管状領域と複素三角群の一軌道

伊師 英之 （横浜市大・国際総合科学）
野村 隆昭 （九大・数理）

日本数学会年会（於埼玉大学）

2007年3月29日

既知の事実：

$w = (w_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{C})$ に対して

$$\Delta_k(w) := \det \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{（第 } k \text{ 次首座小行列式）.}$$

$\Delta_0(w) \equiv 1,\ \Delta_r(w) = \det w.$

命題 1.1. $w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ とするとき

$$\mathrm{Re}\, w \gg 0 \implies \mathrm{Re}\, \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

命題1.1 は補題1.2（ガウス分解）と補題1.3から導かれる．

補題 1.2. $w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ かつ $\Delta_k(w) \neq 0$ $(\forall k)$ とするとき，$w = na\,{}^t n$ と書かれる．ただし

$$n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix},$$

$$a_k = \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} \ (k = 1, \ldots, r).$$

補題 1.3. $\mathrm{Re}\,(na\,{}^t n) \gg 0$ (n, a: *as above*)
$\implies \mathrm{Re}\, a_1 > 0, \ldots, \mathrm{Re}\, a_r > 0.$

一般化へ向けて：

$V := \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R}), \quad \Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}.$
$\Omega + iV$: $W := V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{C})$ における対応する管状領域.
$GL(r,\mathbb{C})$ は W に $(g,w) \mapsto gw{}^t\!g$ で作用する.

$$A_{\mathbb{C}} := \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_r \end{pmatrix}\ ;\ a_1 \in \mathbb{C}^\times, \dots, a_r \in \mathbb{C}^\times \right\},$$

$$N_{\mathbb{C}} := \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n_{r-1,1} & n_{r-1,2} & & 1 & 0 \\ n_{r1} & n_{r2} & \cdots & n_{r,r-1} & 1 \end{pmatrix}\ ;\ n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

$T_{\mathbb{C}} := N_{\mathbb{C}} \rtimes A_{\mathbb{C}}$

事実：(1) $\Omega + iV \subset T_{\mathbb{C}} \cdot I_r$ （I_r: r 次単位行列）.
(2) $\Delta_k(w) \neq 0\ (k = 1, \dots, r) \iff w \in T_{\mathbb{C}} \cdot I_r.$

再定式化：

$$\boxed{w \in \Omega + iV \implies \mathrm{Re}\,\frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (k = 1, \dots, r).}$$

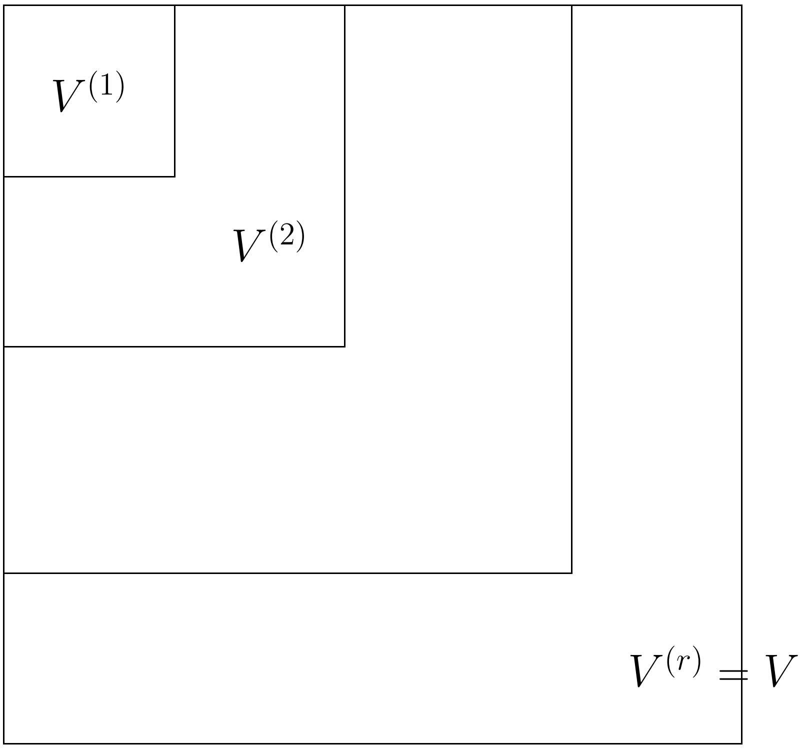
一般の対称管状領域の場合：

V：階数 r の単純ユークリッド型 Jordan 代数（単位元 e）.
$L(x)$：$x \in V$ をかけるかけ算作用素：$L(x)y := xy$.
$\langle x \,|\, y \rangle = \mathrm{tr}(xy)$：$V$ のトレース内積.
$c_1, \ldots, c_r$：Jordan 枠 $(e = c_1 + \cdots + c_r)$.
（原始べき等元の完全直交系）

$V^{(k)} := V(c_1 + \cdots + c_k; 1)$：$c_1 + \cdots + c_k$ の Peirce 1-空間.
（$L(c_1 + \cdots + c_k)$ の固有値 1 に対応する固有空間）.
このとき，各 $V^{(k)}$ は Jordan 部分代数で，

$$V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \cdots \subset V^{(r)} = V$$

P_k：直交射影作用素 $V \to V^{(k)}$.
$\Delta_k(x) := \det{}^{(k)}(P_k x)$：$x \in V$ の第 k 次 Jordan 首座小行列式.
（$\det{}^{(k)}$：Jordan 代数 $V^{(k)}$ での行列式函数）.



• $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ では，Jordan 積は $\frac{1}{2}(AB + BA) =: L(A)B$.

Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r \rightsquigarrow V = \bigoplus_{j \leqq k} V_{jk}$ with $V_{ii} = \mathbb{R}c_i$ $(\forall i)$.

V_{11}	V_{12}	$\cdots$	V_{1r}
V_{12}	V_{22}	$\cdots$	V_{2r}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
V_{1r}	V_{2r}	$\cdots$	V_{rr}

$\Omega := \mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x \in V\}$：$V$ の対称錐.
$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G(\Omega)$, $\quad \mathfrak{k} := \mathrm{Der}\, V$, $\quad \mathfrak{p} := \{L(x)\ ;\ x \in V\}$.
このとき $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$（Cartan 分解）. $\qquad \theta X = -{}^tX$.

$\mathcal{A} := \mathbb{R}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}c_r$.
$\mathfrak{a} := \{L(a)\ ;\ a \in \mathcal{A}\}$：$\mathfrak{p}$ に含まれる可換部分 Lie 代数で極大.
$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$: $L(c_1), \ldots, L(c_r)$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底.
正の $\mathfrak{a}$ ルートは $\frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_j)$ $(k > j)$ で，ルート空間は

$$\mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_j)/2} = \{z \,\square\, c_j\ ;\ z \in V_{jk}\} =: \mathfrak{n}_{kj}.$$

ただし $a \,\square\, b := L(ab) + [\, L(a), L(b)\,]$.

$\mathfrak{n} := \sum_{j<k} \mathfrak{n}_{kj}$ とおくと，岩澤分解を得る：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}.$$

$A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$. このとき，

$$\Omega = NA \cdot e = N \cdot \mathcal{A}_+ \quad (\mathcal{A}_+ := \mathbb{R}_{>0}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_{>0}c_r)$$

$W := V_{\mathbb{C}}$ とおくと，$W = \bigoplus_{j<k} W_{jk}$ $(W_{jk} := (V_{jk})_{\mathbb{C}})$.
$A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}$：$A, N$ の複素化．$A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}} \subset GL(W)$ に注意．
Δ_k：W 上の正則多項式函数と見る．

補題 1.4. $w \in W$ かつ $\Delta_k(w) \neq 0$ $(\forall k)$ とするとき

$$\exists 1\ n \in N_{\mathbb{C}},\ a_1 \in \mathbb{C}^\times, \ldots, a_r \in \mathbb{C}^\times \qquad s.t.$$

$$w = n \cdot (a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r).$$

さらに

$$a_k = \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

補題 1.5. $n \in N_{\mathbb{C}}$ かつ $a_1 \in \mathbb{C}^\times, \ldots, a_r \in \mathbb{C}^\times$ とする．$w := n \cdot (a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r) \in \Omega + iV$ ならば

$$\operatorname{Re} a_1 > 0, \ldots, \operatorname{Re} a_r > 0.$$

補題1.4と補題1.5より

命題 1.6. $w \in W$ とする．$w \in \Omega + iV$ ならば

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

問 1.7. 命題1.6は対称錐に特徴的なことか？

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists\Omega\text{：非対称等質錐} \subset V \text{ s.t.}\\ \qquad w \in \Omega + iV \implies \operatorname{Re}\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad (\forall k).\end{array}}$$

I_m : m次単位行列

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I_m & x_{21}I_m & \boldsymbol{y} \\ x_{21}I_m & x_{22}I_m & \boldsymbol{z} \\ {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{z} & x_{33} \end{pmatrix} \ ; \ \begin{array}{l} \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m, \end{array} \ x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$V \subset \mathrm{Sym}(2m+1, \mathbb{R})$ に注意.

以下 $m \geqq 2$ として

$$\boxed{\Omega := \{x \in V \ ; \ x \gg 0\}}.$$

$\boxed{\dim \Omega = 2m+4}$ に注意.

$$A := \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 I_m & 0 & 0 \\ 0 & a_2 I_m & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \ ; \ a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ a_3 > 0 \right\},$$

$$N := \left\{ n = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 \\ \xi I_m & I_m & 0 \\ {}^t\boldsymbol{n}_1 & {}^t\boldsymbol{n}_2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \xi \in \mathbb{R}, \ \begin{array}{l} \boldsymbol{n}_1 \in \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{n}_2 \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}.$$

Then $N \ltimes A \curvearrowright \Omega$ by

$$(N \rtimes A) \times \Omega \ni (h, x) \mapsto h\, x\, {}^t h \in \Omega$$

作用は単純推移的である：
実際，$x \in \Omega$ が与えられたとき，$a \in A$ と $n \in N$ を求める方程式 $x = na{}^t\!n$ は次のように解ける：

$$a_1 = \Delta_1(x), \qquad a_2 = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}, \qquad a_3 = \frac{\Delta_3(x)}{\Delta_2(x)},$$

$$\xi = \frac{x_{21}}{\Delta_1(x)}, \quad \boldsymbol{n}_1 = \frac{\boldsymbol{y}}{\Delta_1(x)}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \frac{x_{11}\boldsymbol{z} - x_{21}\boldsymbol{y}}{\Delta_2(x)}.$$

ここで

$$\begin{cases} \Delta_1(x) = x_{11}, \\ \Delta_2(x) = x_{11}x_{22} - x_{21}^2, \\ \Delta_3(x) = x_{11}x_{22}x_{33} + 2x_{21}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} - x_{33}x_{21}^2 - x_{22}\|\boldsymbol{y}\|^2 - x_{11}\|\boldsymbol{z}\|^2, \end{cases}$$

$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$：$\mathbb{R}^m$ の標準内積，　$\|\cdot\|$：対応するノルム．

$$\boxed{x \in \Omega \iff \Delta_j(x) > 0 \text{ for any } j = 1,2,3.}$$

$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$ を $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ に $\mathbb{C}$ 双線型に拡張．
$\nu(\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}, \quad \nu(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}.$

$$\begin{cases} \Delta_1(x) = x_{11}, \\ \Delta_2(x) = x_{11}x_{22} - x_{21}^2, \\ \Delta_3(x) = x_{11}x_{22}x_{33} + 2x_{21}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} - x_{33}x_{21}^2 - x_{22}\nu(\boldsymbol{y}) - x_{11}\nu(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

$A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}$：それぞれ A, N の複素化．

$$\Omega + iV \subset N_{\mathbb{C}}A_{\mathbb{C}}\cdot I_{2m+1},$$

ここで，$I_{2m+1} \in \Omega$ に注意．
ゆえに，$\Omega + iV$ 上で $\Delta_k(x) \neq 0$ $(k = 1,2,3)$ である．

$\Omega \subset \mathrm{Pos}(2n+1, \mathbb{R})$ ゆえ，補題1.8を今の場合に適用できる：

補題 1.8. $\mathrm{Re}\,(na\,{}^t\!n) \gg 0$（$n$：下三角，$a$：対角）
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Re}\,a_1 > 0, \ldots, \mathrm{Re}\,a_r > 0.$

$w \in \Omega + iV$ が与えられ，$w = na\,{}^t\!n$ $(n \in N_{\mathbb{C}},\ a \in A_{\mathbb{C}})$ と表したとき，$a_k = \dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)}$ と表されるから，

命題 1.9. $w \in V_{\mathbb{C}}$ とする．$w \in \Omega + iV$ ならば

$$\mathrm{Re}\,\frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

補題 1.5 $n \in N_{\mathbb{C}}$ かつ $a_1 \in \mathbb{C}, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ とする.
$w := n \cdot (a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r) \in \Omega + iV$ ならば

$$\mathrm{Re}\, a_1 > 0, \ldots, \mathrm{Re}\, a_r > 0.$$

これは一般の等質錐に拡張できる.

$\{$ 等質正則 (regular) 開凸錐 $\}$ $\quad\leftrightarrow\quad$ $\{$ 単位元を持つクラン $\}$

V：積 $\triangle$ $(L_x y := x \triangle y)$ が定義された実ベクトル空間
V がクランである $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{cases} (1)\ [L_x, L_y] = L_{x\triangle y - y\triangle x}. \\ (2)\ \exists s \in V^* \text{ s.t. } \langle x\triangle y, s\rangle \text{ は } V \text{ に内積を定義する.} \\ (3)\ \text{各 } L_x \text{ の固有値は実数のみ.} \end{cases}$$

以下，V：単位元 E を持つクラン．
(1) $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{h} := \{L_x \,;\, x \in V\}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie 部分代数，
(3) $\rightsquigarrow$ この $\mathfrak{h}$ は分裂可解．

$H := \exp\mathfrak{h} \subset GL(V)$, $\quad \Omega := HE$：E を通る H 軌道．
Ω は等質正則開凸錐で，こういう手続きでどんな等質正則開凸錐も得られる．

$\exists E_1, \ldots, E_r$：原始べき等元 with $E = E_1 + \cdots + E_r$

$\mathcal{A} := \mathbb{R}E_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}E_r$,
$\alpha_1, \ldots \alpha_r$：$E_1, \ldots, E_r$ に双対な $\mathcal{A}^*$ の基底．

$V = \bigoplus_{k \geqq j} V_{kj}$，ただし $V_{ii} = \mathbb{R}E_i$，

$$V_{kj} = \left\{ x \in V \;;\; \begin{array}{l} L_a x = \frac{1}{2}\langle a, \alpha_k + \alpha_j \rangle x \\ R_a x = \langle a, \alpha_j \rangle x \end{array} \quad (\forall a \in \mathcal{A}) \right\}.$$

$$(R_a x := x \triangle a)$$

V_{11}	V_{21}	$\cdots$	V_{r1}
V_{21}	V_{22}	$\cdots$	V_{r2}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
V_{r1}	V_{r2}	$\cdots$	V_{rr}

$\mathfrak{n} := [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \quad N := \exp \mathfrak{n}.$
$\mathcal{A}_+ := \mathbb{R}_{>0} E_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_{>0} E_r.$
このとき，$\Omega = N \cdot \mathcal{A}_+$.

$W := V_{\mathbb{C}}$,
$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(W)$：$\mathfrak{n}$ の複素化，　$N_{\mathbb{C}} := \exp \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \subset GL(W)$

定理 1.10. $n \in N_{\mathbb{C}}$ かつ $a_1 \in \mathbb{C}, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ とする．
$w := n \cdot (a_1 E_1 + \cdots + a_r E_r) \in \Omega + iV$ ならば

$$\operatorname{Re} a_1 > 0, \ldots, \operatorname{Re} a_r > 0.$$

従って，当初の問題は，$w \in \Omega + iV$ を

$$w = n \cdot (a_1 E_1 + \cdots + a_r E_r)$$

と表すとき，$a_k = \dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)}$ となるかどうかにかかっていることがわかった．

クラン V の積 $x \triangle y$ を $W \times W$ に $\mathbb{C}$ 双線型で拡張する．
$R_x y := y \triangle x \ (x, y \in W)$.

定理 1.11. Ω に付随する基本相対不変式

$$\Delta_1(w), \ldots, \Delta_r(w)$$

は多項式 $\det R_w$ の既約因子に一致する．