$\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K})$

野村隆昭　（九大数理）

県民ふれあい会館（鳥取市）

2012 年 12 月 26 日

$\mathbb{K}_1 := \mathbb{R}$, $\mathbb{K}_2 := \mathbb{C}$, $\mathbb{K}_4 := \mathbb{H}$, $\mathbb{K}_8 := \mathbb{O}$.

$e_1, \ldots, e_d$：$\mathbb{K}_d$ の実ベクトル空間としての基底で

• $d = 1$ のとき：$e_1 := 1 \in \mathbb{R}$

• $d = 2$ のとき：$e_1 := 1$（上と同様），$e_2 := i$

• $d = 4$ のとき：$e_1 = 1$，$e_2 := i$（上と同様），$e_3 := j$，$e_4 := k$
（四元数の標準的記法：$ij = k$，$jk = i$，$ki = j$ etc）

• $d = 8$ のとき：$e_1 \sim e_8$ は $\mathbb{O}$ の実ベクトル空間としての基底で，次ページの乗積ルールを持つ：

p行目のxとq列目のyの積 xyの結果：
たとえば，$e_3e_4 = e_6$.

	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	$-e_1$	e_5	e_8	$-e_3$	e_7	$-e_6$	$-e_4$
e_3	$-e_5$	$-e_1$	e_6	e_2	$-e_4$	e_8	$-e_7$
e_4	$-e_8$	$-e_6$	$-e_1$	e_7	e_3	$-e_5$	e_2
e_5	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_1$	e_8	e_4	$-e_6$
e_6	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_8$	$-e_1$	e_2	e_5
e_7	e_6	$-e_8$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-e_1$	e_3
e_8	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$	$-e_1$

- $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_5 \cong \mathbb{H}$.
- Index cycling identity: $e_2e_3 = e_5 \longrightarrow e_3e_4 = e_6 \longrightarrow e_4e_5 = e_7$ etc.

$(e_2e_3)e_4 = e_5e_4 = -e_7 = -e_2e_6 = -e_2(e_3e_4) \longrightarrow$
$(e_3e_4)e_5 = e_6e_5 = -e_8 = -e_3e_7 = -e_3(e_4e_5)$ etc.

$\mathrm{Re}\,\mathbb{K}_d := \mathbb{R}e_1$，$\mathrm{Im}\,\mathbb{K}_d := \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_d$.

$z \mapsto \overline{z}$： $\mathbb{K}_d$の標準共役，すなわち，

$$\overline{e_1} := e_1,\quad \overline{e_m} := -e_m \ (m \neq 1).$$

$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{K}_d)$に対して，$v^* := \begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} \\ \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d) := \{v \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{K}_d) \ ; \ v^* = v\}$.
- $v \in \mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$の対角成分は実数.
- $\mathrm{Tr}(v) := v_{11} + v_{22}$.

事実． $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$は，

$$\text{積}\ u \circ v := \tfrac{1}{2}(uv + vu),\quad \text{内積}\ \langle\, u \,|\, v \,\rangle := \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(uv)$$

によって，階数2のEuclid型Jordan代数になる.

階数2のJordan代数

W：n次元実ベクトル空間，B：W上の正定値対称双線形形式
$V := \mathbb{R} \oplus W$に次で積を入れる：

$$(\alpha, w)(\alpha', w') := (\alpha\alpha' + B(w, w'),\ \alpha w' + \alpha' w)$$

この積でVは階数2のJordan代数．$e_0 := (1, 0) \in V$は単位元.

$e_1, \ldots, e_n$： Bに関するWのONB.
$c_1 := \frac{1}{2}(e_0 + e_n)$，$c_2 := \frac{1}{2}(e_0 - e_n)$はVのJordan枠であり

$$V_{11} := \mathbb{R}c_1, \quad V_{22} := \mathbb{R}c_2, \quad V_{21} := \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{n-1}$$

とおくと，c_1, c_2に関するPeirce分解は$V = V_{11} \oplus V_{21} \oplus V_{22}$.

各$v \in V$を，$v = v_0 e_0 + v_n e_n + v_{21}$ $(v_0, v_n \in \mathbb{R},\ v_{21} \in V_{21})$と表すと，
$v = (v_0 + v_n)c_1 + (v_0 - v_n)c_2 + v_{21}$となるので

$$\mathrm{tr}(v) = 2v_0, \quad \Delta_1(v) = v_0 + v_n, \quad \Delta_2(v) = v_0^2 - v_n^2 - \|v_{21}\|_B^2.$$

とくに

$$\mathrm{tr}(v^2) = 2\bigl(v_0^2 + v_n^2 + \|v_{21}\|_B^2\bigr).$$

- $\mathrm{Cl}(W)$; W から $w \cdot w = B(w, w)$ で生成される Clifford 代数.
- $\mathrm{Cl}(W)$ は $\frac{1}{2}(xy + yx)$ で Jordan 代数になる $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Cl}(W)^+$ で表す.
- $V = \mathbb{R} \oplus W$ は $\mathrm{Cl}(W)^+$ の部分代数とみなせる：

$$V \ni \alpha e_0 + w \mapsto \alpha 1 + w \in \mathrm{Cl}(W)$$

$\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$ に戻って⋯

$$E_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_m := \begin{pmatrix} 0 & e_m \\ -e_m & 0 \end{pmatrix} \ (m = 2, \ldots, d, \text{if } d \geqq 2),$$

$$E_{d+1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は実ベクトル空間 $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$ の基底.

$W := \mathbb{R}E_1 \oplus \mathbb{R}E_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}E_{d+1}$,

$B(w_1, w_2) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(w_2^* w_1)$： W 上の正定値対称双線型形式で,

これに関して，$E_1, \ldots, E_{d+1}$ は ON.

- $\boxed{\mathrm{Herm}(2,\mathbb{K}_d)\cong \mathbb{R}E_0\oplus W}$ (as Euclidean JA).

実際 $v := \begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix}\in \mathrm{Herm}(2,\mathbb{K}_d)$, $z=\sum_{m=1}^{d} z_m e_m \in \mathbb{K}_d$ $(z_m\in\mathbb{R})$ とするとき

$$v^2 = \begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2+|\,z\,|^2 & (\alpha+\beta)z\\ (\alpha+\beta)\overline{z} & \beta^2+|\,z\,|^2\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)+|\,z\,|^2\right)E_0+\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)E_{d+1}+(\alpha+\beta)\sum_{m=2}^{d} z_m E_m,$$

一方，$v=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)E_0+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)E_{d+1}+\sum_{m=1}^{d} z_m E_m$ であり，$\mathbb{R}E_0\oplus W$ で平方すると $\left((\alpha,w)^2=(\alpha^2+B(w,w),\,2\alpha w)\right)$

$$\left\{\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2+\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2+|\,z\,|^2\right\}E_0$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)E_{d+1}+(\alpha+\beta)\sum_{m=1}^{d} z_m E_m.$$

ゆえに恒等写像はJA同型 $\mathrm{Herm}(2,\mathbb{K}_d)\cong \mathbb{R}E_0\oplus W$ を与えている．

そしてE_{ij}は(i,j)行列単位を表すとして

$$c_1 := \frac{1}{2}(E_0 + E_{d+1}) = E_{11}, \quad c_2 := \frac{1}{2}(E_0 - E_{d+1}) = E_{22}$$

$v = \begin{pmatrix} \alpha & z \\ \overline{z} & \beta \end{pmatrix} = \alpha c_1 + \beta c_2 + v_{21}$，$v_{21} := \begin{pmatrix} 0 & z \\ \overline{z} & 0 \end{pmatrix} \in V_{21}$ より，

$$\mathrm{tr}(v) = \alpha + \beta = \mathrm{Tr}(v), \quad \Delta_1(v) = \alpha, \quad \Delta_2(v) = \alpha\beta - |\,z\,|^2 = \mathrm{Det}(v).$$

したがってまた，$\mathrm{Tr}(v^2) = \mathrm{tr}(v^2)$である．//

Euclid型JAの自己共役表現からclanが作れるという話：

- V：Euclid型JA，trace内積$\langle\, v \,|\, v' \,\rangle$，単位元$e_0$
- $\varphi : V \to \mathrm{Sym}(E)$：$V$の自己共役表現，$\varphi \neq 0$なら$\varphi(e_0) = I$を要求する．
（Eは内積$\langle\, \xi \,|\, \xi' \,\rangle_E$を持つ有限次元実ベクトル空間）

$\rightsquigarrow$ $V_E := E \oplus V$： clan構造が入る（$\dim E > 0$ならば単位元は持たない）
$\rightsquigarrow$ 単位元eの付加 $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$

定義．（表現に付随する対称双線型写像）
$\langle\, \varphi(v)\xi \,|\, \eta \,\rangle_E = \langle\, Q(\xi, \eta) \,|\, v \,\rangle$ により，$Q : E \times E \to V$を定義する．

- $\varphi(v) \in \mathrm{Sym}(E)$ $(\forall v \in V)$ より，$Q(\xi, \eta) = Q(\eta, \xi)$ $(\forall \xi, \eta \in E)$.

定義． φが**regular** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \xi_0 \in E$ s.t. $Q(\xi_0, \xi_0) = e_0$（Vの単位元）．

定理 (Clerc: 1992, 2002)
V：階数2のEuclid型単純JA，φ：$V \to \mathrm{Sym}(E)$：自己共役表現.
φ： regular $\iff$ 次の(1),(2)のいずれか.
(1) φは既約で，$\dim W \neq 2, 3, 5, 9$.
(2) φは可約.

φがregularのときは，V_E^0の基本相対不変式の表示式の話はスムーズに運ぶ.

以下，$V = \mathbb{R} \oplus W$，$\dim W = 2, 3, 5, 9$，かつ$\varphi : V \to \mathrm{Sym}(E)$は既約と仮定.
$n := \dim W$，$d := n - 1$とおくと，$V \cong \mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$である.

- 既約な自己共役表現の同値類：nがevenなら1個，nがoddなら2個.
- $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$では，$d = 1$なら$1$個，$d = 2, 4, 8$なら$2$個.

各$z \in \mathbb{K}_d$に対して

$$L_z x := zx, \quad R_z x := xz \qquad (x \in \mathbb{K}_d).$$

$\mathbb{K}_d$には標準的な実内積（先に述べた$e_1, \ldots, e_d$がONB）が入っている.

補題. (1) $(L_z)^* = L_{\overline{z}},\ \ L_z L_{\overline{z}} = |\,z\,|^2 I.$
(2) $(R_z)^* = R_{\overline{z}},\ \ R_z R_{\overline{z}} = |\,z\,|^2 I.$
(3) $a, b \in \mathbb{K}_d$ かつ $a \perp b$ ならば，$L_a L_{\overline{b}} = -L_b L_{\overline{a}},\ \ R_a R_{\overline{b}} = -R_b R_{\overline{a}}$.

以下，$v = v(\alpha, \beta, z) := \begin{pmatrix} \alpha & z \\ \overline{z} & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$，$E := \mathbb{K}_d \oplus \mathbb{K}_d$ とし，

$\varphi_1(v), \varphi_2(v) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ を次で定義する：

$$\varphi_1\big(v(\alpha, \beta, z)\big) := \begin{pmatrix} \alpha I & L_z \\ L_{\overline{z}} & \beta I \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2\big(v(\alpha, \beta, z)\big) := \begin{pmatrix} \alpha I & L_{\overline{z}} \\ L_z & \beta I \end{pmatrix} = \varphi({}^t v).$$

補題を使うことにより，φ_1, φ_2 は $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$ の表現で明らかに自己共役.
既約であることも容易にわかる.
付随する対称双線型写像 Q_1, Q_2 は

$$Q_1(\xi, \xi) = \xi\xi^*, \qquad Q_2(\xi, \xi) = {}^t(\xi\xi^*).$$

よりあからさまに書くと，$\xi = \left(\begin{smallmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{smallmatrix}\right) \in E$ に対して，

$$Q_1(\xi,\xi) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1\overline{\xi_2} \\ \xi_2\overline{\xi_1} & |\xi_2|^2 \end{pmatrix}, \qquad Q_2(\xi,\xi) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_2\overline{\xi_1} \\ \xi_1\overline{\xi_2} & |\xi_2|^2 \end{pmatrix}.$$

確かに $Q_1(\xi,\xi)$ も $Q_2(\xi,\xi)$ も単位行列を表さない．

注意． 成分が可換でないと，一般に ${}^t(A^2) \neq ({}^tA)^2$ である．

例：$A = \begin{pmatrix} i & k \\ 0 & j \end{pmatrix}$ とすると，$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & ik+kj \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -j-i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より，

${}^t(A^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -j-i & -1 \end{pmatrix}$．一方，${}^tA = \begin{pmatrix} i & 0 \\ k & j \end{pmatrix}$ より，

$({}^tA)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ ki+jk & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ j+i & -1 \end{pmatrix} \neq {}^t(A^2)$．

- $\mathrm{Herm}(2,\mathbb{K}_d)$ は Euclid 型 JA であるので，自然に clan でもある：

$$v \mathbin{\triangle} v' := \underline{v}v' + v'(\underline{v})^*, \qquad \underline{v(\alpha,\beta,z)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ \overline{z} & \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}.$$

命題. $v \mapsto {}^t v$ は $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$ の Jordan かつ clan 自己同型である.

注意. (1) $d = 1$ のとき，$\mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_1) = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ であり，$\varphi_2 = \varphi_1$（自明）.
$\varphi := \varphi_1$ が $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ の唯一の既約自己共役表現.
(2) $d = 2$ のとき，$\varphi_2 = \overline{\varphi}_1$.
この場合 $\dim W = 3$.
$\mathrm{Cl}(W) \cong \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ (as ClA), $\quad \mathrm{Cl}(W)^+ = \mathrm{Herm}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ (as JA).
$\forall \psi : \mathrm{Cl}(W) \to L(E)$：表現. Then $\psi(iI_2)^2 = -\psi(I_2) = -I_E$.
$iI_2 \in Z(\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}))$ より，表現空間 E は複素構造 $\psi(iI_2)$ を持って，
各 $\psi(v)$ $(v \in \mathrm{Cl}(W)$ はその複素構造に関して $\mathbb{C}$ 線型.
さらに ψ が既約であると仮定すると，$\psi(iI_2) = \pm iI_E$.
ゆえに $u \mapsto \psi(u)$ は $\mathbb{C}$ 線型 or 反 $\mathbb{C}$ 線型.
一方，ρ を $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ の恒等表現 on $\mathbb{C}^2$ とすると

$$\varphi_1 = \rho\big|_{\mathrm{Herm}(2,\mathbb{C})}, \qquad \varphi_2 = \overline{\rho}\big|_{\mathrm{Herm}(2,\mathbb{C})}.$$

$\mathbb{C}$ 同値ではない $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{C})$ の既約表現は φ_1, φ_2 で尽きている.

$d = 4, 8$ のときは次の命題により，φ_1, φ_2 で既約表現が尽きていることがわかる.

命題. $d = 4, 8$ のとき．φ_1 と φ_2 は同値ではない.

直接証明の概略. $\exists T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}_d \oplus \mathbb{K}_d)$ s.t.

$$\varphi_1(v)T = T\varphi_2(v) \qquad (\forall v \in V = \mathrm{Herm}(2, \mathbb{K}_d)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とする．容易に $T_{12} = 0$，$T_{21} = 0$，$T_{22} = T_{11}$ が出て，$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ の形.

①で $v = v(0, 0, z)$ とおくことにより

$$\overline{z}T_1(w) = T_1(zw) \qquad (\forall z, w \in \mathbb{K}_d).$$

$\gamma := T_1(\gamma)$ とおくことにより，$T_1(z) = \overline{z}\gamma$ $(\forall z \in \mathbb{K}_d)$.

(1) $d = 4$ のとき，$\mathbb{K}_d = \mathbb{H}$.

$$k\gamma = -T_1(k) = -T_1(ij) = iT_1(j) = -ij\gamma = -k\gamma.$$

ゆえに $\gamma = 0$ となって，$T_1 = 0$.（最後の等号で結合法則を使っている）.

(2) $d=8$ のとき，$\mathbb{K}_d=\mathbb{O}$．$\forall z,z'\in\mathbb{O}$ に対して

$$(\overline{z}'\overline{z})\gamma=\overline{(zz')}\gamma=T_1(zz')=\overline{z}T_1(z')=\overline{z}(\overline{z}'\gamma). \qquad \cdots\cdots ②$$

$e_1=1$ との内積をとって，

$$\langle\,\gamma\,|\,zz'\,\rangle=\langle\,\gamma\,|\,z'z\,\rangle.$$

$\forall k\ (k=2,\ldots,8)$ に対して，$i,j\geq 2$ を選んで $e_k=e_ie_j$ とできる．両辺の共役を考えると $-e_k=e_ie_i$ となるから

$$\langle\,\gamma\,|\,e_k\,\rangle=\langle\,\gamma\,|\,e_ie_j\,\rangle=\langle\,\gamma\,|\,e_je_i\,\rangle=-\langle\,\gamma\,|\,e_k\,\rangle$$

ゆえに $\gamma\in\mathbb{R}$．このとき②より $\gamma\neq 0$.

$\varphi_1,\varphi_2\rightsquigarrow$ 単位元を持つclan $(V_E^0,\triangle_1),(V_E^0,\triangle_2)$ を得る.

定理． Clanとして，$(V_E^0,\triangle_1)$ と $(V_E^0,\triangle_2)$ はともに $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{K}_d)$ に同型.

$u:=e-e_0$（e は $V_E^0=\mathbb{R}e\oplus E\oplus V$ の単位元，e_0 は V の単位元）.

対応は，$V_E^0=\mathbb{R}u\oplus E\oplus V\ni\lambda u+\xi+v\mapsto\begin{pmatrix}\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & v\end{pmatrix}\in\mathrm{Herm}(3,\mathbb{K}_d)$

$V=\mathbb{R}\oplus W$，$\dim W\neq 2,3,5,9$のときのいくつかの例.
(1) $\dim W=4$のとき.
$V=\left\{v(\alpha,\beta,z):=\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{H}\cap(\mathbb{R}k)^{\perp}\right\}$と実現できる.
$\varphi(v(\alpha,\beta,z))=\begin{pmatrix}\alpha I & L_z\\ L_{\overline{z}} & \beta I\end{pmatrix}$が$V$のただ一つの既約表現.
今の場合，$\psi:=\varphi\circ\tau\ (\tau(v)={}^t v)$は$\varphi$と同値．実際

$$T_1(1)=1,\qquad T_1(i)=-i,\qquad T_1(j)=-j,\qquad T_1(k)=k$$

として，$T=\mathrm{diag}[\,T_1,\,T_1\,]\in GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})$とすると，$\varphi(v)T=T\psi(v)\ (\forall v\in V)$
が成り立つ.（Vにはkが入らないので，このようなTが生き残る.）
$\pi:\mathrm{Herm}(2,\mathbb{H})\to V$：直交射影．Then $Q(\xi,\xi)=\pi(\xi\xi^*)$.
(2) $\dim W=7$のとき.
$V=\left\{v(\alpha,z):=\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \alpha\end{pmatrix}\ ;\ \alpha\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{O}\cap(\mathbb{R}1)^{\perp}=\mathrm{Im}\,\mathbb{O}\right\}$と実現できる.
$E:=\mathbb{O}\oplus\mathbb{O}$上の作用素を次で定義する：

$$\varphi(v(\alpha,z)):=\begin{pmatrix}\alpha I & L_z\\ -L_z & \alpha I\end{pmatrix},\qquad \psi(v):=\varphi({}^t v).$$

φとψはVの既約は自己共役表現.

事実. Eは複素構造$J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$を持ち，各$\varphi(v)$ $(v \in V)$はJと可換.

実は$J = \varphi(v(0, e_2)) \cdots \varphi(v(0, e_8))$.
そして$T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$は，$\varphi(v)T = T\psi(v)$ $(\forall v \in V)$ を成り立たせるが，このTはJと可換ではない.
$\pi_{\mathrm{Im}} : \mathbb{O} \to \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$：直交射影.

$$Q(\xi, \xi) = v\big(|\,\xi\,|^2, \pi_{\mathrm{Im}}(\xi_1 \overline{\xi}_2)\big) \qquad \xi = \left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}.$$

イメージ：
$$V_E^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \xi^* \\ \xi & v \end{pmatrix} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}, v \in V \right\}.$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} \\ \xi_1 & \alpha & z \\ \xi_2 & \overline{z} & \alpha \end{pmatrix} \ ; \ \begin{array}{r} \alpha, \lambda \in \mathbb{R}, \\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{O} \\ z \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \end{array} \right\}$$

積構造は行列の掛け算を用いるわけではない.

注意： $\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{K})$ において，
$\mathbb{K}$ を $\mathbb{O} \to \mathbb{H} \to \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ とすることにより

$$\mathrm{Herm}(2, \mathbb{O}) \to \mathrm{Herm}(2, \mathbb{H}) \to \mathrm{Herm}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$$

を得るが，たとえば，$\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \beta\end{pmatrix}$ とすることでも，1 次元低い階数 2 の JA に移行する．

例． $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{C}) \supset V := \left\{\begin{pmatrix}\alpha & z\\ \overline{z} & \alpha\end{pmatrix}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}\right\} \cong \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$．対応は

$$V \ni \begin{pmatrix}\alpha & x+iy\\ x-iy & \alpha\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha+y & x\\ x & \alpha-y\end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}).$$

$$V \ni \begin{pmatrix}\alpha & x+iy\\ x-iy & \alpha\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\alpha^2+x^2+y^2 & 2\alpha(x+iy)\\ 2\alpha(x-iy) & \alpha^2+x^2+y^2\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha^2+x^2+y^2+2\alpha y & 2\alpha x\\ 2\alpha x & \alpha^2+x^2+y^2-2\alpha y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+y & x\\ x & \alpha-y\end{pmatrix}^2 \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}).$$