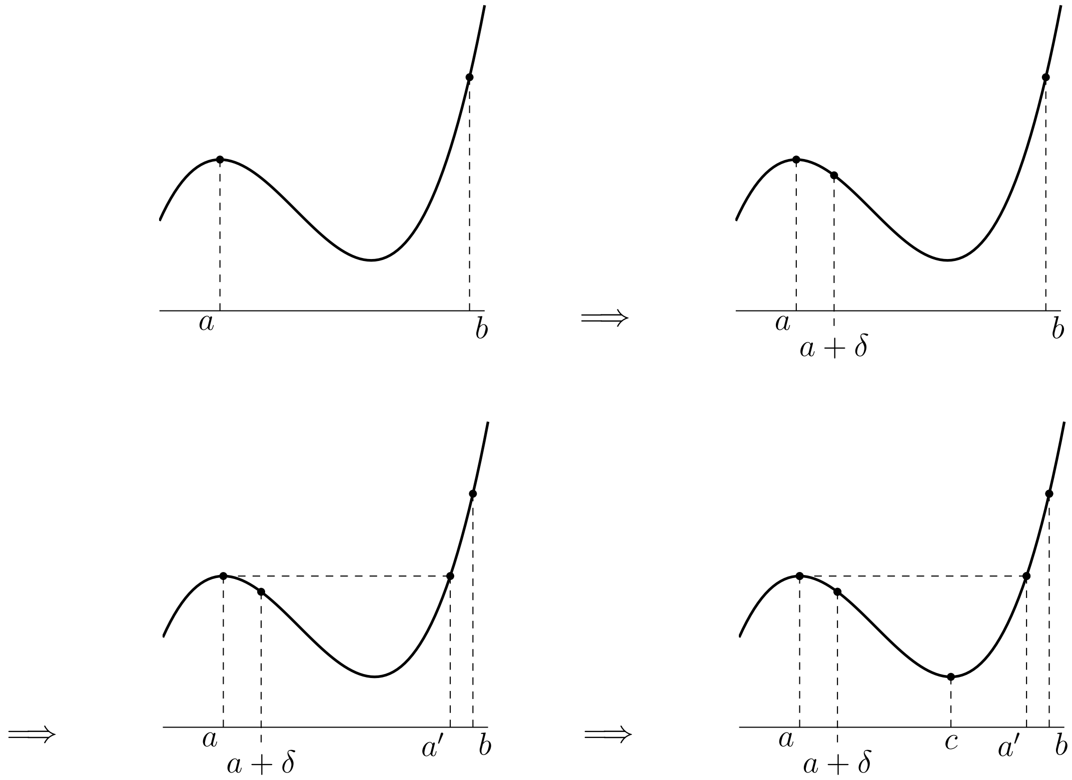
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}\frac{(x-a)^n}{g(x)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)+o(x-a)}{\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)+o(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.\end{aligned}$$

定理. $f(x)$：開区間Iでなめらか,
$x = a \in I$で極大（狭義），しかし$f(a)$はIで最大値ではない
$\Longrightarrow$ fはIで広義の極小値をとる．とくに，$\exists c \in I$ s.t. $f'(c) = 0$.

系. $f(x)$：開区間Iでなめらか,
$x = a \in I$で極大（狭義），$x = a$以外に$f(x)$の停留点がない
$\Longrightarrow$ $f(a)$は最大値.

定理の証明. $\exists b \in I$ s.t. $f(a) < f(b)$．同様なので，以下$a < b$と仮定.
- $\exists \delta > 0$（十分小）s.t. $f(a) > f(a + \delta)$.
- 閉区間$[a + \delta, b]$で中間値の定理： $a < \exists a'$ s.t. $f(a) = f(a')$.
- fは閉区間$[a, a']$で最小値$f(c)$をとる.
- $f(c) \leqq f(a + \delta) < f(a)$より，$a < c < a'$．ゆえに$f(c)$は広義の極小値.

【注意】$f(x)$の「底値」が皿のようになっている場合があるので，極小値は広義としか一般には結論できない.



定理の証明. $\exists b \in I$ s.t. $f(a) < f(b)$．同様なので，以下 $a < b$ と仮定.

- $\exists \delta > 0$（十分小）s.t. $f(a) > f(a+\delta)$.
- 閉区間 $[\,a+\delta,\, b\,]$ で中間値の定理： $a < \exists a'$ s.t. $f(a) = f(a')$.
- f は閉区間 $[\,a,\, a'\,]$ で最小値 $f(c)$ をとる.
- $f(c) \leqq f(a+\delta) < f(a)$ より，$a < c < a'$．ゆえに $f(c)$ は広義の極小値.

多変数函数だと，今の定理は成り立たない

$$\exists f(x,y) \text{ s.t. } \begin{cases} (1)\ f(a,b)\,\text{は極大値（狭義），かつ最大値ではない}, \\ (2)\ \text{しかし}\, f(a,b)\,\text{はただ一つの停留点}. \end{cases}$$

多変数函数だと，今の定理は成り立たない

$$\exists f(x,y) \text{ s.t. } \begin{cases} \text{(1) } f(a,b) \text{ は極大値（狭義），かつ最大値ではない,} \\ \text{(2) しかし } f(a,b) \text{ はただ一つの停留点.} \end{cases}$$

- $f(x,y)$ は多項式函数で与えることができる.

多変数函数だと，今の定理は成り立たない

$$\exists f(x,y) \text{ s.t. } \begin{cases} (1)\ f(a,b) \text{ は極大値（狭義），かつ最大値ではない，} \\ (2)\ \text{しかし } f(a,b) \text{ はただ一つの停留点.} \end{cases}$$

- $f(x,y)$ は多項式函数で与えることができる．

$$\boxed{\boldsymbol{f(x,y) := x^2 + (1+x)^3 y^2}}$$

$$f_x = 2x + 3(1+x)^2 y^2,\quad f_y = 2(1+x)^3 y$$
$$f_x = f_y = 0 \iff x^2 + (1+x)^3 y^2 = 0,\ 2(1+x)^3 y = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$
$$f_{xx} = 2 + 6(1+x)y^2,\quad f_{xy} = 6y(1+x)^2,\quad f_{yy} = 2(1+x)^3.$$

$\therefore H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$：正定値．ゆえに $f(0,0) = 0$ は極小値．

多変数函数だと，今の定理は成り立たない

$$\exists f(x,y) \text{ s.t. } \begin{cases} (1)\ f(a,b)\ \text{は極大値（狭義），かつ最大値ではない,} \\ (2)\ \text{しかし}\ f(a,b)\ \text{はただ一つの停留点.} \end{cases}$$

- $f(x,y)$ は多項式函数で与えることができる．

$$\boxed{f(x,y) := x^2 + (1+x)^3 y^2}$$

$f_x = 2x + 3(1+x)^2 y^2$, $f_y = 2(1+x)^3 y$

$f_x = f_y = 0 \iff x^2 + (1+x)^3 y^2 = 0,\ 2(1+x)^3 y = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.

$f_{xx} = 2 + 6(1+x)y^2$, $f_{xy} = 6y(1+x)^2$, $f_{yy} = 2(1+x)^3$.

$\therefore H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$：正定値．ゆえに $f(0,0) = 0$ は極小値．

【出典】B. Calvert and M. K. Vamanamurthy, *Local and global extrema for functions of several variables*, J. Austral. Math. Soc., **29** (1980), 362–368.

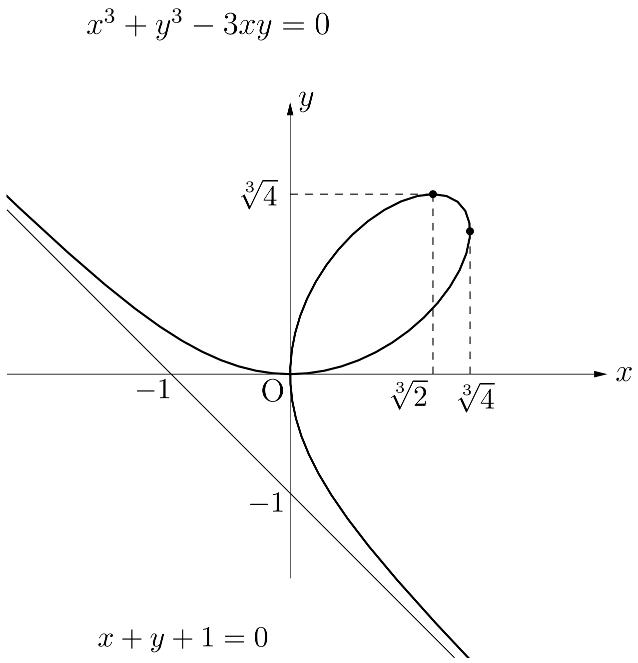
ただ一つの停留点を持ち，そこでは極小になるが大域的には最小値でない2変数多項式函数の例．この多項式は5次であるが，4次以下だとこのような例がないこともこの論文で示されている．

他の興味深い２変数函数の例

(1) $\boldsymbol{f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}}$

【出典】I. Rosenholtz and L. Smylie, *"The only critical point in town" test*, Math. Magazine, **58** (1985), 149–150.

- ただ一つの停留点．そこでは極大であるが大域的には最大でない．
- $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ を考えると，曲線 $g(x,y) = 0$ は Descartes の folium.



$g(1,1) = -1$ は極小，$g(0,0) = 0$ は鞍点．

- $f(x,y) = -g(x, e^y)$

f は関数 g の鞍点を無限遠方に押しやるように定義されている．

(2) $\boldsymbol{f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2}$

- 極小値を2個 $(f(1,2) = f(-1,0) = 0 \iff x^2y - x - 1 = x^2 - 1 = 0)$ 持つ.
  それ以外には停留点さえない多項式函数の例.
  上の括弧内より，この極小値は最小値でもある.

【出典】R. Davies, *Solutiuon to Problem 1235*, Math. Magazine, **61** (1988), 59.

(3) $\boldsymbol{f(x,y) = xe^{-2x} + e^{-x}\cos y}$

- 極大点を無数に持つ $(f(0,2m\pi) = 1;\ m \in \mathbb{Z})$.
  それ以外には停留点さえ持たない函数. とくに極小点や鞍点は一つもない.

【出典】S. Wagon, Mathematica in action, W. H. Freeman and Company, 1991.
邦訳:Mathematicaで見える現代数学，長岡亮介 (監訳)，ブレーン出版，1992.

一様連続

- 連続函数の積分可能性

一様連続

- 連続函数の積分可能性 $\Longleftarrow$ 有界閉区間上の連続函数は一様連続
- **背理法**

- **有限被覆性** (Heine–Borel)

一様連続

- 連続函数の積分可能性 $\Longleftarrow$ 有界閉区間上の連続函数は一様連続

- **背理法**

  一様連続性を保証するδの存在を否定して矛盾 $\Longrightarrow$ δが存在する

  $\cdots\cdots$ 後味の悪い証明

一様連続

- 連続函数の積分可能性 $\Longleftarrow$ 有界閉区間上の連続函数は一様連続

- **背理法**

  一様連続性を保証するδの存在を否定して矛盾 $\Longrightarrow$ δが存在する

  $\cdots\cdots$ 後味の悪い証明

- **有限被覆性** (Heine Borel)

  コンパクト性の理解は大学一年生にはなかなか難しい

(「有限個」にのみに注意．どんなεにも対応できる，が認識できない)

一様連続

- 連続函数の積分可能性 $\Longleftarrow$ 有界閉区間上の連続函数は一様連続

- **背理法**

  一様連続性を保証するδの存在を否定して矛盾 $\Longrightarrow$ δが存在する

  $\cdots\cdots$ 後味の悪い証明

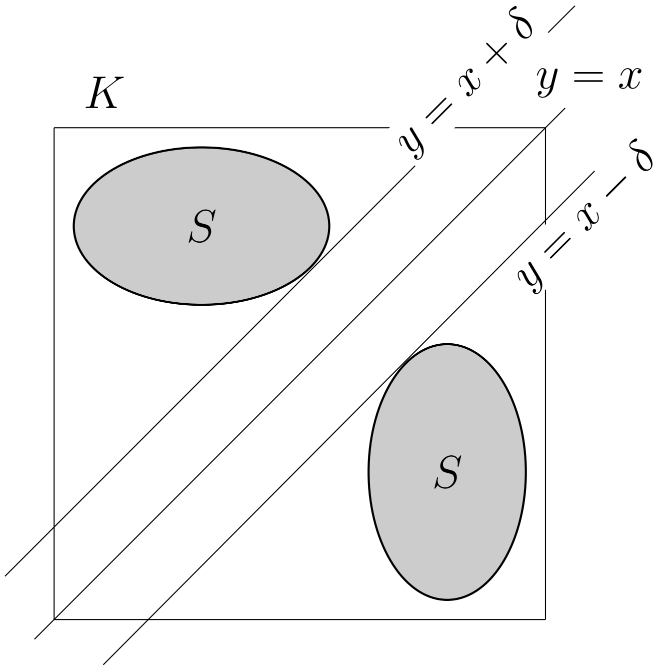
- **有限被覆性** (Heine Borel)

  コンパクト性の理解は大学一年生にはなかなか難しい

  (「有限個」にのみに注意．どんなεにも対応できる，が認識できない)

- **第３の証明**

  【出典】D. M. Bloom, *A pictorial proof of uniform continuity*, Amer. Math. Monthly, **96** (1989), 250–251



$I=[a,\,b]$ を有界閉区間，f：I で連続

$\forall\varepsilon>0$：given.

$$K:=\{\,(x,y)\,;\ a\leqq x\leqq b,\,a\leqq y\leqq b\,\}$$

$$S:=\{\,(x,y)\in K\,;\ |\,f(x)-f(y)\,|\geqq\varepsilon\,\}$$

S は直線 $y=x$ に関して対称．

$$F(x,y):=|\,x-y\,|\qquad(x,y\in S)$$

- $F(x,y)>0$ $(\forall(x,y)\in S)$.
- F は S で最小値 $\delta>0$ をとる．

このとき，$|\,f(x)-f(y)\,|\geqq\varepsilon\implies|\,x-y\,|\geqq\delta$.

対偶： $|\,x-y\,|<\delta\implies|\,f(x)-f(y)\,|<\varepsilon$.

Bolzano–Weierstrassの定理
有界な数列には必ず収束する部分列がある.

標準的証明： $|a_n| \leqq M\ (\forall n)$ とし,
区間 $[-M, M]$ を半分ずつしていって,
無数の番号 n に対して a_n が入っている方をとっていく.

Bolzano–Weierstrassの定理

有界な数列には必ず収束する部分列がある.

標準的証明： $|a_n| \leqq M\ (\forall n)$ とし,

区間 $[-M, M]$ を半分ずつしていって,

無数の番号 n に対して a_n が入っている方をとっていく.

- アイデアはシンプルで良いが，ちゃんと証明を書くと，そこそこ長くなる.

Bolzano–Weierstrass の定理
有界な数列には必ず収束する部分列がある．

標準的証明： $|a_n| \leqq M\ (\forall n)$ とし，
区間 $[-M, M]$ を半分ずつしていって，
無数の番号 n に対して a_n が入っている方をとっていく．

- アイデアはシンプルで良いが，ちゃんと証明を書くと，そこそこ長くなる．

より短い証明で，より強い事実が示せる．

- 有界な数列は単調数列（増加または減少）である部分列を必ず含む．

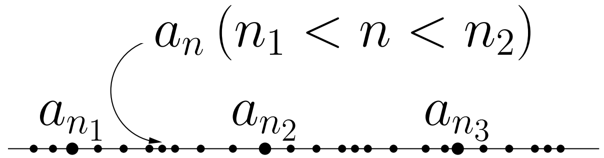
【出典】D. J. Newman and T. D. Parsons, *On monotone subsequences*, Amer. Math. Monthly, **95** (1988), 44–45.

$\{a_n\}$：有界数列，

$$S := \{\, n\ ;\ \forall p > n \text{ に対して，} a_n < a_p \,\}.$$

場合を分ける．

(1) S が無数の n を含むとき．



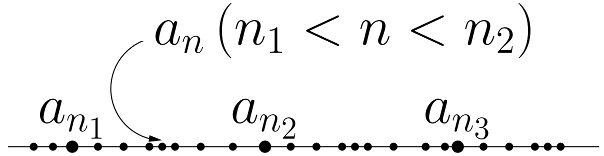
それらを $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ とする．
このとき，$\{a_{n_k}\}$ は狭義単調増加数列．

$\{a_n\}$：有界数列,

$$S := \{\, n\ ;\ \forall p > n \text{に対して，} a_n < a_p \,\}.$$

場合を分ける.

(1) S が無数の n を含むとき.



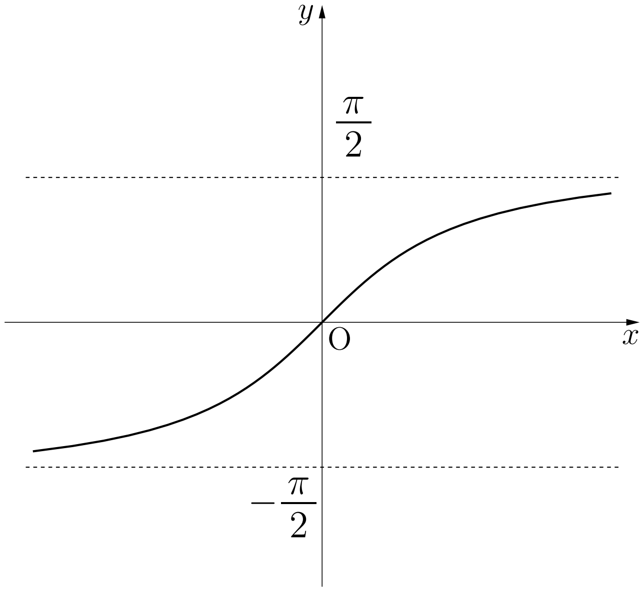
それらを $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ とする.
このとき，$\{a_{n_k}\}$ は狭義単調増加数列.

(2) S が有限個の n しか含まないとき.

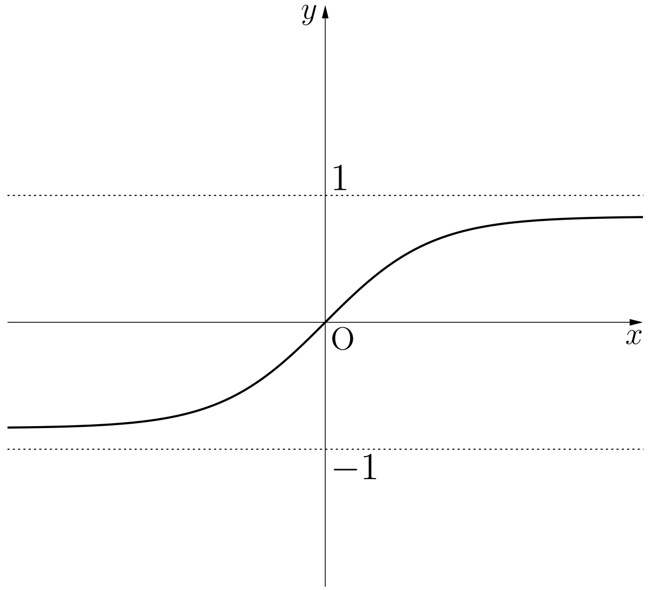
S に含まれる最大の自然数を n_0 とすると，$n > n_0$ ならば $n \notin S$.
$n_1 := n_0 + 1 \notin S$ より，$a_{n_2} \leqq a_{n_1}$ をみたす番号 $n_2 > n_1$ がある.
次に $n_2 \notin S$ より，$a_{n_3} \leqq a_{n_2}$ をみたす番号 $n_3 > n_2$ がある.
これを繰り返すと，$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ で単調減少なものを得る.

$y = \mathrm{Arctan}\, x$ と $y = \tanh x$ のグラフの形は似ている ?

$y = \mathrm{Arctan}\, x$ と $y = \tanh x$ のグラフの形は似ている ?



$y = \mathrm{Arctan}\, x$ のグラフ

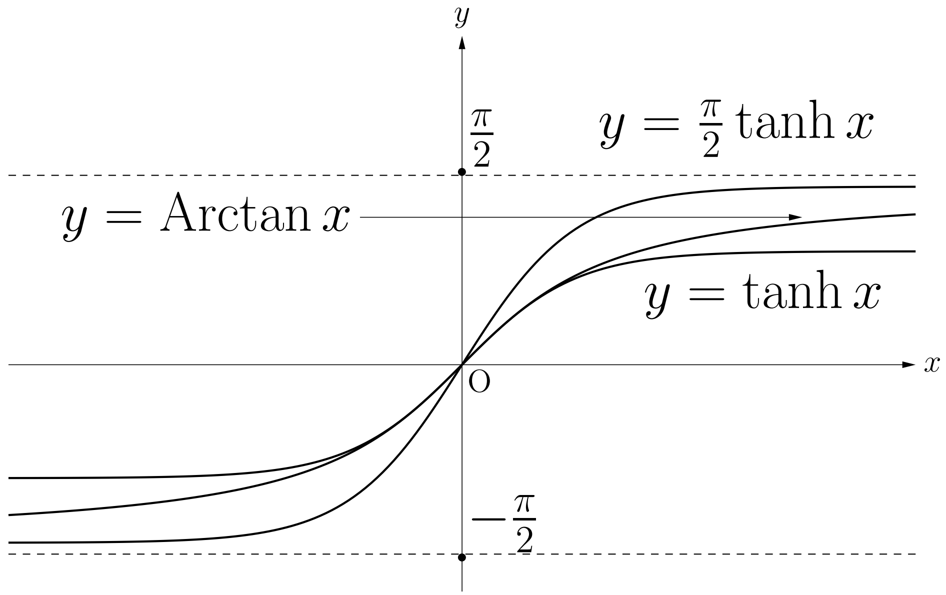


$y = \tanh x$ のグラフ

- $\boldsymbol{1 < \dfrac{\mathbf{Arctan}\, x}{\mathbf{tanh}\, x} < \dfrac{\pi}{2}}$ $(x \neq 0)$ が成り立つ.

$$x > 0 \text{ のとき}, \quad \tanh x < \mathrm{Arctan}\, x < \frac{\pi}{2} \tanh x,$$

$$x < 0 \text{ のとき}, \quad \tanh x > \mathrm{Arctan}\, x > \frac{\pi}{2} \tanh x.$$



命題： $f(x) := \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\tanh x}$ は $x > 0$ で狭義単調増加である.

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\tanh x} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{\tanh^2 x\ \cosh^2 x} = \frac{\cosh x \sinh x - (x^2+1)\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)\sinh^2 x}$$
$$= \frac{\sinh 2x - 2(x^2+1)\operatorname{Arctan} x}{2(x^2+1)\sinh^2 x}.$$

分子を $g(x)$ とおくと,

$$g'(x) = 2(\cosh 2x - 1) - 4x \operatorname{Arctan} x = 4(\sinh^2 x - x \operatorname{Arctan} x).$$

ここで $x > 0$ のとき, $\sinh x > x$, $\operatorname{Arctan} x < x$ より, $g'(x) > 0$.
ゆえに $g(x)$ は $x \geqq 0$ で狭義単調増加で $g(0) = 0$ より, $x > 0$ で $g(x) > 0$.
すなわち $f'(x) > 0$. ゆえに $f(x)$ は $x \geqq 0$ で狭義単調増加.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,\frac{x}{\tanh x} = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

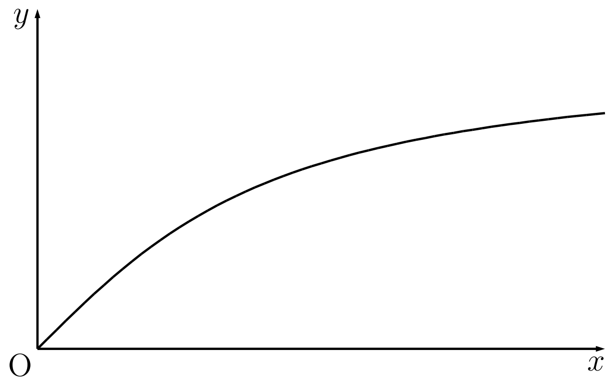
$\operatorname{Arctan} x$ についてのある不等式をめぐって

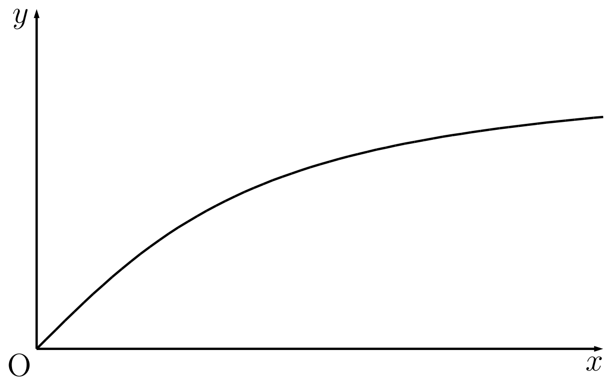
$\mathrm{Arctan}\,x$についてのある不等式をめぐって

$$\boxed{x > 0 \text{のとき，} \quad \boldsymbol{\mathrm{Arctan}\,x > \dfrac{3x}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}}}}$$

$\mathbf{Arctan}\,x$ についてのある不等式をめぐって

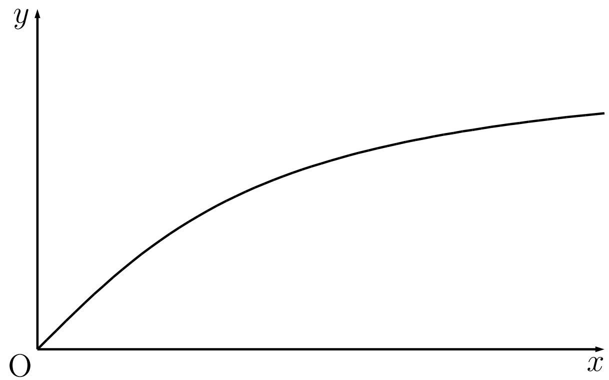
$$\boxed{x > 0 \text{のとき，} \mathbf{Arctan}\,\boldsymbol{x} > \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\mathbf{1} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$



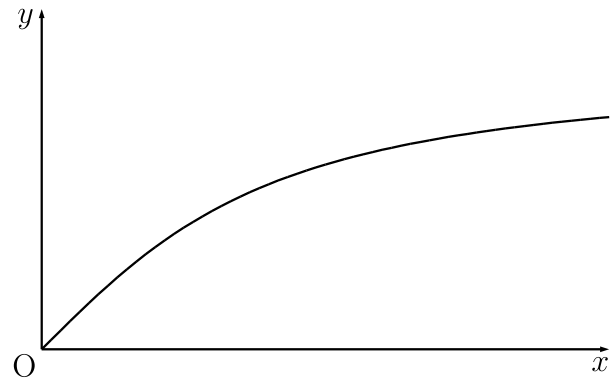


$\mathbf{Arctan}\,x$についてのある不等式をめぐって

$$\boxed{x > 0 \text{ のとき，} \boldsymbol{\mathrm{Arctan}\,x > \dfrac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}}}$$



$$y = \mathrm{Arctan}\,x$$



$$y = \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$$

$f(x) := \operatorname{Arctan} x - \dfrac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$ とおいて微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+2\sqrt{1+x^2}} + \frac{6x^2}{\bigl(1+2\sqrt{1+x^2}\,\bigr)^2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{3\sqrt{1+x^2}+6}{\bigl(1+2\sqrt{1+x^2}\,\bigr)^2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\bigl(\sqrt{1+x^2}-1\bigr)^2}{(1+x^2)\bigl(1+2\sqrt{1+x^2}\,\bigr)^2} \geqq 0.
\end{aligned}
$$

等号は $x=0$ のみであるから，f は $(\,-\infty,\,+\infty\,)$ で狭義単調増加．
とくに $x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=0$．

【注意】f は狭義単調増加であるが，$f(0)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\pi-3)$ より，
増加は実に緩慢である．

$\operatorname{Arctan} x > \dfrac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$ で，$x = \tan\theta$ とおくと，

$$\theta > \frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Snellの不等式： $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} < \theta < \frac{1}{3}(2\sin\theta + \tan\theta).$$

$x \longrightarrow 0$ のとき

- $x(2+\cos x) - 3\sin x = \dfrac{1}{60}x^5 - \dfrac{1}{1260}x^7 + o(x^7)$
- $2\sin x + \tan x - 3x = \dfrac{3}{20}x^5 + o(x^5)$